

SIMULASI *GRANULAR DYNAMICS* DIMENSI DUA PARTIKEL DENGAN UKURAN BERVARIASI

Moh. Hasan

Jurusan Matematika – FMIPA – Universitas Jember

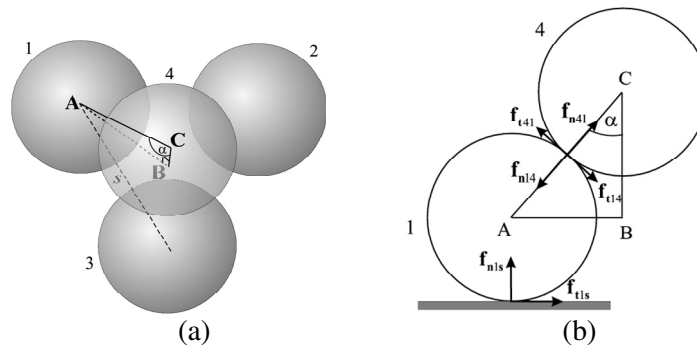
Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji aspek dinamik dan statik dari proses deposisi partikel dengan ukuran bervariasi. Simulasi dilakukan dengan menerapkan model *Granular Dynamics* yang berupa persamaan diferensial order dua sebagai representasi gaya tumbukan secara simultan antara suatu partikel dengan partikel-partikel disekelilingnya. Persamaan tersebut diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Gear Predictor-Corrector (GPC) orde empat. Hasil penelitian menunjukkan bahwa berbeda dengan proses deposisi partikel dengan ukuran sama (monodisperse materials), dinamika proses deposisi partikel dengan ukuran bervariasi (polydisperse materials) tidak didominasi oleh *surface avalanche* maupun *internal landslide*. Kajian mengenai aspek statik menunjukkan bahwa struktur dari gundukan (pile) tidak berbentuk *close packed* dan bentuk jaringan gaya tidak teratur.

Kata kunci: *Granular dynamics*, deposisi partikel, Metode *Predictor-Corrector*

PENDAHULUAN

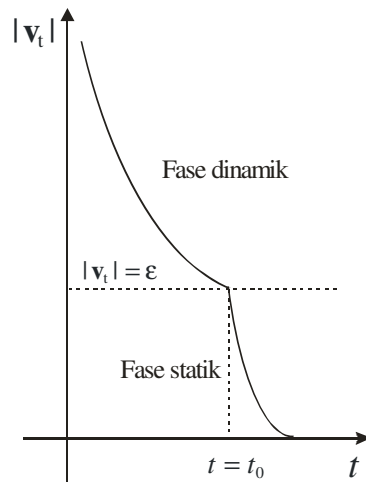
Dalam kehidupan sehari-hari banyak dijumpai aktifitas yang melibatkan partikel/material butiran (granular materials), misal penimbunan (deposisi) pasir. Pada proses tersebut, seiring dengan berjalannya waktu, partikel dapat bergerak setelah itu berhenti (stabil) sebagai akibat adanya gaya (gaya gesekan). Partikel pada posisi stabil dapat bergerak lagi (dinamik) setelah mendapatkan gaya tumbukan dengan partikel lain. Tumbukan antar partikel dan gaya yang bekerja diilustrasikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Tumbukan partikel (a) dan gaya yang bekerja (b)

Gambar 1a mengilustrasikan kejadian tumbukan antara partikel 1, 2, dan 3, yang diam diatas permukaan, dengan partikel 4, yang dijatuhkan secara simetris. Gambar 1b menjelaskan secara skematik tumbukan yang terjadi antara partikel 1 dan 4, dan antara partikel 1 dengan permukaan lantai. Dari Gambar 1b dapat dilihat bahwa gaya tumbukan terdiri atas gaya normal dan gaya gesekan (tangensial). Fokus kajian umumnya diarahkan pada gaya gesekan. Hal ini dapat dimaklumi karena tantangan yang menarik adalah memecahkan permasalahan ketidakjelasan gaya gesekan (gaya Coulomb) pada fase statik. Disisi lain, pada simulasi dinamik kejelasan gaya gesekan ini mutlak diperlukan.

