Modul Perkalian

Oleh
Samsul Arifin
Jurusan Matematika FMIPA UGM
Sekip Utara Yogyakarta 55281

Abstrak

Di dalam teori modul terdapat modul khusus yang disebut modul perkalian (*multiplication modules*). Misalnya *R* adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan *M* adalah *R*-modul uniter, maka *M* disebut modul perkalian jika untuk setiap submodul *N* di *M* terdapat ideal presentasi *I* di ring *R* sehingga berlaku $N = IM$. Di pihak lain, juga dikenal submodul prima yang ada dalam suatu *R*-modul *M*, yang termotivasi dari definisi ideal prima dalam suatu ring *R,* yaitu dengan memandang ring *R* sebagai modul atas dirinya sendiri (*R* adalah *R*-modul).

Tujuan dari penyusunan tulisan ini adalah untuk mempelajari modul perkalian beserta sifat-sifatnya, dan kaitannya dengan submodul prima. Akan dipelajari juga sifat-sifat dari ideal prima mana saja yang dapat dibawa ke sifat-sifat submodul prima dalam suatu modul perkalian.

Akhirnya dapat disimpulkan bahwa beberapa sifat yang terdapat dalam ideal prima dalam suatu ring dapat dibawa menjadi sifat-sifat submodul prima dalam suatu modul perkalian.

Kata kunci : modul perkalian, submodul prima.

I. Pendahuluan

Dalam teori modul dikenal modul khusus yang disebut modul perkalian (*multiplication module*). Jika *R* adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan *M* adalah *R*-modul uniter, maka *M* disebut *modul perkalian* jika untuk setiap submodul *N* di *R*-modul *M* terdapat ideal presentasi *I* di ring *R* sehingga berlaku $N = IM$.

Ideal *I* di ring *R* disebut *ideal prima* jika ideal *I* adalah ideal sejati $(I \neq R)$ dan untuk setiap $a, b \in R$ berlaku jika $ab \in I$ maka $a \in I$ atau $b \in I$. Selanjutnya, dengan memandang *R* sebagai modul atas dirinya sendiri (*R* adalah *R*-modul), maka perkalian $ab \in I$ dapat dipandang sebagai bentuk perkalian $a \in R$ (*R* sebagai ring) dan $b \in R$ (*R* sebagai modul), sehingga jika *I* ideal prima maka berlaku $a \in I$ atau $b \in Ann_R(R/I)$. Hal ini memotivasi adanya definisi submodul prima pada *R*-modul *M*. Selanjutnya, *N* disebut *submodul prima* di *R*-modul *M* jika *N* merupakan submodul sejati $(N \neq M)$ dan untuk setiap $r \in R,\ m \in M$ berlaku jika $rm \in N$ maka $m \in N$ atau $r \in Ann_R(M/N)$.

Dipresentasikan dalam **Seminar Nasional Aljabar, Pengajaran Dan Terapannya** dengan tema **Kontribusi Aljabar dalam Upaya Meningkatkan Kualitas Penelitian dan Pembelajaran Matematika untuk Mencapai World Class University** yang diselenggarakan oleh Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY Yogyakarta pada tanggal 31 Januari 2009

Ring *R* disebut *ring prima* jika $\{0\}$ adalah ideal prima di ring *R*. Dengan cara yang sama, yaitu dengan memandang *R* sebagai modul atas dirinya sendiri (*R* adalah *R*-modul), maka hal ini juga memotivasi adanya definisi modul prima pada *R*-modul *M*, yaitu *R*-modul *M* disebut *modul prima* jika $\{0\}$ adalah submodul prima di *R*-modul *M*.

Dalam tulisan ini akan dipelajari modul perkalian dan sifat-sifatnya, dan juga kaitan antara sifat-sifat submodul prima dalam modul perkalian. Akan dipelajari juga sifat-sifat dari ideal prima dan ring prima mana saja yang dapat dibawa ke sifat-sifat submodul prima dan modul prima dalam sebuah modul perkalian. Pembahasan sifat-sifat submodul prima dalam modul perkalian yang terdapat dalam tulisan ini diharapkan dapat menjadi pemantik dalam mengkaji modul perkalian lebih lanjut.

