 ISBN : 978-979-16353-8-7

A-4

KONSTRUKSI KLAS BARISAN p-SUPREMUM BOUNDED VARIATION SEQUENCES

Moch. Aruman Imron[1], Ch. Rini Indrati[2], dan Widodo[3]

[1]Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Brawijaya, Malang 65145 dan Mahasiswa S3 Matematika, FMIPA, UGM, e-mail : maimr@ub.ac.id.
[2]Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada ,Yogyakarta, 55281, Indonesia, e-mail : rinii@ugm.ac.id.
[2]Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada ,Yogyakarta, 55281, Indonesia, e-mail : widodo_mathugm@yahoo.com.

Abstract

Pada paper ini dibahas konstruksi klas barisan p-Supremum Bounded Variation Sequences yang merupakan generalisasi dari klas Supremum Bounded Variation Sequences (SBVS). Kemudian konstruksi yang didapat diselidiki relasi inklusi dari klas tersebut.

Keyword : Klas Barisan, p-Supremum Bounded Variation Sequences, Relasi Inklusi.

PENDAHULUAN

Dalam analisis Fourier, sifat-sifat koefisien deret Fourier pertama kali dibahas oleh Chaundy dan Jollife [2] dan koefisien-koefisien tersebut dikenal dengan nama klas *MS*(*Monotone sequences*). Kemudian beberapa peneliti seperti Leindler [7], Tikhonov [11] dan Zhou [8, 12] berturut-turut memperlemah syarat kemonotonan Klas *MS* ke dalam klas *RBVS (Rest Bounded Variation Sequences)*, *GMS (General Monotone Sequences)* dan *GBVS (Group Bounded Variation Sequences)*.

Lebih lanjut Zhou dkk [13] berhasil membuktikan bahwa generalisasi klas kemonotonan merupakan klas *MVBVS* (*Mean Value Bounded Variation Sequences*). Lebih lanjut diperoleh $MS \subsetneq RBVS \subsetneq GMS \subsetneq GBVS \subsetneq MVBVS$. Jika syarat kemonotonan di dalam klas *MVBVS* diperlemah lagi maka kekonvergenan seragam deret Fourier tidak terjamin. Namun demikian Feng dan Zhou [3] dapat menunjukkan bahwa *MVBVS* dapat diperlemah menjadi klas GM_7. Dalam perkembangan yang lain ternyata Korus [6] juga berhasil membuktikan bahwa klas *MBVS* dapat diperlemah

 ISBN : 978-979-16353-8-7

menjadi klas *SBVS* (*Supremum Bounded Variation Sequences*) dan klas $SBVS_2$. Menurut Feng dan Zhou [3] *GM*$_7$ sama dengan *SBVS* , walaupun nampak mirip Korus [6] berhasil membuktikan bahwa *SBVS* sebagai klas yang berbeda dengan *GM*$_7$ tetapi sama-sama memuat klas *MBVS.* Kemudian klas *SBVS* dan $SBVS_2$ tetap mempertahankan sifat kekonvergenan seragam pada deret Fourier dan memenuhi relasi $MS \subsetneq RBVS \subsetneq GMS \subsetneq GBVS \subsetneq MVBVS \subsetneq SBVS \subsetneq SBVS_2$. Definisi klas *SBVS* dan $SBVS_2$ sebagai berikut:

Definisi 1.1. *Barisan* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *disebut anggota klas SBVS (Supremum Bounded Variation Sequences) jika terdapat konstanta positif K dan* $\gamma \geq 1$, *sehingga*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m \geq [n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} |a_k|\right)$$

dengan $[x]$ *bagian bulat dari x.*

Definisi 1.2. *Barisan* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *disebut anggota klas* $SBVS_2$ *jika terdapat konstanta positif K dan* $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,\infty)$ *sehingga*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} |a_k|\right).$$

Kemudian Liflyand dan Tikhonov [9, 10] mengembangan klas *GMS* ke $\mathcal{GMS}_p$ (*p- general monotone sequences)* yang terdiri dari kemonotonan barisan bilangan, dengan definisi berikut *:*

Definisi 1.3. *Diberikan* $a = \{a_n\}$ *dan* $\beta = \{\beta_n\}$ *masing-masing barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan* $(a, \beta) \in \mathcal{GMS}_p$, *jika terdapat konstanta positif K sehingga berlaku*

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^p\right)^{1/p} \leq K\beta_n$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \leq p < \infty$.