Hasan dan van Opheusden (2007) mengajukan model gaya tumbukan yang mengakomodasikan fenomena “stick-slip”. Model tersebut telah berhasil mendeskripsikan fenomena *multiple transisition* kelakuan partikel pada proses deposisi partikel, yakni dari dinamik ke statik dan dari statik ke dinamik. Mirip dengan yang dikembangkan oleh Matuttis *et al* (2000), dalam fase statik digunakan spring bayangan, namun pada model ini mengikutsertakan faktor redaman. Selanjutnya, pemberlakuan fase statik tidak didasarkan pada terjadinya tumbukan, melainkan pada kriteria ambang batas (disebut “kriteria ε ”) sebagai berikut: (i) ketika harga mutlak dari kecepatan relatif pada arah tangensial kurang dari ε , fase statik berlaku (Gambar 2). Jika sebaliknya, diterapkan fase dinamik. Ketika gaya spring melebihi batasan gaya Coulomb, spring dilepaskan dan fase dinamik berlaku. Selama dalam fase statik, gaya gesekan diberikan oleh spring dengan redaman, sedangkan pada fase dinamik, gaya gesekan proporsional terhadap gaya normal.



Gambar 2. Ilustrasi transisi gerak (fase dinamik ke fase statik)

Model gaya gesekan tersebut dirumuskan dalam bentuk

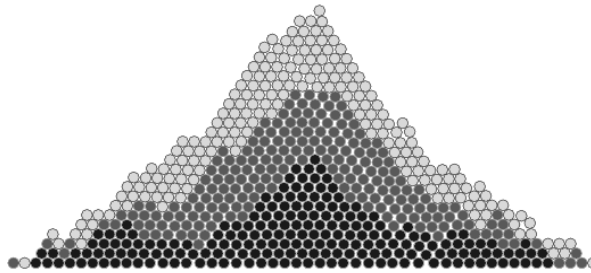
$$\mathbf{f}_t = \begin{cases} -(k_t \boldsymbol{\delta}_t + \gamma_t \mathbf{v}_t), & |\mathbf{v}_t| \leq \varepsilon \text{ (fase statik)} \\ -\hat{\mathbf{v}}_t \mu_d |\mathbf{f}_n|, & |\mathbf{v}_t| > \varepsilon \text{ (fase dinamik)} \end{cases} \quad (1)$$

dengan γ_t , μ_s , dan μ_d masing-masing merupakan koefisien redaman, koefisien gesekan statis dan koefisien gesekan dinamis, k_t menyatakan konstanta spring, dan $\boldsymbol{\delta}_t = \int_{t_0} \mathbf{v}_t(\tau) d\tau$ merepresentasikan total simpangan pada arah gaya gesekan (tangensial) yang dibangun selama kurun waktu $t - t_0$. Dalam hal ini, t_0 menyatakan waktu mulai berlakunya fase statik.

Kemungkinan terjadinya osilasi dalam fase statik dihindari dengan menerapkan redaman kritis, *i.e.*, $\gamma_t = 2\sqrt{mk_t}$. Pada permulaan fase dinamik kecepatan partikel relatif kecil. Untuk menghindari sistem masuk kembali ke fase statik, gaya gesekan dirancang berlawanan dengan kecepatan ketika mengaplikasikan “ ε ”. Selama kecepatan terus meningkat fase dinamik tetap dipertahankan. Pada transisi dari fase statik ke dinamik, spring bayangan ditiadakan seluruhnya, sehingga semua informasi tentang arah dan besaran pada spring terhapus dari memori. Kesederhanaan model ini adalah bahwa selain “ ε ” dipenuhi, sistem hanya menerapkan gaya

gesekan dinamik yang bebas dari faktor kecepatan. Model yang juga bebas dari kecepatan digunakan oleh Baxter *et al* (1997) dan Zhou *et al* (2001), tetapi keduanya menerapkan spring bayangan secara berbeda dengan persamaan (1).

