

## OPTIMISASI KONVEKS: KONSEP-KONSEP

Caturiyati<sup>1</sup> dan Himmawati Puji Lestari<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

<sup>1</sup> waturiyati@yahoo.com

<sup>2</sup> himmawatipl@yahoo.com

### Abstrak

Pada masalah optimisasi konveks terdapat berbagai konsep yang menjadi latar belakang. Paper ini akan mengulas konsep-konsep tersebut sehingga dapat mempermudah dalam mempelajari masalah optimisasi konveks. Pada bagian awal akan diuraikan konsep-konsep mengenai himpunan konveks, dilanjutkan dengan fungsi konveks, fungsi kuasikonveks, dan dipungkasi dengan masalah optimisasi konveks. Pada paper ini hanya diuraikan konsep-konsepnya saja.

**Kata kunci:** himpunan konveks, fungsi konveks, fungsi kuasikonveks, optimisasi konveks

### PENDAHULUAN

Masalah optimisasi konveks merupakan masalah optimisasi yang dikenakan pada himpunan konveks secara umum. Salah satu contoh masalah optimisasi konveks adalah masalah pemrograman linear (Luenberger, 1984). Dewasa ini telah banyak dikembangkan dan aplikasi masalah optimisasi konveks di berbagai disiplin ilmu, terutama teknik dan ekonomi, baik yang linear maupun non linear (Ben-Tal and Nemirovski, 2001).

Diberikan masalah optimisasi sebagai berikut:

Meminimalkan  $f_0(x)$

dengan kendala  $f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$

$$h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p.$$

dengan  $x$  adalah vektor variabel keputusan, dan fungsi  $f_0, f_i$ , dan  $h_i$  berturut-turut adalah fungsi biaya, fungsi kendala ketaksamaan, dan fungsi kendala persamaan. Namun, bila variabel keputusan  $x$  sangat banyak, maka sulit untuk menyelesaikan masalah tersebut.

Alasannya adalah:

1. Masalah mungkin penuh dengan optimal lokal,
2. Akan sangat sulit menentukan titik layak (yaitu suatu  $x$  yang memenuhi semua persamaan dan ketaksamaan), faktanya himpunan solusi dapat kosong,
3. Kriteria penghentian digunakan dalam algoritma optimisasi umum seringkali berubah-ubah,
4. Algoritma optimisasi kemungkinan mempunyai sangat sedikit rata-rata kekonvergenan,
5. Masalah numerik dapat menyebabkan algoritma meminimumkan berhenti semua bersamaan.

Jika semua  $f_i$  konveks, dan  $h_i$  affine, maka tiga masalah pertama hilang: suatu optimum lokal adalah optimum global; kelayakan masalah optimisasi konveks dapat ditentukan tanpa ada ambiguitas paling tidak dalam hal prinsip; dan kriteria penghentian yang sangat mirip dengan menggunakan dualitas. Namun, rata-rata kekonvergenan dan pembahasan sensitivitas numerik tetap menjadi masalah yang potensial.

**PEMBAHASAN**

**1. Himpunan Konveks**

Dalam bagian ini akan diuraikan beberapa hal penting mengenai himpunan konveks dan operasinya, yang sebagian besar disarikan dari Luenberger, 1969, Mangasarian, 1994.

Penting untuk dicatat bahwa beberapa himpunan ini mempunyai representasi berbeda. Mengambil representasi yang tepat dapat membuat perbedaan antara masalah *tractable* dan *intractable*.

Yang akan diperhatikan di sini hanya masalah optimisasi dengan variabel keputusan adalah vektor dalam  $R^n$  atau matriks  $R^{m \times n}$ . Suatu fungsi  $f: R^n \rightarrow R^m$  adalah affine jika mempunyai bentuk linear ditambah konstanta  $f(x) = Ax + b$ . Jika  $F$  adalah matriks fungsi nilai, yaitu,  $F: R^n \rightarrow R^{p \times q}$ , maka  $F$  affine jika mempunyai bentuk

$$F(x) = A_0 + x_1A_1 + \dots + x_nA_n$$

dengan  $A_i \in R^{p \times q}$ . Fungsi affine kadangkala disebut sebagai masalah linear.