Literatur utama yang menjadi acuan utama dalam tulisan ini adalah paper (artikel) karangan Tekir (2007) yang membahas tentang modul perkalian. Untuk mendukung paper di atas, penulis juga menggunakan paper lain, yaitu paper karangan Dauns (1978), yang membahas tentang ring, modul prima, dan submodul prima, yang juga dilengkapi dengan beberapa contoh. Selain paper tersebut, penulis juga menggunakan paper karangan Ameri (2003) yang membahas karakteristik submodul prima pada modul perkalian.

Selain menggunakan paper, tulisan ini juga disusun dengan menggunakan beberapa buku acuan. Beberapa di antaranya adalah buku karangan Ash (2000) yang membahas pengertian dan dasar-dasar ring, lapangan, dan modul. Selain itu, penulis juga menggunakan buku karangan Fraleigh (1994) dan Rotman (2003) yang membahas dasar-dasar ring. Untuk lebih memahami teori ring dan modul, penulis juga mempelajari buku karangan Adkins-Weintraub (1992).

II. Metode Penelitian

Dalam menyusun tulisan ini, pertama-tama dipelajari terlebih dahulu materi tentang teori ring dan teori modul, dimana kedua hal tersebut merupakan landasan utama definisi maupun teorema yang ada dalam tulisan ini. Selanjutnya, dipelajari pengertian dan sifat-sifat submodul prima dan modul prima. Kemudian, dibahas mengenai modul perkalian, sifat-sifatnya dan kaitannya dengan submodul prima.

III. Hasil Penelitian dan Pembahasan

Dalam tulisan ini, semua ring yang diberikan diasumsikan sebagai ring komutatif dengan elemen satuan dan modul yang diberikan adalah modul uniter. Untuk sembarang submodul *N* di *R*-modul *M*, didefinisikan $(N:M)=\{r\in R \mid rM\subseteq N\}$. *N* disebut *submodul prima* di *R*-modul *M* jika *N* adalah submodul sejati *M* dan untuk setiap $r\in R$, $m\in M$ berlaku jika $rm\in N$ maka $m\in N$ atau $r\in(N:M)$ dengan $(N:M)=\{r\in R \mid rM\subseteq N\}$. Definisi mengenai submodul prima tersebut dapat dinyatakan juga dengan kalimat sebagai berikut. Untuk sebarang *R*-modul *M* dan *N* submodul di *M*, *N* disebut *submodul prima* jika *N* adalah submodul sejati dan untuk setiap $r\in R$, $m\in M\setminus N$ berlaku jika $rm\in N$ maka $r\in(N:M)$

Jika *M* adalah *R*-modul, maka *M* disebut *modul perkalian* jika untuk setiap submodul *N* di *M* terdapat ideal *I* di ring *R* sehingga berlaku $N=IM$. *I* disebut *ideal presentasi* dari submodul *N* atau lebih singkatnya *I* adalah *presentasi* dari *N*. Selanjutnya *M* adalah *R*-modul perkalian jika dan hanya jika untuk setiap $m\in M$, terdapat ideal *I* di ring *R* sehingga berlaku $Rm=IM$. Kemudian, jika diberikan *M* adalah *R*-modul perkalian, maka untuk setiap $a,b\in M$, perkalian *ab* didefinisikan sebagai *hasil kali* antara (Ra) dan (Rb). Lebih jelasnya adalah $ab=(Ra)(Rb)$.

Karena $(Ra)=\langle a\rangle$ dan $(Rb)=\langle b\rangle$ masing-masing adalah submodul yang dibangun oleh setiap $a,b\in M$ maka akan terdapat ideal *I* (ideal presentasi dari (Ra)) dan ideal *J* (ideal presentasi dari (Rb)) di ring *R* (karena *M* adalah *R*-modul perkalian) sehingga berlaku $(Ra)=IM$ dan $(Rb)=JM$. Berdasarkan definisi hasil kali elemen-elemen $a_1,a_2,...,a_n$ di *R*-modul perkalian tersebut, maka akan diperoleh :

$$\boxed{a_1a_2...a_n=(Ra_1)(Ra_2)...(Ra_n)=(I_1M)(I_1M)...(I_nM)=(I_1I_1...I_n)M=I'M=N'}$$

untuk suatu ideal $I_1,I_1,...,I_n$ di ring *R* dan submodul *N'* dengan ideal presentasinya adalah $I'=I_1I_1...I_n$, yang artinya perkalian elemen-elemen di *R*-modul perkalian *M* akan menghasilkan suatu submodul.