Model pada persamaan (1) telah digunakan untuk menyimulasikan proses deposisi koin berbentuk lingkaran dengan ukuran seragam (monodisperse materials). Salah satu contoh hasil simulasi penimbunan partikel pada dimensi dua disajikan dalam Gambar 3. Pada simulasi tersebut sekelompok partikel (3 kelompok) diberi warna yang berbeda. Dari Gambar 3 terlihat bahwa bentuk gundukannya mendekati bentuk segitiga, dengan partikel yang dijatuhkan belakangan dapat menduduki posisi paling bawah dengan mendesak partikel yang dijatuhkan sebelumnya menjauh kesamping.



Gambar 3. Hasil simulasi dua dimensi

Pada sistem yang menggunakan koin dengan ukuran sama, setiap partikel memiliki jari-jari yang sama. Akibatnya, penentuan kriteria terjadinya tumbukan juga sama, yakni apabila jarak antara pusat partikel i dan j (d_{ij}) kurang dari diameter, σ ($d_{ij} < \sigma$). Disamping itu, suatu partikel kemungkinan dapat bertumbukan sebanyak-banyaknya dengan 6 buah dan 12 buah partikel masing-masing untuk dimensi dua dan dimensi tiga, yakni ketika struktur partikel dalam kondisi *close packed*, seperti terlihat pada beberapa bagian Gambar 3.

Kenyataannya, dalam proses deposisi, ukuran partikel yang digunakan bervariasi, sehingga kriteria terjadinya tumbukan juga bervariasi. Konsekuensinya, Kalkulasi penentuan gaya tumbukan juga semakin panjang karena kriteria tumbukan tersebut harus dihitung pada setiap individu partikel. Demikian juga dengan jumlah partikel yang mungkin akan bertumbukan bisa lebih dari 6 buah untuk sistem dimensi dua. Namun untuk mendapatkan hasil yang lebih realistis, kajian terhadap sistem yang ukuran partikelnya bervariasi menjadi penting.

Berdasarkan uraian diatas, permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimanakah kelakuan dinamik, bentuk/struktur gundukan (pile), dan jaringan gaya (*force network*) pada deposisi partikel dengan ukuran bervariasi ?. Informasi tentang hal-hal tersebut sangat berguna untuk mendeskripsikan aspek dinamik, baik pada skala makro (misal longsoran dan patahan selama proses pembentukan gundukan) maupun pada skala mikro (misal reposisi partikel). Hasil kajian ini juga berguna untuk mendeskripsikan aspek statik yang antara lain mencakup struktur sistem, sudut kemiringan (*angle of repose*), dan jaringan gaya (*force network*).

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan kelanjutan dari penelitian yang hasilnya telah dipublikasikan sebelumnya (Hasan dan van Opheusden (2007)). Dengan demikian model Granular Dynamics yang digunakan adalah sama, yakni seperti yang dirumuskan dalam persamaan (1). Prosedur untuk solusi numerik juga sama, yakni menggunakan metode GPC orde 4. Metode tersebut terdiri atas tiga tahapan: prediksi, evaluasi, dan koreksi. Andaikan \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i , \mathbf{a}_i , \mathbf{b}_i , dan \mathbf{c}_i masing-masing merepresentasikan posisi partikel i dan turunan pertama, kedua, ketiga, dan keempat. Kalkulasi

yang harus dilaksanakan pada masing-masing tahap dijelaskan secara rinci berikut ini.

Tahap Prediksi

Memprediksi posisi partikel dan turunan-turunannya pada waktu $t + \Delta t$ menggunakan Deret Taylor orde 4 yang didasarkan pada posisi partikel dan turunan-turunannya pada waktu t . Langkah ini menghasilkan:

$$\mathbf{r}_i^P(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + a_1 \mathbf{v}_i(t) + a_2 \mathbf{a}_i(t) + a_3 \mathbf{b}_i(t) + a_4 \mathbf{c}_i(t), \quad (2a)$$

$$\mathbf{v}_i^P(t + \Delta t) = \mathbf{v}_i(t) + a_1 \mathbf{a}_i(t) + a_2 \mathbf{b}_i(t) + a_3 \mathbf{c}_i(t), \quad (2b)$$

$$\mathbf{a}_i^P(t + \Delta t) = \mathbf{a}_i(t) + a_1 \mathbf{b}_i(t) + a_2 \mathbf{c}_i(t), \quad (2c)$$

$$\mathbf{b}_i^P(t + \Delta t) = \mathbf{b}_i(t) + a_1 \mathbf{c}_i(t), \quad (2d)$$

$$\mathbf{c}_i^P(t + \Delta t) = \mathbf{c}_i(t), \quad (2e)$$

dengan $a_1 = \Delta t$, $a_2 = a_1 \Delta t / 2$, $a_3 = a_2 \Delta t / 3$, dan $a_4 = a_3 \Delta t / 4$.