$S \subseteq R^n$  adalah subruang jika memuat bidang yang melalui sebarang dua titik dan origin, yaitu,  
 $x, y \in S, \lambda, \mu \in R \implies \lambda x + \mu y \in S$ .

Dua representasi umum dari subruang adalah sebagai jangkauan matriks

$$range(A) = \{Aw | w \in R^q\} = \{w_1a_1 + \dots + w_qa_q | w_i \in R\}$$

dengan  $A = [a_1 \dots a_q]$ ; atau sebagai ruang null matriks

$$ruang\ null\ (B) = \{x | Bx = 0\} = \{x | b_1^T x = 0, \dots, b_p^T x = 0\}$$

dengan  $B = [b_1 \dots b_p]^T$ .

Suatu himpunan  $S \subseteq R^n$  affine jika memuat garis yang melalui sebarang dua titik di dalamnya, yaitu,

$$x, y \in S, \lambda, \mu \in R, \lambda + \mu = 1 \implies \lambda x + \mu y \in S$$

Secara geometrik, suatu himpunan affine adalah sebuah subruang yang tidak perlu terpusat pada origin. Dua representasi untuk himpunan affine adalah: jangkauan dari fungsi affine

$$S = \{Az + b | z \in R^q\},$$

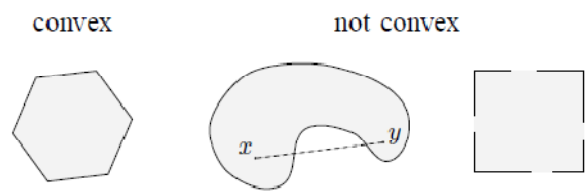
atau sebagai solusi suatu himpunan persamaan linear:

$$S = \{x | b_1^T x = d_1, \dots, b_p^T x = d_p\} = \{x | Bx = d\}.$$

Suatu himpunan  $S \subseteq R^n$  adalah himpunan konveks jika memuat ruas garis yang menghubungkan titik-titik, yaitu

$$x, y \in S, \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1 \implies \lambda x + \mu y \in S.$$

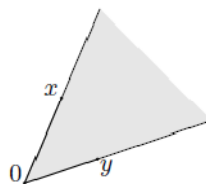
Jelaslah subruang dan himpunan affine adalah konveks.



Suatu himpunan  $S \subseteq R^n$  adalah kerucut konveks jika memuat semua sinar garis melalui titik-titik yang berasal dari origin, serta ruas garis yang menghubungkan sebarang titik pada sinar-sinar tersebut, yaitu,

$$x, y \in S, \lambda, \mu \geq 0, \implies \lambda x + \mu y \in S$$

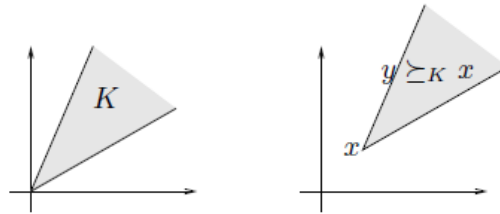
Secara geometrik,  $x, y \in S$  berarti  $S$  memuat seluruh potongan pie antara  $x$  dan  $y$ .



Suatu kerucut konveks  $K \subseteq R^n$  dikatakan proper jika tertutup, mempunyai interior tak kosong, dan pointed, yaitu, tidak terdapat garis di dalam  $K$ . Suatu kerucut proper  $K$  mendefinisikan ketaksamaan yang diperumum  $\leq_K$  di  $R^n$ :

$$x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$$

( $x <_K y \Leftrightarrow y - x \in \text{int } K$ ).

