PELABELAN JUMLAH EKSKLUSIF PADA GRAF TANGGA L_n

Debby Sanjaya, Petter John, Muhammad Haryono

Program Magister, Departemen Matematika, Universitas Indonesia, Indonesia

Abstrak

Suatu graf terhubung disebut graf jumlah, sebagaimana yang dikemukakan oleh Harary [1] tahun 1990, jika terdapat suatu pelabelan jumlah L dari V ke himpunan bilangan bulat positif yang berbeda S; xy $\in$ E jika dan hanya jika terdapat suatu simpul w$\in$V sedemikian sehingga berlaku L(w) = L(x) + L(y) $\in$ S. Dalam kasus ini *w* disebut simpul bekerja. L menjadi pelabelan jumlah ekslusif jika graf G tidak mengandung simpul bekerja. Banyak minimum dari simpul terisolasi yang ditambahkan ke graf G sehingga labelnya eksklusif disebut bilangan jumlah eksklusif, dinotasikan dengan ε (G). Pada makalah ini akan ditunjukkan konstruksi pelabelan jumlah eksklusif graf tangga yang memilik $\varepsilon(L_n) = 3$ untuk $n \geq 3$

Kata kunci: pelabelan jumlah eksklusif, graf tangga

PENDAHULUAN

Suatu pelabelan jumlah L dari graf G adalah pemetaan dari himpunan simpul di G ke himpunan bilangan bulat positif yang berbeda sedemikian sehingga *x* dan *y* bertetangga jika dan hanya jika terdapat vertek lain pada graf dengan label L(x) + L(y). Suatu simpul yang labelnya adalah jumlah dari label dua simpul yang lain di G disebut simpul bekerja

Sembarang graf G dapat dibuat menjadi graf jumlah dengan menambahkan satu atau lebih dari simpul terisolasi, jika diperlukan. Simpul dengan label tertinggi tidak dapat dihubungkan dengan simpul lain. Lebih lanjut, graf jumlah akan memiliki paling sedikit satu simpul terisolasi. Bilangan terkecil dari banyak vertek terisolasi yang diperlukan untuk membuat graf G suatu graf jumlah disebut bilangan jumlah graf G, dinotasikan dengan σ (G).

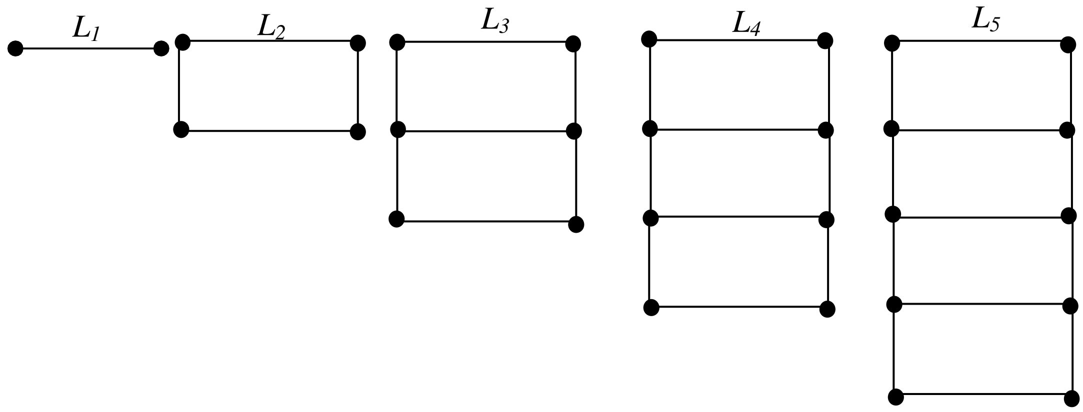
Sejak Harary [1] memperkenalkan konsep graf jumlah di tahum 1990, peneliti – peneliti telah menemukan keberhasilan pelabelan jumlah dari beberapa jenis graf. Tetapi ide membuat pelabelan eksklusif ditahun 2005 sebagai perluasan dari pelabelan jumlah oleh Miller, dkk [3]

Pelabelan jumlah L dari graf G disebut eksklusif jika tidak terdapat simpul bekerja di G. Bilangan jumlah pada jenis pelabelan ini disebut bilangan eksklusif dan dinotasikan dengan ε(G).

Motivasi menemukan pelabelan jumlah eksklusif baru dan sebagai persyaratan untuk pembelajaran pelabelan graf, pada makalah ini dibahas pelabelan jumlah eksklusif untuk graf tangga L_n. Bilangan jumlah eksklusif $\varepsilon(L_n)$ akan diberikan sebagai kesimpulan.