Tahap Evaluasi

Mengevaluasi gaya pada setiap partikel pada waktu $t + \Delta t$ menggunakan nilai hasil prediksi. Hal ini akan memberikan besaran percepatan terkoreksi $\mathbf{a}_i^C(t + \Delta t)$ yang selanjutnya akan dibandingkan dengan percepatan hasil prediksi untuk menentukan besarnya kesalahan pada tahap prediksi, yakni:

$$\Delta \mathbf{a}_i(t + \Delta t) = \mathbf{a}_i^C(t + \Delta t) - \mathbf{a}_i^P(t + \Delta t). \quad (3)$$

Tahap Koreksi

Hasil kalkulasi pada persamaan (3) digunakan untuk mengoreksi hasil prediksi untuk mendapatkan nilai posisi dan turunan-turunannya (persamaan (2a-d)) yang lebih baik. Rumusan untuk menentukan nilai terkoreksi dari beberapa besaran dimaksud diberikan oleh:

$$\mathbf{r}_i^C(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i^P(t + \Delta t) + a_r \Delta \mathbf{a}_i(t + \Delta t), \quad (4a)$$

$$\mathbf{v}_i^C(t + \Delta t) = \mathbf{v}_i^P(t + \Delta t) + a_v \Delta \mathbf{a}_i(t + \Delta t), \quad (4b)$$

$$\mathbf{b}_i^C(t + \Delta t) = \mathbf{b}_i^P(t + \Delta t) + a_b \Delta \mathbf{a}_i(t + \Delta t), \quad (4c)$$

$$\mathbf{c}_i^C(t + \Delta t) = \mathbf{c}_i^P(t + \Delta t) + a_c \Delta \mathbf{a}_i(t + \Delta t), \quad (4d)$$

dengan $a_r = (19/90)a_2$, $a_v = (3/4)a_2/a_1$, $a_b = (1/2)a_2/a_3$, dan $a_c = (1/12)a_2/a_4$.

Meskipun model dan prosedur numerik sama dengan kasus *monodisperse materials*, namun penyelesaian kasus *polydisperse materials*, masih memerlukan modifikasi terhadap *software* (program dalam Bahasa Fortran). Modifikasi dimaksud antara lain terkait dengan rumusan kriteria tumbukan antar partikel dan penerapannya dilaksanakan pada setiap iterasi. Modifikasi juga perlu dilaksanakan dalam *updating* array daftar tetangga (*neighbourlist*) dari setiap partikel. Setelah modifikasi *software*, dilaksanakan simulasi terhadap model dengan bervariasi karakteristik partikel, antara lain faktor kelentingan dan kekasaran permukaan partikel.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

a. Modifikasi Software

Berbeda dengan model MD yang sering menggunakan *periodic boundary condition* (PBC) dalam memprediksikan trayektori partikel, model GD menggunakan *real boundary condition*. Disamping itu, model GD memperhitungkan gravitasi bumi sebagai salah satu gaya yang bekerja pada partikel, sehingga dalam GD gaya yang bekerja pada partikel terdiri atas gaya gravitasi bumi

dan gaya tumbukan. Ketika partikel i bertumbukan dengan partikel j , maka gaya tumbukan yang bekerja pada kedua partikel tersebut (Gambar 1b) mencakup gaya normal dan gaya tangensial (gesekan). Gaya normal pada partikel i diberikan oleh:

$$\mathbf{f}_{nij} = -k_n \delta_{nij} - \gamma_n \mathbf{v}_{nij}, \quad (5)$$

dengan δ_{nij} dan \mathbf{v}_{nij} masing-masing menotasikan kompresi dan kecepatan relatif normal terhadap permukaan terjadinya tumbukan, k_n dan γ_n menyatakan kontanta kekenyalan material dan damping. Sedangkan rumusan model gaya gesekan diberikan dalam persamaan (1). Dengan demikian gaya yang bekerja pada partikel i diberikan oleh:

$$\mathbf{f}_i = m\mathbf{g} + \sum_{\text{kontak}} (\mathbf{f}_{nij} + \mathbf{f}_{ij}), \quad (6)$$

dengan \mathbf{f}_i = total gaya partikel i , m = massa partikel i , dan \mathbf{g} = gaya gravitasi. Total gaya tumbukan tersebut merupakan resultan dari seluruh kemungkinan kontak antara partikel i dengan partikel lainnya. Persamaan (6) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{g} + \frac{1}{m} \sum_{\text{kontak}} (\mathbf{f}_{nij} + \mathbf{f}_{ij}). \quad (7)$$

Persamaan (7) merupakan persamaan diferensial biasa order 2. Namun karena unsur kedua pada ruas kanan merupakan akumulasi dari gaya tumbukan, maka cukup sulit mendapatkan solusi analitiknya, sehingga solusi secara numerik merupakan alternatif solusi tersebut.

Ingredient utama dari metode GPC orde 4 adalah resultan gaya yang bekerja pada setiap partikel yang mencakup gaya gravitasi dan gaya tumbukan. Penentuan gaya tumbukan memiliki porsi terbesar dari keseluruhan kalkulasi karena pada setiap iterasi diperlukan identifikasi terhadap semua kemungkinan terjadinya tumbukan antara satu partikel dengan partikel-partikel lainnya. Andaikan suatu sistem memiliki sebanyak n partikel, maka terdapat sebanyak $(n-1)$ partikel yang harus di cek apakah partikel-partikel tersebut akan bertumbukan dengan partikel i . Dengan demikian pada setiap iterasi harus dilakukan $(n-1)^2$ kali pengecekan/pencarian, sehingga untuk sebanyak k iterasi, perhitungan gaya dilakukan sebanyak $k(n-1)^2$.

b. Simulasi dan Analisis

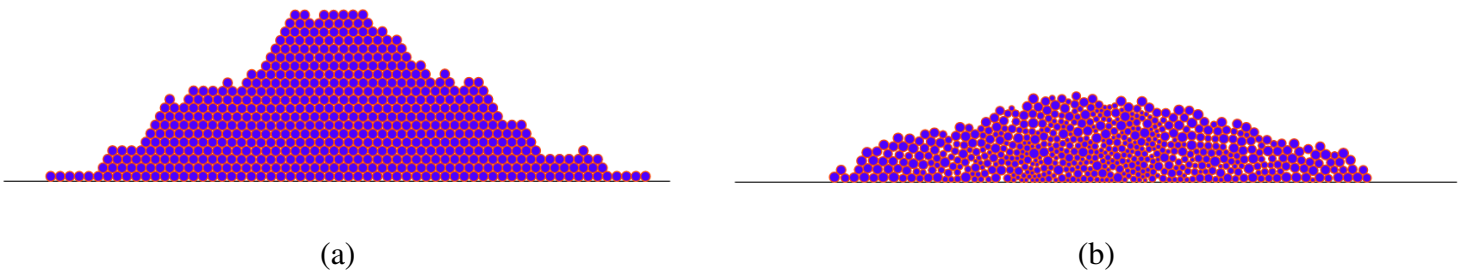
Pada kasus *monodisperse* telah ditunjukkan bahwa *software* yang dihasilkan cukup valid untuk mengaproksimasi solusi proses deposisi koin dan/atau bola. Dengan demikian hasil modifikasi *software* tersebut untuk kasus *polydisperse* juga diyakini cukup valid sebagai aproksimasi solusinya, untuk selanjutnya digunakan menyimulasikan proses deposisi untuk kasus *polydisperse* partikel. Simulasi dilaksanakan dengan memvariasikan karakteristik partikel dan media yang mencakup kekenyalan dan kekasaran permukaan. Sedangkan parameter yang tidak berubah adalah massa $m = 0.05$ kg, kontanta spring $k_n = k_t = 10^5$ kg/s, ambang batas kecepatan pada fase statik $\epsilon = 10^{-3}$ m/s, dan skala waktu $\Delta t = 10^{-5}$ s.

