Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA,
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 14 Mei 2011

ENUMERASI DIGRAF TIDAK ISOMORFIK

Mulyono

Jurusan Matematika FMIPA UNNES
Email: arifahsaptari@yahoo.co.id

Abstrak

Digraf tidak isomorfik yang dimaksud pada tulisan ini adalah digraf sederhana yang tidak isomorfik yang dibentuk dari *n* titik. Kajian ini merupakan penggabungan antara aljabar abstrak dengan teori graf. Aljabar abstrak dengan teorema Polya-nya digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi digraf sederhana. Tulisan ini memaparkan teknik menghitung banyaknya digraf yang tidak isomorfik dengan teorema Polya. Berdasarkan kajian pada digraf sederhana ini diperoleh hasil: ada 3 digraf yang tidak isomorfik untuk 2 titik, ada 16 digraf yang tidak isomorfik untuk 3 titik, dan ada 218 digraf yang tidak isomorfik untuk 4 titik.

Kata kunci: enumerasi, digraf sederhana, teorema Polya, digraf tidak isomorfik

PENDAHULUAN

Masalah enumerasi yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah masalah enumerasi yang berhubungan dengan perhitungan banyaknya digraf sederhana yang tidak isomorfis antara digraf sederhana satu dengan yang lainnya. Digraf sederhana di sini adalah digraf yang tidak mempunyai sisi paralel dan loop.

Pada dasarnya tulisan ini merupakan penggabungan dua bidang ilmu yaitu antara bidang aljabar (abstrak) dan bidang teori graf, artinya aljabar abstrak melalui teorema Polya akan digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi pada digraf sederhana. Teorema Polya ditemukan oleh George Polya (1887-1985), seorang ahli berkebangsaan Hungaria yang berimigrasi ke Amerika Serikat pada tahun 1940. Teorema Polya dibagi menjadi dua yaitu: Teorema Polya I dan II. Teorema Polya I menjelaskan tentang banyaknya orbit yang berbeda dari himpunan berhingga X terhadap grup yang beraksi. Grup yang beraksi/bertindak pada himpunan X memiliki pengertian suatu grup yang dapat diterapkan pada himpunan X dengan dikenai suatu aksi tertentu. Teorema Polya II selain menjelaskan banyaknya orbit yang berbeda juga menjelaskan bentuk/jenis orbit yang berbeda tersebut. Permasalahan enumerasi yang akan dibahas pada tulisan ini adalah: bagaimana enumerasi digraf tak isomorfik dari digraf sederhana dengan menggunakan Teorema Polya.

PEMBAHASAN

Definisi dan Teorema pada Aljabar yang Mendukung Teorema Polya

Berikut beberapa definisi dan teorema yang terkait dengan teorema Polya.

Definisi 1 Grup

Himpunan $G \neq \emptyset$ dengan operasi $*$ yang didefinisikan padanya disebut Grup $\langle G,* \rangle$, bila memenuhi syarat:

1. $\forall x, y \in G, x * y \in G$ (sifat tertutup terhadap operasi $*$)
2. $\exists e \in G,$ sehingga $x * e = e * x = x, \forall x \in G$ (ada elemen identitas *e*).
3. $\forall x \in G\ \exists x^{-1} \in G$ sehingga $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ (setiap elemen di G mempunyai invers).
4. $\forall x, y, z \in G, x * (y * z) = (x * y) * z$ (sifat asosiatif)

Definisi 2 Permutasi

Permutasi pada himpunan *A* adalah fungsi $\emptyset: A \to A$ yang bijektif.

Definisi 3 Grup Simetri

Jika $A = \{1,2,3,\ldots,n\}$ maka grup yang memuat semua permutasi dari A dinamakan grup simetri pada n unsur dan simbolkan dengan S_n. Grup simetri S_n memuat elemen sebanyak $n!$.

Definisi 4 Orbit, Penstabil, dan Karakter Permutasi

Apabila *G* adalah subgrup dari grup simetri S_n dan untuk $x \in X$, maka:

1. $Gx = \{g(x): g \in G\}$ yaitu himpunan semua bayangan elemen $x \in X$ oleh permutasi *g* di *G*. *Gx* disebut orbit *x* terhadap *G*.
2. $G_x = \{g \in G: g(x) = x\}$ adalah himpunan semua permutasi di *G* yang mengakibatkan *x* sebagai titik tetap. Himpunan G_x disebut penstabil *x* di *G*.
3. $F(g) = \{z \in X: g(z) = z\}$ adalah himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi $g \in G$. Himpunan $F(g)$ disebut karakter permutasi *g* di himpunan *X*.