Definisi 1.4. *Diberikan klas* $\mathcal{GMS}$ *dan* $\beta = \{\beta_n\}$ *barisan bilangan real positif, klas* $\mathcal{GMS}(\beta)$ *adalah keluarga* $\{a : (a, \beta) \in \mathcal{GMS}\}$

Lebih lanjut klas $\mathcal{GMS}_p$ telah digeneralisasi menjadi klas $\mathcal{NBVS}_p$ [4] dan $\mathcal{MVBVS}_p$ [5] dengan definisi berikut.

Definisi 1.5. *Diketahui* $a = \{a_n\}$ *and* $\beta = \{\beta_n\}$ *berturut-turut barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan* $(a, \beta) \in \mathcal{MVBVS}$, *jika terdapat konstanta positif K dan* $\lambda \geq 2$ *sehingga berlaku*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k| \leq \frac{K}{n} \sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]} \beta_k$$

untuk semua bilangan bulat positif n.

ISBN : 978-979-16353-8-7

Definisi 1.6. *Diberikan* $a = \{a_n\}$ *and* $\beta = \{\beta_n\}$ *masing-masing barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan* $(a, \beta) \in \mathcal{MVBVS}_p$ *, jika terdapat konstanta positif K dan* $\lambda \geq 2$ *sehingga berlaku*

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]} \beta_k$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \leq p < \infty$.

Definisi 1.7. *Diberikan klas* $\mathcal{MVBVS}_p$ *dan* $\beta = \{\beta_n\}$ *barisan bilangan real positif, kemudian didefinisikan klas* $\mathcal{MVBVS}_p(\beta)$ *adalah koleksi* $\{a : (a, \beta) \in \mathcal{MVBVS}_p\}$.

Lemma 1.8. *Diberikan* $1 \leq p < \infty$ *, untuk setiap barisan bilangan real non negatif* $\{a_i\}$ *pertidaksamaan*

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p$$

berlaku untuk setiap bilangn bulat positif n [1].

Kemudian di dalam paper ini akan dipaparkan hasil penelitian Penulis yang mengkonstruksikan klas *p-Supremum Bounded Variation Sequences* yang merupakan generalisasi dari klas *SBVS* dan diselidiki sifat inklusinya.

PEMBAHASAN

2. Definisi *p*-Supremum Bounded Variation Sequences.

Menurut Korus [6] klas $SBVS \subsetneq SBVS_2$, sehingga dalam definisi di sini dibahas klas $SBVS_2$. Notasi $SBVS_2$ dalam tulisan ini ditulis *SBVST (SBVS Two)* dan dapat diperluas menjadi $\mathcal{SBVST}$.

Definisi 2.1. *Diberikan* $a = \{a_n\}$ *and* $\beta = \{\beta_n\}$ *berturut-turut barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan* $(a, \beta) \in \mathcal{SBVST}$*, jika terdapat konstanta positif K dan* $\gamma \geq 1$*, sehingga*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq [n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k\right)$$

untuk semua bilangan bulat positif n.

Definisi 2.2. *Diberikan* $a = \{a_n\}$ *dan* $\beta = \{\beta_n\}$ *masing-masing barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan* $(a, \beta) \in \mathcal{SBVST}_p$ *, jika terdapat konstanta positif K dan* $\gamma \geq 1$

sehingga

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n} \left(\sup_{m \geq [n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k\right)$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \leq p < \infty$.

Dari definisi 2.1 dan definisi 2.2, klas $\mathcal{SBVS}_1$ adalah klas $\mathcal{SBVS}$.

 ISBN : 978-979-16353-8-7

Definisi 2.3. *Diberikan klas* $\mathcal{SBVS}_p$ *dan* $\beta = \{\beta_n\}$ *barisan bilangan bilangan real positif, klas* $\mathcal{SBVS}_p(\beta)$ *adalah keluarga* $\{a: (a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_p\}$ *untuk* $1 \le p < \infty$.