ISBN : 978-979-16353-2-5

Jika *N* dan *K* masing-masing adalah submodul-submodul di *R*-modul perkalian *M* dengan $N = I_1 M$ dan $K = I_2 M$ untuk suatu ideal-ideal I_1 dan I_2 di ring *R*, maka hasil kali dari submodul *N* dan submodul *K* ditulis *NK* dan didefinisikan dengan $NK = I_1 I_2 M$. Dengan demikian, dapat disimpulkan pula bahwa perkalian submodul-submodul dalam modul perkalian akan menghasilkan suatu submodul.

Perlu diketahui bahwa definisi perkalian pada modul perkalian di atas berbeda dengan definisi perkalian ideal biasa. Akan diberikan ilustrasi sebagai berikut. Misalnya diberikan *M* adalah *R*-modul dengan $R = \mathbf{Z},\ M = 2\mathbf{Z}$, dan submodul $N = K = 4\mathbf{Z}$ untuk himpunan bilangan bulat $\mathbf{Z}$. Hal ini berarti terdapat ideal $I = J = 2\mathbf{Z}$ sehingga berlaku $N = IM = 2\mathbf{Z}2\mathbf{Z} = 4\mathbf{Z}$ dan $K = JM = 2\mathbf{Z}2\mathbf{Z} = 4\mathbf{Z}$. Perhatikanlah perbedaan antara kedua definisi perkalian tersebut di bawah ini.

(i). $NK = 4\mathbf{Z}4\mathbf{Z} = 16\mathbf{Z}$ *(definisi perkalian biasa)*

(ii). $NK = (IJ)M = (2\mathbf{Z}2\mathbf{Z})2\mathbf{Z} = 8\mathbf{Z}$ *(definisi modul perkalian)*

Ideal presentasi untuk suatu submodul di dalam modul perkalian tidaklah tunggal. Sebagai contohnya adalah dalam $\mathbf{Z}$-modul $\mathbf{Z}_5$, ideal presentasi dari submodul $\{0\}$ adalah $(5n)\mathbf{Z}$ dengan $n \in \mathbf{Z}$, yaitu $5\mathbf{Z}$, $10\mathbf{Z}$, ..., dan seterusnya. Karena itu perkalian submodul-submodulnya dapat dinyatakan dalam beberapa bentuk perkalian ideal-ideal presentasi suatu submodul dengan modulnya. Misalnya $N = I_1 M = I_2 M = I_3 M$ dan $K = J_1 M = J_2 M = J_3 M$ maka hasil kali *NK* tidak bergantung dari ideal presentasinya dan dapat dinyatakan sebagai $NK = I_1 J_1 M = I_2 J_2 M = I_3 J_3 M$. Hal ini termuat dalam Teorema di bawah ini.

Teorema 1

Misalkan $N = IM$ *dan* $K = JM$ *masing-masing merupakan submodul di R–modul perkalian M, maka hasil kali antara* N *dan K independen dari ideal-ideal presentasi di* N *dan K.*

Bukti :

Misalkan $N = I_1 M = I_2 M = N'$ dan $K = J_1 M = J_2 M = K'$ untuk ideal-ideal I_1, J_1, I_2, J_2 di ring *R*. Akan ditunjukkan bahwa $NK = I_1 J_1 M = I_2 J_2 M = N'K'$. Selanjutnya diambil sebarang $rsm \in NK = I_1J_1M$ untuk suatu $r \in I_1, s \in J_1$ dan $m \in M$. Karena $J_1M = J_2M$, maka $sm = \sum_{i=1}^{n} p_i m_i, \quad p_i \in J_2, m_i \in M$ sehingga diperoleh

$$rsm = r\left(\sum_{i=1}^{n} p_i m_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r\left(p_i m_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(rm_i\right)$$

dan karena $rm_i \in I_1M = I_2M$, maka $rm_i = \sum_{j=1}^{k} q_j z_j, \quad q_j \in I_2,\ z_j \in M$ sehingga diperoleh

$$rsm = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(rm_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(\sum_{j=1}^{n} q_j z_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} p_i q_j z_j = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} q_j p_i z_j \in I_2J_2M$$