Definisi 5 Grup Berhingga

Grup *G* disebut grup berhingga jika memiliki sejumlah berhingga anggota. Banyaknya anggota dalam grup *G* disebut order *G* dan disimbolkan dengan $|G|$.

Definisi 6 Koset

Jika *H* adalah subgrup dari grup *G* dan *g* adalah anggota *G* maka:
$gH = \{gh: h \in H\}$ disebut koset kiri dari *H* yang memuat *g* dan
$Hg = \{hg: h \in H\}$ disebut koset kanan dari *H* yang memuat *g*.

Definisi 7 Kelas

Kumpulan dari himpunan koset kiri (kanan) *H* yang berbeda dari grup *G* akan membentuk partisi grup *G*, yaitu:

1. Setiap anggota *G* akan berada paling sedikit pada satu koset kiri (kanan) *H*
2. Dua koset kiri (kanan) yang berbeda tidak memiliki anggota yang sama.

Partisi yang mempunyai sifat seperti ini disebut *kelas*.

Teorema 1 Kardinalitas

Jika *H* adalah subgrup dari grup *G* dan $|H| = k$ maka setiap koset kiri (kanan) *H* memiliki kardinalitas *k*.

Teorema 2 Lagrange

Order grup berhingga dapat dibagi oleh order sembarang grup bagiannya.

Teorema 3 Orbit-Penstabil

Jika *X* adalah *G*-Set dan $x \in X$ maka :

1. $\forall x \in X, |Gx|.|G_x| = |G|$
$$\Leftrightarrow |Gx| = \frac{|G|}{|G_x|}$$
2. $\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |F(g)|$

Teorema 4 Teorema Burnside - Frobenius

Misal *G* adalah grup permutasi yang beraksi pada *X* dengan *G* dan *X* adalah hingga. Jika *k* adalah banyaknya orbit di *X* pada *G*, maka:

$$k.|G| = \sum_{g \in G} |F(g)|$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

Definisi 8 Cycle

Suatu permutasi $\sigma \in S_n$ dinamakan cycle apabila σ paling banyak mempunyai 1 orbit yang memuat elemen lebih dari 1. Panjang cycle didefinisikan sebagai banyaknya elemen dalam orbit terbesar.

Definisi 9 Indeks Siklik

Diberikan *G* adalah grup permutasi dengan order *m* dari suatu himpunan yang banyak anggotanya *n* dan $g \in G$ bertipe cycle $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$. Indeks siklik *g* didefinisikan sebagai: $Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = {x_1}^{a_1} {x_2}^{a_2} {x_3}^{a_3} \dots {x_n}^{a_n}$
dan indeks siklik grup *G* didefinisikan:

$$Z(G; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} Z(g; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Definisi 10 Pewarnaan

Fungsi *f* dari himpunan berhingga *X* ke himpunan *Y* disebut pewarnaan *X*. Himpunan berhingga *Y* disebut warna, sedangkan himpunan semua jenis pewarnaan *X* terhadap warna *Y* disebut himpunan *C*. Dua pewarnaan $f, g \in C$ disebut ekivalen (tak dapat dibedakan) terhadap grup *G*, grup permutasi di *X* jika $\exists \pi \in G$ sehingga $f(x) = g(\pi(x))$ untuk $\forall x \in X$.

Definisi 11 Pola

Kelas-kelas ekivalen yang mempartisi himpunan *C* dengan relasi tak dapat dibedakan disebut pola-pola di *C* terhadap grup *G*.

Definisi 12 Persediaan Pola (Pattern Inventory/PI)

Misalkan fungsi bobot w memetakan himpunan *Y* ke sebuah himpunan $r = \{w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r)\}$.
Persediaan pola *C* terhadap grup *G* adalah:

$$PI(G; w(y_1), w(y_2), \dots, w(y_r)) = \sum_{n_1 + n_{2 \dots} + n_r = n} K(n_1, n_2, \dots, n_r)[w(y_1)]^{n_1} [w(y_2)]^{n_2} \dots [w(y_r)]^{n_r}$$

$K(n_1, n_2, n_3, \dots, n_r)$ adalah koefisien yang menyatakan banyaknya pewarnaan yang dapat dibedakan (banyak pola) sehingga warna $w(y_1)$ bersesuaian dengan n_1 anggota, $w(y_2)$ bersesuaian dengan n_2 anggota,…, dan $w(y_r)$ bersesuaian dengan n_r anggota.