Pelabelan Jumlah Eksklusif untuk Graf Tangga L_n

Graf tangga L_n adalah graf sederhana tak berarah dengan simpul 2n dan n + 2(n – 1) busur. Graf tangga L_n didefinisikan sebagai produk kartesian dari K_2 dan P_n. Ketika dibentuk kelihatan seperti tangga dengan *n* anak tangga . Dengan cara yang sama kita dapat mengatakan bahwa terdapat dua himpunan dari simpul P_n pada setiap sisi tangga dan kedua sisi dari tangga dihubungkan dengan anak tangga. Gambar 2.1 menunjukkan graf tanggan L_n dengan $n \leq 5$



Gambar 2.1 Graf L_1, L_2, L_3, L_4, dan L_5

Pelabelan eksklusif untuk graf L_1 dapat dipandang sebagai pelabelan jumlah eksklusif untuk graf lintasan P_2. Arti lain dari L_2 sama dengan graf lingkaran C_4. Selanjutnya untuk pelabelan berikut diasumsikan bahwa $n \geq 3$

Sebelum membentuk pelabelan untuk graf tangga perlu ditentukan batasan bilangan jumlah ekskluisf. Misal derajat maksimum dari simpul pada graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Miller ,dkk [3] mengamati bahwa $\varepsilon(G) \geq \Delta(G)$ untuk sembarang graf G.

Pada graf tangga L_n, dengan $n \geq 3$, $\Delta(L_n) = 3$. Sehingga diperoleh lemma berikut.

Lemma 1. Untuk $n \geq 3$, $\varepsilon(L_n) \geq 3$.

Untuk mengkonstruksi suatu pelabelan eksklusif graf tanggan L_n (V, E), simpul – simpul V dibagi dua barisan yang terdiri dari simpul – simpul { $v_1, v_2, ..., v_n$} dan { $u_1, u_2, ... u_n$} dimana setiap simpul berurutan dihubungkan dan $v_iu_i \in E$ untuk $1 \leq i \leq n$. Setiap barisan mewakili satu sisi dari tangga. Labe simpul sebagai berikut, untuk $1 \leq i \leq n$,

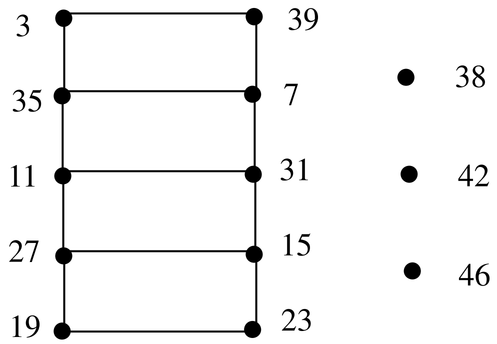
$$v_i = \begin{cases} x + d(i-1) & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ x + d(2n-i) & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$
$$u_i = \begin{cases} x + d(2n-i) & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ x + d(i-1) & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

dengan d adalah bilangan bulat genap positif dan x adalah bilangan bulat ganjil positif dengan $x \geq \frac{d}{2}$. Pola pelabelan ini mengikuti barisan aritmatikan $v_1, u_2, v_3, u_4, \ldots v_4, u_3, v_2, u_1$ dengan suku pertama x dan beda d .

Sekarang kita menghitung jumlah masing – masing pasangan simpul yang saling bertetangga.

1. $v_i + v_{i+1} = \begin{cases} 2x + 2d(i-1) & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2x + 2dn & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$
2. $u_i + u_{i+1} = \begin{cases} 2x + 2dn & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2x + 2d(i-1) & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$
3. $v_i + u_i = 2x + d(2n-1)$

Dapat dilihat bahwa ketiga jumlah berbeda, hal itu mensyaratkan ketiganya merupakan simpul terisolasi dengan label $2x + 2d(n-1)$, $2x + 2nd$, dan $2x + d(2n-1)$. Berdasarkan Lemma 1 pelabelan ini merupakan pelabelan jumlah eksklusif optimal pada graf L_n. Gambar 2.2 menunjukkan contoh pelabelan jumlah eksklusif untuk L_5 dengan x =3 dan d = 4.



Gambar 2.2 : Pelabelan jumlah eksklusif pada graf L_5

Semua simpul – simpul pada graf tanggal L_n dilabel dengan bilangan ganjil. Lebih lanjut tidak ada simpul yang simpulnya merupakan dapat dijumlah dari label dua simpul dari graf tangga. Dan juga tidak ada label simpul pada graf tangga dapat dijumlahkan dari dua label dari simpul terisolasi,karena semua simpul terisolasi dilabel dengan bilangan genap. Sekarang, perlu diperhatikan bahwa label simpul terkecil dari graf tangga adalah x dan label terkecil dari simpul terisolasi adalah $2x + 2d(n-1)$. Dengan batasan $x > \frac{d}{2}$ didapatkan bahwa jumlah dari satu label simpul dari graf tangga dan satu label dari simpul terisolasi melebihi label simpul terbesar dari graf tangga, yaitu $x + d(2n-1)$.