Definisi 2.4. *Diketahui* $a = \{a_n\}$ *and* $\beta = \{\beta_n\}$ *berturut-turut barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan* $(a, \beta) \in \mathcal{SBVST}$, *jika terdapat konstanta positif K dan* $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset [0, \infty)$ *sehingga berlaku*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \le \frac{K}{n} \left(\sup_{m \ge b(n)} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right)$$

untuk semua bilangan bulat positif n.

Definisi 2.5. *Diberikan* $a = \{a_n\}$ *and* $\beta = \{\beta_n\}$ *masing-masing barisan bilangan kompleks dan real positif. Pasangan* $(a, \beta) \in \mathcal{SBVST}_p$, *jika terdapat konstanta postif K dan*

$\{b(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset [0, \infty)$ *sehingga berlaku*

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^p\right)^{1/p} \le \frac{K}{n} \left(\sup_{m \ge b(n)} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right)$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \le p < \infty$.

Dari definisi 2.4 dan definisi 2.5, klas $\mathcal{SBVST}_1$ adalah klas $\mathcal{SBVST}$.

Definisi 2.6. *Diberikan klas* $\mathcal{SBVST}_p$, *klas* $\mathcal{SBVST}_p(\beta)$ *adalah keluarga* $\{a: (a, \beta) \in \mathcal{SBVST}_p\}$ *untuk* $1 \le p < \infty$.

3. Sifat-sifat klas p-Supremum Bounded Variation Sequences

Teorema 3.1. *Jika* $1 \le p < q < \infty$, *maka berlaku* $\mathcal{SBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVS}_q$.

Bukti: Ambil $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_p$, maka terdapat konstanta positif K dan $\gamma \ge 1$ sehingga

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}|^p\right)^{1/p} \le \frac{K}{n} \left(\sup_{m \ge [n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right).$$

Kemudian menurut Lemma 1.8 diperoleh

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^q = \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^{p\frac{q}{p}} \le \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p\right)^{\frac{q}{p}}$$

sehingga

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^q\right)^{1/q} \le \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta a_k|^p\right)^{1/p} \le \frac{K}{n} \left(\sup_{m \ge [n/\gamma]} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k \right)$$

Jadi $a \in \mathcal{SBVS}_q$ terbukti $\mathcal{SBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVS}_q$. ■

Akibat 3.2. *Jika* $1 \le p < q < \infty$, *maka* $\mathcal{SBVS}_p(\beta) \subseteq \mathcal{SBVS}_q(\beta)$.

Bukti: Ambil $a \in \mathcal{SBVS}_p(\beta)$, maka $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_p$, menurut Teorema 3.1. $(a, \beta) \in \mathcal{SBVS}_q$. Jadi $a \in \mathcal{SBVS}_q(\beta)$. ■

Akibat 3.3. *Untuk setiap* $a \in SBVS$, *maka* $a \in \mathcal{SBVS}_p(|a|)$ *dengan* $1 \le p < \infty$.

Bukti: Ambil $a \in SBVS$, maka terdapat konstanta positif *K* dan $\gamma \geq 1$, sehingga

$$\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq[n/\gamma]}\sum_{k=m}^{2m}|a_k|\right).$$

Diambil $\beta = |a| = \{|a_n|\}$, maka $\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k - a_{k+1}| \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq[n/\gamma]}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right)$ sehingga $(a,\beta) \in \mathcal{SBVS}_p$, jadi $a \in \mathcal{SBVS}_p(|a|)$. ■

Teorema 3.4. *Jika* $1 \leq p < q < \infty$ *, maka* $\mathcal{SBVST}_p \subseteq \mathcal{SBVST}_q$.

Bukti: Ambil $(a,\beta) \in \mathcal{SBVST}_p$, maka terdapat konstanta positif *K* dan $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,\infty)$ sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k - a_{k+1}|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq b(n)}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right)$$

Seperti langkah bukti teorema 2.1. diperoleh

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^q\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^p\right)^{1/p}$$

Sehingga diperoleh

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k - a_{k+1}|^q\right)^{1/q} \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq b(n)}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right),$$

jadi $(a,\beta) \in \mathcal{SBVST}_q$ dan terbukti $\mathcal{SBVST}_p \subseteq \mathcal{SBVST}_q$. ■

Teorema 3.5. *Jika* $1 \leq p < \infty$ *, maka* $\mathcal{SBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVST}_p$.