Karena untuk sebarang $rsm \in NK = I_1J_1M$, memberikan hasil $rsm \in I_2J_2M$, maka $I_1J_1M \subseteq I_2J_2M$**.** Dengan cara yang sama seperti di atas, jika diambil sebarang $abm \in NK = I_2J_2M$ untuk suatu $a \in I_2, b \in J_2$ dan $m \in M$. Karena $J_2M = J_1M$, maka $bm = \sum_{i=1}^{n} d_i m_i, \quad \mathrm{d}_i \in J_2, m_i \in M$ sehingga diperoleh :

$$abm = a\left(\sum_{i=1}^{n} d_i m_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a\left(d_i m_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d_i\left(am_i\right)$$

dan karena $am_i \in I_2M = I_1M$, maka $am_i = \sum_{j=1}^{k} x_j y_j, \quad x_j \in I_1,\ y_j \in M$ sehingga

diperoleh $abm = \sum_{i=1}^{n} d_i\left(am_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} d_i x_j y_j = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} x_j d_i y_j \in I_1J_1M$

Karena untuk sebarang $abm \in NK = I_2J_2M$, memberikan hasil $abm \in I_1J_1M$, maka $I_2J_2M \subseteq I_1J_1M$. Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa $I_1J_1M \subseteq I_2J_2M$ dan $I_1J_1M \supseteq I_2J_2M$**.** Dengan kata lain $NK = I_1J_1M = I_2J_2M = N'K'$, yang artinya hasil kali *NK* independen dengan ideal-ideal presentasi dari *N* dan *K*. W

Selanjutnya, *M* disebut *R*-modul modul setia (*faithful*) jika $Ann_R(M) = \{0\}$ dan *M* adalah *R*-modul sederhana jika $M \neq \{0\}$ dan submodulnya hanya $\{0\}$ atau *R*-modul *M* sendiri.

ISBN : 978-979-16353-2-5

Teorema 2

Misalkan P submodul sejati di R-modul perkalian M, maka submodul P merupakan submodul prima jika dan hanya jika

$$UV \subseteq P \Rightarrow U \subseteq P \quad \textit{atau } V \subseteq P$$

untuk setiap submodul U dan V di modul M.

Bukti :

$\Rightarrow$: Diketahui *P* submodul prima di *R*-modul perkalian *M* dengan $UV \subseteq P$. Misalkan *I* dan *J* masing-masing adalah ideal presentasi dari submodul *U* dan *V*, maka berlaku $U = IM$, $V = JM$, dan $UV = (IM)(JM) = IJM \subseteq P$. Selanjutnya diambil sebarang $(ab)m \in IJM \subseteq P$ untuk suatu $a \in I$, $b \in J$ dan $m \in M$. Karena P submodul prima maka $(P:M)$ ideal prima dan untuk sebarang $m \in M \setminus P$, $r \in R$ berlaku jika $(ab)m \in P$ maka $(ab) \in (P:M)$. Karena $(P:M)$ ideal prima maka jika $(ab) \in (P:M)$ maka $a \in (P:M)$ atau $b \in (P:M)$, yang artinya $am \in P$ atau $bm \in P$ untuk setiap $m \in M$.

Dari sini diperoleh $U \subseteq P$ atau $V \subseteq P$ (karena sebelumnya $am \in IM = U$ dan $bm \in JM = V$). Dengan demikian, terbukti bahwa jika P submodul prima di *R*-modul *M* maka berlaku jika $UV \subseteq P$ maka $U \subseteq P$ atau $V \subseteq P$ untuk suatu submodul *U, V* di *R*-modul *M*. W