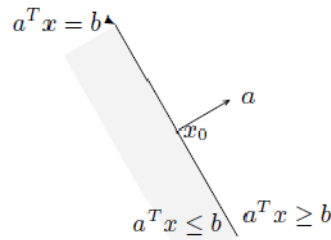


Diberikan titik-titik  $x_i \in R^n$  dan  $\theta_i \in R$ , maka  $y = \theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$  dikatakan merupakan

- Kombinasi linear untuk sebarang bilangan real  $\theta_i$ .
- Kombinasi affine jika  $\sum_i \theta_i = 1$ .
- Kombinasi konveks jika  $\sum_i \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$ .
- Kombinasi konik jika  $\theta_i \geq 0$ .

Hull linear dari himpunan  $S$  adalah himpunan semua kombinasi linear titik-titik dari  $S$ , dan dinotasikan dengan  $\text{span}(S)$ . Secara sama didefinisikan untuk kombinasi affine, dinotasikan dengan  $\text{Aff}(S)$ , kombinasi konveks, dinotasikan dengan  $\text{Co}(S)$ , dan kombinasi Konik, dinotasikan dengan  $\text{Cone}(S)$ .

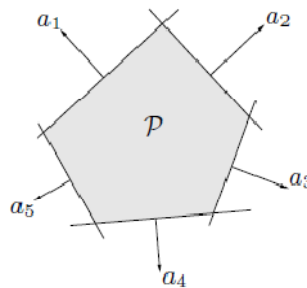
Suatu bidang hiper, dinyatakan sebagai  $\{x | a^T x \leq b\}$  ( $a \neq 0$ ), secara umum adalah himpunan affine, dan merupakan subruang jika  $b = 0$ . Representasi lain bidang hiper adalah  $\{x | a^T(x - x_0) \leq 0\}$ , dengan  $a$  adalah vektor normal dan  $x_0$  terletak pada perbatasan.



Suatu polihedron adalah irisan sejumlah berhingga setengah ruang

$$P = \{x | a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, k\} = \{x | Ax \leq b\}$$

Dengan  $\leq$  berarti ketaksamaan sepotong-sepotong.



Suatu polihedron terbatas dikatakan politop, yang juga mempunyai alternatif representasi  $P = \text{Co}\{v_1, \dots, v_N\}$ , dengan  $\{v_1, \dots, v_N\}$  adalah simpul-simpulnya.

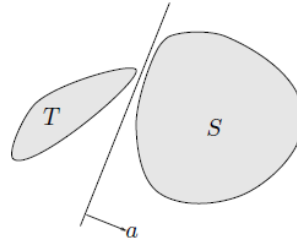
Jika  $f$  adalah suatu norma, maka bola bernorma  $B = \{x | f(x - x_c) \leq 1\}$  konveks, dan kerucut bernorma  $C = \{(x, t) | f(x) \leq t\}$  adalah kerucut konveks. Norma yang paling umum adalah norma  $l_p$  pada  $R^n$ :

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p} & ; p \geq 1, \\ \max_i |x_i| & ; p = \infty \end{cases}$$

Dua sifat yang membantu menggambarkan himpunan konveks secara geometri:

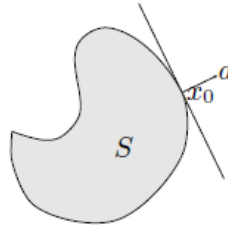
1. Teorema bidang hiper pemisah (separating hyperplane theorem)

Jika  $S, T \subseteq R^n$  konveks dan saling asing ( $S \cap T = \emptyset$ ), maka terdapat suatu bidang hiper  $\{x|a^T x - b = 0\}$  yang memisahkan keduanya.



2. Teorema bidang hiper penyokong (supporting hyperplane theorem)

Terdapat suatu bidang hiper pada setiap titik di perbatasan himpunan konveks, yang bidang hiper penyokong  $\{x|a^T x = a^T x_0\}$  menyokong  $S$  pada  $x_0 \in \partial S$  jika  $x \in S \Rightarrow a^T x \leq a^T x_0$ .