Bukti: Ambil $(a,\beta) \in \mathcal{SBVS}_p$, maka terdapat konstanta positif *K* dan $\gamma \geq 1$ sehingga

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k - a_{k+1}|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq[n/\gamma]}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right).$$

Kemudian diambil $b(n) = n/\gamma$ sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k - a_{k+1}|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq b(n)}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right).$$

Jadi $(a,\beta) \in \mathcal{SBVST}_p$ dan terbukti $\mathcal{SBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVST}_p$. ■

Akibat 3.6. *Jika* $1 \leq p < \infty$, *maka* $\mathcal{SBVS}_p(\beta) \subseteq \mathcal{SBVST}_p(\beta)$.

Bukti: Ambil $a \in \mathcal{SBVS}_p(\beta)$, maka $(a,\beta) \in \mathcal{SBVS}_p$, menurut Teorema 3.5. $(a,\beta) \in \mathcal{SBVST}_p$. Jadi $a \in \mathcal{SBVS}_p(\beta)$. ■

Akibat 3.7. *Untuk setiap* $a \in SBVST$, *maka* $a \in \mathcal{SBVST}_p(|a|)$ *dengan* $1 \leq p < \infty$.

Bukti: Ambil $a \in SBVST$, maka terdapat konstanta positif *K* dan $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,\infty)$ sehingga berlaku

$$\left(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k - a_{k+1}|^p\right)^{1/p} \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq b(n)}\sum_{k=m}^{2m}|a_k|\right)$$

 ISBN : 978-979-16353-8-7

Diambil $\beta = |a| = \{|a_n|\}$, maka $(\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k - a_{k+1}|^p)^{1/p} \leq \frac{K}{n}\left(\sup_{m\geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} \beta_k\right)$ sehingga $(a,\beta) \in \mathcal{SBVST}_p$, jadi $a \in \mathcal{SBVST}_p(|a|)$. ■

Teorema 3.8. *Jika* $1 \leq p < \infty$ *, maka* $\mathcal{MVBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVS}_p$.

Bukti: Ambil $(a,\beta) \in \mathcal{MVBVS}_p$ jadi terdapat konstanta positif K dan $\lambda \geq 2$ sehingga berlaku

$$(\textstyle\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^p)^{1/p} \leq \frac{K}{n}\sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]}\beta_k$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \leq p < \infty$. Kemudian sejalan dengan bukti Teorema 1.3. [6], bahwa

$$\frac{K}{n}\sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]}\beta_k \leq \frac{K}{n}\left(\sum_{k=[n/\lambda]}^{2[n/\lambda]-1}\beta_k + \sum_{k=2[n/\lambda]}^{4[n/\lambda]-1}\beta_k + \cdots + \sum_{k=\lambda^2[n/\lambda]}^{2\lambda^2[n/\lambda]-1}\beta_k\right)$$

$$\leq \frac{2\lambda^2 K}{n}\left(\sup_{m\geq[n/\lambda]}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right).$$

Jadi $(\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2\lambda^2 K}{n}\left(\sup_{m\geq[n/\lambda]}\sum_{k=m}^{2m}\beta_k\right)$, sehingga $(a,\beta) \in \mathcal{SBVS}_p$ dengan $K' = 2\lambda^2 K$. Terbukti $\mathcal{MVBVS}_p \subseteq \mathcal{SBVS}_p$. ■

Akibat 3.9. *Jika* $1 \leq p < \infty$, *maka* $\mathcal{MVBVS}_p(\beta) \subseteq \mathcal{SBVS}_p(\beta)$.

Bukti: Ambil $a \in \mathcal{MVBVS}_p(\beta)$, maka $(a,\beta) \in \mathcal{MVBVS}_p$, menurut Teorema 3.8. $(a,\beta) \in \mathcal{SBVS}_p$. Jadi $a \in \mathcal{SBVS}_p(\beta)$, terbukti $\mathcal{MVBVS}_p(\beta) \subseteq \mathcal{SBVS}_p(\beta)$. ■

Akibat 3.10. *Untuk setiap* $a \in MVBVS$ *, maka* $a \in \mathcal{MVBVS}_p(|a|) \subseteq \mathcal{SBVS}_p(|a|)$ *dengan* $1 \leq p < \infty$.