$$x > \frac{d}{2}$$
$$2x - d > 0$$
$$(2x-d) + \big(x + (2n-1)\big) > x + d(2n-1)$$
$$x + (2x - 2d(n-1) > x + d(2n-1)$$

Sehingga tidak ada simpul dari graf tangga yang dapat menjadi simpul bekerja. Sekarang diketahui dengan jelas bahwa simpul – simpul terisolasi adalah simpul bekerja dalam pelabelan ini. Semua label simpul bekerja adalah genap, oleh karena itu tidak dapat menjadi jumlah dari label simpul bekerja dan label simpul pada tangga, yang mana ganjil. Ini artinya bahwa semua simpul pada tangga dan simpul terisolasi tidak terhubung. Perhatikan bahwa pola tiga label dari simpul terisolasi merupakan barisan naik arirmatika, $2x + 2d(n-1)$, $2x + d(2n-1)$, dan $2x + 2dn$. Dengan perhitungan sederhana dapat ditemukan bahwa jumlah dua label terkecil tidak sama dengan label terbesar. Sehingga, dapat dikatakan tidak ada busur antara simpul – simpul terisolasi, atau

$$2x + 2d(n-1)) + (2x + d(2n-1) \neq 2x + 2dn$$

Akhirnya, akan ditunjukkan bahwa tidak ada penambahan busur antara simpul – simpul terisolasi. Ada empat kasus untuk diperiiksa

1. Tidak ada penambahan busur antara v_i dan v_j jika i dan j berada pada paritas berbeda.

   Misalkan bahwa v_i dan v_j terhubung. Jika i dan j berada pada paritas berbeda, maka penambahan label dari v_i dan v_j akan memberikan hasil $i + j = 2n$, $i + j = 2n + 1$, atau $i + j = 2n + 2$. Hal ini kontradiksi dengan $i, j \leq n$

2. Tidak ada penambahan busur antara v_i dan v_j jika i dan j berada pada paritas sama.

   Jika i dan j berada pada paritas sama, jumlah dari v_i dan u_j adalah

   $$v_i + u_j = \begin{cases} 2x + d(2n + i - j - 1) & \text{untuk } i, j \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n + i - j - 1) & \text{untuk } i, j \text{ genap} \end{cases}$$

   Hanya ketika $i = j$ maka jumlah $v_i + v_j$ ada sebagai label dari satu simpul bekerja

3. Tidak ada penambahan antara v_i dan v_j jika i dan j tidak berurutan

   Jumlah dari v_i dan u_j haruslah salah satu dari hasil berikut

$$v_i + v_j = \begin{cases} 2x + d(i + j - 2) & \text{untuk } i, j \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n - i - j) & \text{untuk } i, j \text{ genap} \\ 2x + d(2n + i - j - 1) & \text{untuk } i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \\ 2x + d(2n - i + j - 1) & \text{untuk } i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \end{cases}$$

   Simpul $w = v_i + v_j$ merupakan simpul bekerja hanya ketika i dan j tidak berurutan
4. Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan tidak ada penambahan busur antara u_i dan u_j jika i dan j tidak berurutan.

Disini, dibuktikan bahwa simpul – simpul terisolasi menunjukkan tidak mengakibatkan penambahan busur.

Kita baru saja membuktikan bahwa pelabelan dari L_n adalah pelabelan jumlah eksklusif yang disimpulkan dalam teorema berikut.

Teorema 2. Bilangan jumlah eksklusif dari graf tangga adalah $\varepsilon(L_n) = 3$, untuk $n \geq 3$.

KESIMPULAN

Melalui pelabelan yang disampaikan di makalah ini, disimpulkan bahwa sembarang graf tangga L_n adalah graf jumlah eksklusif dengan bilangan jumlah eksklusifnya adalah tiga

UCAPAN TERIMAKASIH

Terimakasih kepada Ibu Kiki A. Sugeng, yang telah memperkenalkan, mengarahkan, memberi semangat, dan mendukung dari awal sampai akhir kepada kami untuk mengembangkan pemahaman dari masalah yang diberikan. Akhirnya, kami mengucapkan penghargaan yang setinggi – tingginya kepada semua pihak yang telah mendukung kami dalam menyelesaikan paper ini.

DAFTAR PUSTAKA

[1] F. Harary, Sum graph and difference graph, *Congressus Numerantium* 72.(1990) 101-108

[2] F. Harary, Sum graphs over all the integers, *Discrete Mathematics* 124 (1994) 99-105

[3] M. Miller, Patel, Ryan, A. Sugeng, Slamin and Mauritius Tuga, Excluisve sum labeling of graph, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 55 (2005) 137-148