$\Leftarrow$: Diketahui *P* submodul di *R*-modul perkalian *M* dengan $P \neq M$ dan berlaku jika $UV \subseteq P$ maka $U \subseteq P$ atau $V \subseteq P$ untuk suatu submodul-submodul *U* dan *V* di *R*-modul *M*. Selanjutnya diambil sebarang $rx \in P$ untuk sebarang $r \in R$ dan $x \in M \setminus P$. Untuk suatu $m \in M$, jika $rM \not\subseteq P$ maka $rm \notin P$. Misalkan *I* dan *J* masing-masing adalah ideal presentasi dari *rx* dan *m*, maka dapat dibentuk submodul yang dibangun oleh *rx* dan *m* yaitu:

$$\langle rx \rangle \langle m \rangle = (Rrx)(Rm) = (Rx)(Rrm) = IM.JM = IJM \subseteq P$$

Berdasarkan hipotesis, maka berlaku $(Rx) \subseteq P$ atau $(Rrm) \subseteq P$ yang artinya $x \in P$ atau $rm \in P$. Hal ini merupakan kontradiksi karena $x \notin P$ atau $rm \notin P$. Dari sini, diperoleh bahwa untuk setiap $r \in R$ dan $x \in M \setminus P$, jika $rx \in P$ maka $r \in (M:P)$, yang artinya *P* adalah submodul prima di *R*-modul *M*. Dengan demikian, terbukti bahwa jika $UV \subseteq P$ maka $U \subseteq P$ atau $V \subseteq P$ untuk suatu submodul-submodul *U* dan *V* di *R*-modul *M* maka *P* adalah submodul prima. W

Akibat 3

Misalkan P submodul sejati di R-modul perkalian M, maka P adalah submodul prima jika dan hanya jika

$$mm' \subseteq P \Rightarrow \; m \in P \quad \textit{atau} \;\; m' \in P$$

untuk setiap $m, m' \in M$ *.*

Bukti :

Diketahui *P* submodul prima di *R*-modul *M* dan $P \neq M$. Selanjutnya diambil sebarang $m, m' \in M$ dengan $mm' \subseteq P$. Dari sini dapat dibentuk submodul yang dibangun oleh mm' yaitu $\langle mm' \rangle = \langle m \rangle \langle m' \rangle \subseteq P$. Karena $m, m' \in M$ maka $\langle m \rangle$, $\langle m' \rangle$ adalah submodul-submodul di *R*-modul *M*. Dari Teorema 2 di atas, maka diperoleh $\langle m \rangle \langle m' \rangle \subseteq P$ jika dan hanya jika $\langle m \rangle \subseteq P$ atau $\langle m' \rangle \subseteq P$, yang artinya $m \subseteq P$ atau $m' \subseteq P$.

Dengan demikian, terbukti bahwa *P* submodul prima di *R*-modul *M* dan $P \neq M$ jika dan hanya jika $mm' \subseteq P \; \Rightarrow \; m \in P$ atau $m' \in P$ untuk setiap $m, m' \in M$. W

Definisi 4

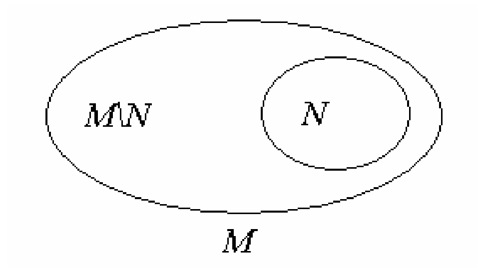
Diberikan M adalah R-modul perkalian. Sebuah himpunan bagian tak kosong S^* *di modul M dikatakan tertutup terhadap perkalian* <u>*(multiplicatively closed)*</u> *jika berlaku* $mn \cap S^* \neq \emptyset$ *untuk sebarang* $m, n \in S^*$*.*

Proposisi 5

Misalkan M adalah R-modul perkalian, maka submodul sejati N *di R-modul* M *merupakan submodul prima jika dan hanya jika himpunan* $M \setminus N$ *tertutup terhadap perkalian.*

Bukti :

Sebelumnya perhatikan ilustrasi gambar himpunan *M* di bawah ini untuk menggambarkan keadaan di atas.