Bukti: Ambil $a \in MVBVS$, maka terdapat konstanta positif K dan $\lambda \geq 2$ sehingga berlaku

$$(\textstyle\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^p)^{1/p} \leq \frac{K}{n}\sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]}|a_k|$$

untuk semua bilangan bulat positif n dan $1 \leq p < \infty$. Diambil $\beta = |a| = \{|a_n|\}$, sehingga

$$(\textstyle\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta a_k|^p)^{1/p} \leq \frac{K}{n}\sum_{k=[\lambda^{-1}n]}^{[\lambda n]}\beta_k$$

jadi $a \in \mathcal{MVBVS}_p(|a|)$ dan menurut Akibat 3.9 maka $a \in \mathcal{SBVS}_p(|a|)$.

Terbukti $a \in \mathcal{MVBVS}_p(|a|) \subseteq \mathcal{SBVS}_p(|a|)$. ■

KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan diatas adalah sebagai berikut.

 ISBN : 978-979-16353-8-7

1. Konstruksi klas $\mathcal{SBVST}_p$ merupakan klas yang lebih umum dari klas $\mathcal{SBVST}$ dan klas $\mathcal{SBVS}$ (Teorema 3.4 dan Teorema 3.5)
2. Klas $\mathcal{SBVST}_p$ merupakan generalisasi dari klas $\mathcal{MVBVS}_p$ (Teorema 3.5 dan Teorema 3.8)
3. Untuk setiap $a \in MVBVS$, maka $a \in \mathcal{MVBVS}_p(|a|) \subseteq \mathcal{SBVS}_p(|a|)$ dengan $1 \leq p < \infty$ (Akibat 3.10).

Ucapan Terima Kasih. Penulis mengucapkan terima kasih atas dukungan dari Jurusan Matematika FMIPA UB dan Program Studi S3 Jurusan Matematika FMIPA UGM .

DAFTAR PUSTAKA

[1] Belaidi,B. dan El Farissi, A., Inequalities Between The Sum of Power and The Exponential of Sum of Nonnegative Sequence, *Department of Mathematics University of Monstaganem*, Monstaganem (Algeria). 2012.

[2] Chaundy TW dan Jollife AE**,** The Uniform Convergence of certain class trigonometric serie, *Proc. London, Soc.* 15, 214-116, 1916.

[3] Feng, F.J. dan Zhou, S.P., On L^1-Convergence Of Fourier Series Of Complex Valued Functions Under The GM_7 Condition, *Acta Math, Hungar*, 133(1-2), 2011.

[4] Imron, M.A., Indrati, Ch.R.and Widodo, *On p*-Non One Sided Bounded variation Sequences and Functions, *Proc 2nd Basic Science International Conference*, Mathematics Department, FMIPA, UB, 2012.

[5] Imron, M.A., Indrati, Ch.R.and Widodo, Sifat-sifat Barisan dan fungsi dasri klas *p*-mean Value Bounded variation, *Konferensi Nasional Matematika 16*, Unpad , Bandung, 2012

[6] Korus,P., Remark On the uniform And L^1-Convergence Of Trigonometric Series, *Acta Math. Hungar*, 128(4), 2010.

[7] Leindler, L., Best Approaximation and Fourier Coefficients, *Anal. Math*, 31, 117-129 (2005).

[8] Le, R.J. and S. P. Zhou, A new condition for uniform convergence of certain trigonometric series, *Acta Math Hungar,* 108, 2005.

[9] Liflyand,E. and Tikhonov,S., The Fourier Transforms of General Monotone Functions, *Analysis and Mathematical Physics*, Trends in Mathematics (Birchauser, 2009).

[10] Liflyand, E. And Tikhonov, S., A concept of general monotonicity and applications, *Math Nachr*, 284, No. 8-9, 2011.

[11] Tikhonov,S., Best approximation and moduli of Smoothness computation and Equivalence Theorems, *Journal of Approximation Theory*, 153 (19-39), 2008.

[12]Yu, D.S. dan Zhou, S.P., A Generalization of Monotonicity Conditions and Applications, *Acta Math Hungar*, 115(3), 2007.

[13] Zhou, S.P., Zhou, P. dan Yu, D.S., Ultimate generalization to monotonicity for Uniform Convergence of Trigonometric Series, *Science China Mathematics*, 53(7), 1853-1862, 2010.