Dalam simulasi ini, proses deposisi partikel dilaksanakan dengan menjatuhkan partikel satu persatu dari suatu ketinggian tertentu, h . Dengan demikian, besaran yang tidak nol dari konfigurasi awal sistem hanyalah kecepatan awal, \mathbf{v}_0 , yang nilainya ditentukan secara random. Secara umum, kajian terhadap simulasi proses deposisi material difokuskan pada dua substansi kajian, yakni aspek dinamik (dinamika proses deposisi) dan aspek statik (struktur partikel setelah sistem dalam keadaan stabil). Untuk mendapatkan hasil pengukuran yang *reliable*, untuk suatu sistem, pengulangan terhadap perlakuan dilaksanakan sebanyak lima kali. Pengulangan tersebut dilakukan dengan memvariasikan kecepatan awal melalui variasi “seed” dalam membangun bilangan random. Analisis hasil simulasi disajikan secara singkat sebagai berikut.

Aspek Dinamik

Observasi terhadap simulasi proses deposisi 600 *monodisperse* partikel dan *polydisperse* partikel (ukuran partikel yang digunakan dibangun secara random dengan ukuran diameter, terendah adalah 0,02 m dan tertinggi 0,05 m) yang dijatuhkan pada suatu hamparan dimensi dua menunjukkan bahwa adanya perbedaan kelakuan dinamik antara kedua sistem tersebut. Pada sistem *polydisperse*, jarang terjadi *surface avalanche* maupun *internal landslide*. Hal ini disebabkan karena partikel dengan ukuran yang lebih kecil cenderung masuk ke bawah melalui celah diantara partikel yang berukuran lebih besar. Akibatnya, pada bagian tengah gundukan didominasi oleh partikel-partikel berukuran kecil, dan partikel yang berukuran besar terdesak ke bagian/lapisan luar, sehingga gundukan yang dibangun oleh sistem *polydisperse* umumnya lebih pendek dibandingkan dengan sistem *monodisperse* seperti ditunjukkan dalam Gambar 4.

Aspek Statik

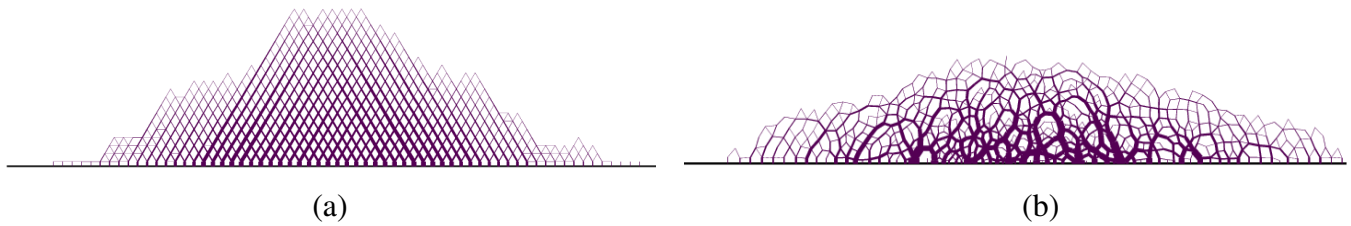


Gambar 4. Hasil simulasi 600 partikel pada sistem *monodisperse* (a) dan *polydisperse* (b)

Penerapan model gaya tumbukan persamaan (7) untuk menyimulasikan proses deposisi tidak selamanya menghasilkan gundukan. Karakteristik partikel yang digunakan menjadi faktor yang cukup signifikan dalam menentukan hasil simulasi; untuk partikel yang tingkat kekasaran permukaannya kecil, partikel mudah *sliding* dan tersebar pada hamparan sehingga gundukan seperti pada Gambar 4 tidak dapat terbentuk. Terbentuknya gundukan dimungkinkan jika koefisien gesekan lebih dari 0.15.