ISBN : 978-979-16353-2-5

$\Rightarrow$: Diketahui submodul *N* merupakan submodul prima. Selanjutnya diambil sebarang $a,b \in M \setminus N$, yang berarti $a,b \notin N$. Karena submodul *N* merupakan submodul prima, jika $a \notin N$ dan $b \notin N$ maka berlaku $ab \text{Ø} N$. Hal ini merupakan kontraposisi dari pernyataan definisi submodul prima yang mengatakan bahwa untuk sebarang $a,b \in M$, jika $ab \subseteq N$ maka $a \in N$ dan $b \in N$. Dari sini, karena $a,b \notin N$ dan $ab \not\subseteq N$, maka dapat diperoleh $ab \subseteq M \setminus N$, sehingga berlaku $ab \cap (M \setminus N) \neq \varnothing$. Karena hal ini berlaku untuk sebarang $a,b \in M \setminus N$, maka himpunan $M \setminus N$ tertutup terhadap perkalian. Dengan demikian, terbukti bahwa jika *N* adalah submodul prima pada *R*-modul perkalian *M* maka $M \setminus N$ tertutup terhadap perkalian. W

$\Leftarrow$: Diketahui himpunan $M \setminus N$ tertutup terhadap perkalian. Selanjutnya diambil sebarang $a,b \notin N$ yang berakibat $a,b \notin M \setminus N$. Karena $M \setminus N$ tertutup perkaliannya, maka untuk sebarang $a,b \in M \setminus N$ berlaku $ab \cap (M \setminus N) \neq \varnothing$. Dari sini karena $a,b \notin N$ dan $ab \cap (M \setminus N) \neq \varnothing$, maka berakibat $ab \not\subseteq N$. Dengan kata lain, jika $a \notin N$ dan $b \notin N$ maka berlaku $ab \not\subseteq N$, yang artinya *N* adalah submodul prima. Dengan demikian, terbukti bahwa jika $M \setminus N$ tertutup terhadap perkalian maka *N* adalah submodul prima pada *R*-modul perkalian *M* . W

Seperti halnya pada gelanggang (ring), dalam modul perkalian juga didefinisikan elemen pembagi nol dan daerah integral, yaitu sebagai berikut :

Definisi 6

Diberikan M adalah R-modul perkalian. Pembagi nol (zero divisor) di R-modul M adalah elemen $0_M \neq a \in M$ *dimana terdapat* $0_M \neq b \in M$ *sehingga berlaku* $ab = (Ra)(Rb) = 0_M$. *Jika M tidak memuat pembagi nol maka R-modul M disebut daerah integral.*

Teorema 7

Misalkan M adalah R–modul dan N adalah submodul sejati di M, maka N merupakan submodul prima jika dan hanya jika M / N *adalah daerah integral (tidak memuat pembagi nol).*

Bukti :

$\Rightarrow$: Diketahui *N* adalah submodul prima di *R*-modul perkalian *M* dan $N \neq M$. Sebelumnya, perhatikan bahwa M / N adalah *R*-modul perkalian, dengan penjelasan sebagai berikut. Untuk sebarang $m \in M$ dapat dibentuk submodul yang dibangun oleh *m*, yaitu $\langle m \rangle = Rm \subseteq M$. Karena *M* adalah *R*-modul perkalian maka terdapat ideal *I* di ring *R* sehingga berlaku $Rm = IM$. Selanjutnya, untuk sebarang $\overline{m} \in M / N$ dapat dibentuk submodul yang dibangun oleh $\overline{m}$, yaitu $\langle \overline{m} \rangle = R\overline{m} \subseteq M / N$. Perhatikan bahwa :

$$R\overline{m} = R(m+N) = Rm + N = IM + N$$

Perhatikan juga bahwa $IM + N = I(M / N)$. (karena untuk sebarang $\overline{am} \in IM + N$ berlaku $am + N = \overline{am} = a\overline{m} = a(m+N) \in I(M / N)$ yang artinya $IM + N \subseteq I(M / N)$ dan untuk $a\overline{m} \in I(M / N)$ berlaku $a\overline{m} = \overline{am} = am + N \in IM + N$). Dari sini diperoleh $R\overline{m} = I(M / N)$, yang artinya untuk sebarang $\overline{m} \in M / N$ terdapat ideal *I* di ring *R* sehingga berlaku $R\overline{m} = IM$. Dengan kata lain, M / N adalah *R*-modul perkalian.