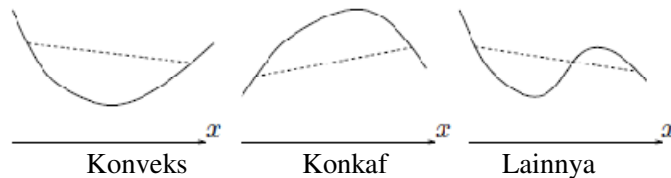


## 2. Fungsi Konveks (Luenberger, 1969, Mangasarian, 1994)

Suatu fungsi  $f: R^n \rightarrow R$  konveks jika domainnya  $dom f$  adalah konveks dan untuk semua  $x, y \in dom f, \theta \in [0,1]$

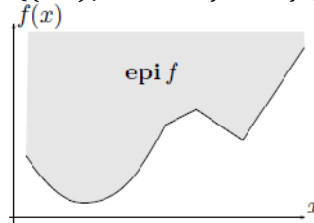
$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y);$$

$f$  konkaf jika  $-f$  konveks.



Epigraf suatu fungsi  $f$  adalah

$$epi f = \{(x, t) | x \in dom f, f(x) \leq t\}$$



Himpunan sublevel- $\alpha$  suatu fungsi  $f$  adalah

$$S_\alpha \triangleq \{x \in dom f | f(x) \leq \alpha\}$$

Bentuk dari definisi dasar kekonvekskan, maka jika  $f$  fungsi konveks jika dan hanya jika epigrafnya,  $epi f$  adalah himpunan konveks. Berlaku juga jika  $f$  konveks, maka himpunan-himpunan sublevel  $S_\alpha$  konveks.

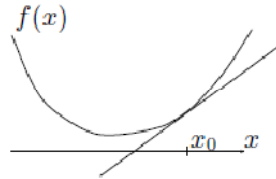
Kekonvekskan fungsi terdiferensial  $f: R^n \rightarrow R$  juga dapat ditentukan dengan syarat gradiennya  $\nabla f$  dan Hessian  $\nabla^2 f$ . Secara umum, gradien adalah pendekatan Taylor order pertama pada  $x_0$ :

$$f(x) \simeq f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0)$$

Dimiliki kondisi order pertama berikut:  $f$  konveks jika dan hanya jika untuk semua  $x, x_0 \in dom f$ ,

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0),$$

yaitu pendekatan order pertama dari  $f$  global terhadap estimator.



Dalam bentuk epigraf dari  $f$ : untuk semua  $(x, t) \in epif$ ,

$$\begin{bmatrix} \nabla f(x_0)^T \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ t - f(x_0) \end{bmatrix} \leq 0,$$

yaitu,  $(\nabla f(x_0)^T, -1)$  mendefinisikan bidang hiper penyokong untuk  $epif$  pada  $(x_0, f(x_0))$ .

Hessian dari  $f$ ,  $\nabla^2 f$ , memenuhi ekspansi deret Taylor order kedua sekitar  $x_0$ :

$$f(x) \simeq f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T \nabla^2 f(x_0)(x - x_0)$$

Kondisi perlu dan cukup order kedua: suatu fungsi yang terdiferensial dua kali konveks jika dan hanya jika untuk semua  $x \in dom f$ ,  $\nabla^2 f(x) \succeq 0$ , yaitu Hessiannya semidefinit positif pada domainnya.

### 3. Fungsi Kuasikonveks (Luenberger, 1969, Mangasarian, 1994)

Suatu fungsi  $f: R^n \rightarrow R$  adalah kuasikonveks jika setiap himpunan sublevel  $S_\alpha = \{x \in dom f | f(x) \leq \alpha\}$  adalah konveks. Catatan jika  $f$  konveks, maka otomatis  $f$  kuasikonveks. Fungsi kuasikonveks dapat mempunyai daerah datar lokal.

$f$  kuasikonkaf jika  $-f$  kuasikonveks, yaitu himpunan superlevel  $\{x | f(x) \geq \alpha\}$  konveks. Suatu fungsi yang merupakan fungsi kuasikonveks dan kuasikonkaf disebut kuasilinear.