Dari Gambar 4 terlihat bahwa gundukan yang dihasilkan oleh sistem *monodisperse* dan sistem *polydisperse* berbeda; *angle of repose* pada sistem yang pertama (Gambar 4a) lebih besar dibandingkan dengan sistem yang kedua (Gambar 4b). Struktur gundukan yang dihasilkan juga berbeda; pada sistem *monodisperse*, struktur gundukannya cukup teratur mendekati *close packed structure*, sedangkan pada sistem *polydisperse*, strukturnya tidak teratur dan banyak rongga didalamnya. Sistem yang seperti ini justru banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, misal struktur tanah.

Secara intuitif, dari gundukan-gundukan tersebut dapat diduga bahwa partikel-partikel yang berada dibawah menanggung beban yang jauh lebih berat dibandingkan dengan partikel yang ada di bagian atas. Analisis terhadap gaya normal masing-masing individu partikel menghasilkan suatu jaringan gaya (*force network*). Gambar 5 merupakan *force network* dari gundukan yang dihasilkan pada sistem *monodisperse* dan *polydisperse* yang disajikan pada Gambar 4; Gambar 5a dan 5b masing-masing bersesuaian dengan Gambar 4a dan 4b. Dari Gambar 5a terlihat bahwa *force network* untuk sistem *monodisperse* membentuk pola yang teratur, yakni didominasi oleh bangun jajaran genjang (*diamond*), sedangkan *force network* untuk sistem *polydisperse* tidak membentuk mempunyai keteraturan pola. Tebal garis pada *force network* tersebut mengindikasikan besarnya gaya. Dari Gambar 5 tersebut terlihat bahwa pada bagian bawah didominasi oleh garis tebal,



Gambar 5. *Force network* pada sistem *monodisperse* (a) dan *polydisperse* (b)

sebaliknya pada bagian atas didominasi oleh garis tipis. Dengan kata lain, gambar tersebut memberikan informasi bahwa intuisi yang menyatakan bahwa partikel bagian bawah menanggung beban yang besar adalah benar.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil simulasi yang telah dibahas sebelumnya dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. selama proses deposisi berlangsung, mekanisme dinamika pembentukan gundukan pada sistem *monodisperse* didominasi oleh *surface avalanche*, sedangkan pada sistem *polydisperse*, selain *surface avalanche*, pembentukan gundukan juga ditentukan oleh *internal arrangement* dari partikel yang berukuran relatif kecil;
2. sistem *monodisperse* menghasilkan gundukan dengan *angle of repose* lebih besar dibandingkan dengan sistem *polydisperse*;
3. pada sistem *monodisperse* struktur partikelnya mendekati *close packed structure* sehingga pola *force network*-nya didominasi oleh bangun jajaran genjang, sedangkan pada sistem *polydisperse* struktur partikelnya tidak teratur (banyak rongga didalamnya) sehingga pola *force network*-nya tidak teratur.

Hasil penelitian ini telah dapat menjelaskan kelakuan dinamik selama deposisi partikel berlangsung dan struktur gundukan (mencakup *angle of repose* dan *force network*) yang terbentuk setelah proses deposisi selesai. Hasil simulasi juga telah dapat menunjukkan adanya perbedaan kelakuan dinamik dan struktur gundukan antara sistem *monodisperse* dan *polydisperse* partikel. Namun demikian, model gaya yang digunakan masih belum mengakomodasi gaya rotasi, sehingga masih perlu dikembangkan model *Granular Dynamics* yang lebih realistis.

DAFTAR PUSTAKA

- Baxter, J., Tuzun, U., Burnell, J. & Heyes, D.M., 1997. Granular dynamics simulations of two-dimensional heap formation, *Phys. Rev. E* **55**.
- Hasan, M. & van Opheusden, 2007, A model for Static and dynamic phenomena in deposition process, *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, **2**.
- Matuttis, H.G., Luding, S. & Herrmann, H.J., 2000. Discrete element simulations of dense packing and heaps made of spherical and non-spherical particles, *Powder Technology*. **109**.
- Zhou, Y.C., Xu, B.H. dan Yu, A.B., 2001. Numerical investigation of the angle of repose of monosized spheres, *Phys. Rev. E* **64**.