Selanjutnya diandaikan M / N memiliki pembagi nol**.** Selanjutnya diambil sebarang $0_{M/N} \neq \overline{a} \in M / N$ pembagi nol di M / N dengan $a \in M$**,** maka terdapat $0_{M/N} \neq \overline{b} \in M / N$ dengan $b \in M$ sehingga berlaku $\overline{a}.\overline{b} = 0_{M/N} = \overline{ab} = 0_{M/N}$, yang artinya $ab \in N$. Karena *N* submodul prima maka berlaku $a \in N$ atau $b \in N$. Hal ini kontradiksi dengan $0_{M/N} \neq \overline{a} \in M / N$ dan $0_{M/N} \neq \overline{b} \in M / N$ (yang berarti $a \notin N$ dan $b \notin N$). Dari sini diperoleh pengandaian salah dan haruslah M / N tidak memiliki pembagi nol**,** yang artinya M / N adalah daerah integral. Dengan demikian, terbukti bahwa jika *N* adalah submodul prima di *R*-modul *M* maka M / N adalah daerah integral. W

$\Leftarrow$: Diketahui M / N tidak memuat pembagi nol. Misalkan $ab \subseteq N$ dengan $a, b \in M$. Karena $\overline{ab} = N$ diperoleh $\overline{ab} = 0$. Karena M / N tidak memiliki pembagi nol, maka $\overline{a} = 0_{M/N}$ atau $\overline{b} = 0_{M/N}$. Dari sini diperoleh :

$$\overline{a} = 0_{M/N} \Leftrightarrow a + N = 0 + N \Leftrightarrow a + N = N \Leftrightarrow a \in N$$

Dengan cara yang sama, maka diperoleh :

$$\overline{b} = 0_{M/N} \Leftrightarrow b + N = 0 + N \Leftrightarrow b + N = N \Leftrightarrow b \in N$$

Dari sini diperoleh untuk $a, b \in M$ jika $ab \subseteq N$ maka $a \in N$ atau $b \in N$, yang artinya *N* submodul prima. Dengan demikian, terbukti bahwa jika M / N tidak memuat pembagi nol maka *N* adalah submodul prima di *R*-modul perkalian *M*. W

IV. Simpulan dan Saran

ISBN : 978-979-16353-2-5

Beberapa hasil penting atau sifat-sifat yang dapat dijadikan sebuah kesimpulan dari tulisan ini adalah sebagai berikut :

Kaitan antara modul perkalian dan submodul prima adalah sebagai berikut. Pada *R*-modul perkalian *M* jika *P* adalah submodul sejati di *M* maka pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen :

1. Submodul *P* adalah submodul prima.
2. Untuk setiap submodul $U, V \subseteq M$ berlaku jika $UV \subseteq P$ maka $U \subseteq P$ atau $V \subseteq P$.
3. Untuk setiap $m, m' \in M$ berlaku jika $mm' \subseteq P$ maka $m \in P$ atau $m' \in P$.

Selanjutnya, kaitan antara modul perkalian, submodul prima dan daerah integral adalah sebagai berikut. Pada *R*-modul perkalian *M* jika *N* adalah submodul sejati di *M* maka pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen :

1. Submodul *N* adalah submodul prima.
2. *R*-modul perkalian $M \setminus N$ tertutup terhadap perkalian (*multiplicatively closed*).
3. *R*-modul perkalian (M / N) adalah daerah integral.

Itulah beberapa hal yang dapat dijadikan kesimpulan dari keseluruhan pembahasan tulisan ini.

V. Daftar Pustaka

Adkins, W. A., and Weintraub S.H., *Algebra : An Approach via Modul Theory*, 1992, Springer Verlag, New York.

Ameri, R, , 2003, *On The Prime Submodules Of Multiplication Modules*, International journal of Mathematics and mathematical Sciences, 27, 1715-1725.

Ash, R. B. , *Abstract Algebra: The Basic Graduate Year,* 2000, New York.

Dauns, J., 1978, *Prime modules*, J.Reine Angew.Math., 298, 156-181.

Fraleigh, J. B., *A First Course in Abstract Algebra*, 1994, Addison-Wesley Publishing Company inc., New York.

Rotman, J. J., *Advanced Modern Algebra*, 2003, Prentice Hall, New York.

Tekir, U, , *On Multiplication Modules*, 2007, International Mathematical Forum, 29, 1415 – 1420.