Fungsi kuasikonveks mempunyai banyak fitur sama dengan fungsi konveks, namun juga sejumlah perbedaan penting. Sifat-sifat kuasikonveks berikut membantu dalam menentukan kekuasikonvekskan:

1.  $f$  kuasikonveks jika dan hanya jika  $f$  kuasi konveks pada garis, yaitu  $f(x_0 + th)$  kuasikonveks dalam  $t$  untuk setiap  $x_0, h$
2. Modifikasi Ketaksamaan Jensen:  $f$  kuasikonveks jika dan hanya jika untuk setiap  $x, y \in dom f, \theta \in [0, 1]$ ,

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \max\{f(x), f(y)\};$$

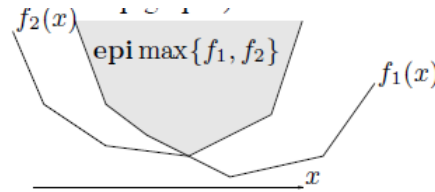
3. Untuk  $f$  terdiferensial,  $f$  kuasikonveks  $\Leftrightarrow$  untuk semua  $x, y \in dom f$

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow (y - x)^T \nabla f(x) \leq 0$$

4. Perkalian positif

$f$  kuasikonveks,  $\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha f$  kuasikonveks.

5. Supremum sepotong-sepotong:  $f_1, f_2$  kuasikonveks  $\Rightarrow \max\{f_1, f_2\}$  kuasikonveks. (merupakan perluasan ke supremum atas sebarang himpunan).



6. Transformasi affine dari domain,  $f$  kuasikonveks  $\Rightarrow f(Ax + b)$  kuasikonveks.
7. Transformasi fraksional linear dari domain,  $f$  kuasikonveks  $\Rightarrow f\left(\frac{Ax+b}{c^T x+d}\right)$  kuasikonveks pada  $c^T x + d > 0$ .
8. Komposisi dengan fungsi naik monoton:  $f$  kuasikonveks,  $g$  monoton naik  $\Rightarrow g(f(x))$  kuasikonveks.
9. Jumlahan fungsi kuasikonveks secara umum bukan fungsi kuasikonveks.
10.  $f$  kuasikonveks dalam  $x, y \Rightarrow g(x) = \inf_y f(x, y)$  kuasikonveks dalam  $x$ .

#### 4. Masalah Optimisasi Konveks (Bazarrá, Sherali, and Shetty, 1993)

Pada bagian ini dibahas mengenai formulasi masalah optimisasi secara umum. Pandang masalah optimisasi dalam bentuk standar berikut ini:

Meminimumkan  $f_0(x)$

dengan kendala  $f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$

$$h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$$

dengan  $f_i, h_i: R^n \rightarrow R; x$  adalah variabel optimisasi;  $f_0$  adalah fungsi tujuan atau fungsi biaya;  $f_i(x) \leq 0$  adalah kendala ketaksamaan. Secara geometri, masalah ini berhubungan dengan meminimumkan  $f_0$ , atas suatu himpunan yang dideskripsikan sebagai irisan himpunan sublevel-0 dari  $f_i, \forall i$  dengan wilayah dideskripsikan oleh himpunan solusi-0 dari  $h_i, \forall i$ .

Titik  $x$  adalah layak jika memenuhi kendala-kendala; himpunan layak  $C$  adalah himpunan semua titik layak; dan masalah adalah layak jika terdapat titik layak. Masalah dikatakan tak terbatas jika  $m = p = 0$ . Nilai optimal dinotasikan dengan  $f^* = \inf_{x \in C} f_0(x)$ , dan  $f^* = +\infty$  jika masalah tak layak. Titik  $x \in C$  adalah titik optimal jika  $f(x) = f^*$  dan himpunan optimal adalah  $X_{opt} = \{x \in C | f(x) = f^*\}$ .

Secara implisit kendala dapat dinyatakan sebagai:  $x \in \text{dom } f_i, x \in \text{dom } h_i$ , yaitu  $x$  harus berada di dalam himpunan

$$D = \text{dom } f_0 \cap \dots \cap \text{dom } f_m \cap \text{dom } h_1 \cap \dots \cap \text{dom } h_p$$

yang disebut dengan domain masalah.

Suatu masalah layak adalah kasus khusus dari masalah standar, yang merupakan pencarian sebarang titik layak. Maka masalah sesungguhnya adalah

- Mencari  $x \in C$
- Atau menentukan  $C = \emptyset$ .

Secara ekuivalen, masalah layak adalah masalah yang menyelesaikan sistem persamaan atau ketaksamaan

$$f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$$

$$h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$$

atau menentukan bahwa masalah tak konsisten.

Suatu masalah optimisasi dalam bentuk standar adalah masalah optimisasi konveks jika  $f_0, f_1, \dots, f_m$  semuanya konveks, dan  $h_i$  semuanya affine:

Meminimumkan  $f_0(x)$

dengan kendala  $f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$

$$a_i^T x - b_i = 0, i = 1, \dots, p.$$

Masalah ini sering dituliskan dalam bentuk

Meminimumkan  $f_0(x)$   
dengan kendala  $f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$   
 $Ax = b.$   
dengan  $A \in R^{p \times n}$  dan  $b \in R^p.$

Masalah optimisasi konveks mempunyai tiga sifat penting yang membuat masalah ini menjadi lebih baik daripada masalah optimisasi non konveks yaitu:

1. Tidak ada peminimal lokal: sebarang optimum lokal merupakan optimum global.
2. Deteksi ketaklayakan pasti: menggunakan teorema dualitas, algoritma menjadi lebih mudah ditentukan.
3. Metode solusi numerik efisien dalam menentukan masalah yang sangat besar.

Untuk memahami keoptimalan global dalam masalah konveks, pandang bahwa  $x \in C$  adalah optimal lokal jika memenuhi

$$y \in C, \|y - x\| \leq R \Rightarrow f_0(y) \geq f_0(x)$$

untuk suatu  $R > 0$ . Suatu titik  $x \in C$  optimal global berarti bahwa

$$y \in C \Rightarrow f_0(y) \geq f_0(x).$$

Untuk masalah optimisasi konveks, sebarang solusi lokal juga solusi global.

**Bukti:**

Misalkan  $x$  optimal lokal, namun terdapat  $y \in C$ , dengan  $f_0(y) < f_0(x)$ . Maka dapat diambil langkah kecil dari  $x$  ke  $y$  yaitu  $z = \lambda y + (1 - \lambda)x$  dengan  $\lambda > 0$  kecil. Maka  $z$  dekat dengan  $x$ , dengan  $f_0(z) < f_0(x)$  yang kontradiksi dengan optimal lokal.

Terdapat juga syarat order satu untuk menentukan keoptimalan masalah optimisasi konveks. Misalkan  $f_0$  terdiferensial, maka  $x \in C$  optimal jika dan hanya jika

$$y \in C \Rightarrow \nabla f_0(x)^T (y - x) \geq 0.$$

Sehingga  $-\nabla f_0(x)$  mendefinisikan bidang hiper penyokong untuk  $C$  pada  $x$ . Artinya jika bergerak dari  $x$  sepanjang  $y$  layak yang lain,  $f_0$  tidak turun.

**KESIMPULAN**

Dalam paper ini direview beberapa hal penting dalam masalah himpunan konveks, fungsi konveks dan masalah optimisasi konveks.

**DAFTAR PUSTAKA**

Bazarra, M.S., Sherali, H.D., and Shetty, C.M. 1993. *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms.* John Wiley and Sons. Second Edition.

Ben-Tal, A. And Nemirovski, A. 2001. *Lectures on Modern Convex Optimization. Analysis, Algorithms, and Engineering Applications.* Society for Industrial and Applied Mathematics.

Luenberger, D.G. 1969. *Optimization by Vector Space Methods.* John Wiley and Sons.

-----, 1984. *Linear and Nonlinear Programming.* Addison-Wisley, second edition.

Mangasarian, O. 1994. *Nonlinear Programming.* Society for Industrial and Applied Mathematics.