Teorema 5 π' Permutasi dan G' Grup

Diberikan $C = \{f \mid f: X \to Y\}$ dan *X*,*Y* adalah himpunan berhingga, juga diketahui bahwa *G* adalah grup permutasi yang beraksi pada *X*. Untuk tiap $\pi \in G$ didefinisikan pemetaan π' dari C ke C dengan sifat:
$\pi'(f(x)) = f(\pi(x))$ untuk $\forall x \in X$ dan $\forall f \in C$, maka berlaku bahwa:

1. π' adalah permutasi di C.
2. $G' = \{\pi' : \pi \in G\}$ adalah grup

Teorema 6 (Teorema Polya I)

Diberikan $C = \{f \mid f : X \to Y\}$ dengan $|X| = n \geq 2$ dan $|Y| = r$. Jika *G* merupakan grup permutasi yang beraksi pada *X* dengan indeks siklik $Z(G;\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ maka banyaknya pola di *C* terhadap *G* adalah $Z(G; r, r, r, \dots, r)$.

Teorema 7 (Teorema Polya II)

Persediaan pola warna, $PI(G; w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r))$ adalah merupakan indeks siklik dari $Z(G;\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ pada
$x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \dots + [w(y_r)]^i$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$.

Penerapan Teorema Polya pada Digraf Sederhana

Apabila *n* titik pada digraf sederhana *G* dikenai permutasi, maka $n(n-1)$ pasangan titik terurut (artinya *ij* $\neq$ *ji*) dari himpunan titik tersebut juga mengalami permutasi. Dalam hal ini pasangan terurut pada suatu himpunan dapat dipandang sebagai *sisi*, yang ujung-ujungnya adalah pasangan titik tersebut.

Jika himpunan permutasi pada titik-titik suatu digraf sederhana membentuk grup simetri yaitu S_n, maka permutasi dari pasangan titik-titik (sisi) juga membentuk grup simetri yaitu E_n. Jadi grup S_n (permutasi titik pada digraf) akan membangkitkan grup E_n (permutasi sisi pada digraf). Berdasarkan Teorema Polya ini dibuat digraf sederhana yang tidak isomorfik. Berikut akan dibahas bagaimana menentukan banyak digraf sederhana yang tidak isomorfik untuk 2 titik, 3 titik, dan 4 titik.

1. Digraf sederhana dengan $n = 2$ titik

Diketahui digraf sederhana *G* dengan himpunan titik $V = \{1,2\}$. Misal S_2 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan V, maka banyaknya anggota dari S_2 adalah $2! = 1.2 = 2$. Seluruh bentuk hasil perkalian cycle yang saling asing dari grup S_2 yaitu:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2)$$
$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12)$$

Permutasi pada dua titik suatu digraf sederhana membentuk grup simetri yaitu S_2, maka permutasi dari pasangan titik-titik (sisi) juga membentuk grup simetri yaitu E_2. Jadi grup S_2 (permutasi titik pada digraf) dengan $g \in S_2$ akan membangkitkan grup E_2 (permutasi sisi pada digraf) dengan $g' \in E_2$. Pasangan titik-titik (sisi) yang mungkin terbentuk dari dua titik adalah $n(n-1) = 2(2-1) = 2$ buah, yaitu 12 dan 21 (12 artinya sisi berarah dari titik 1 ke titik 2 dan 21 artinya sisi berarah dari titik 2 ke titik 1).

Diperoleh hasil kali cycle di E_2 adalah sebagai berikut:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2) \to g_1' = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 12 & 21 \end{pmatrix} = (12)(21)$$
$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12) \to g_2' = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 21 & 12 \end{pmatrix} = (12\ 21)$$

Tipe cycle dan indeks siklik dari anggota-anggota E_2 yaitu:

(1). Untuk $g'_1 \in E_2$ tipe cyclenya yaitu $[2,0]$ dan indeks sikliknya $y_1{}^2 y_2{}^0 = y_1{}^2$.

(2). Untuk $g'_2 \in E_2$ tipe cyclenya yaitu $[0,1]$ dan indeks sikliknya $y_1{}^0 y_2{}^1 = y_2$.

Sehingga indeks siklik dari E_2 adalah

$$Z(E_2; y_1, y_2) = \frac{1}{m} \sum_{g' \in G} Z(g'; y_1, y_2)$$
$$= \frac{1}{2}[Z(g_1'; y_1, y_2) + Z(g_2'; y_1, y_2)]$$
$$= \frac{1}{2}[{y_1}^2 + y_2 \quad] \qquad \ldots\ldots. \quad (1)$$

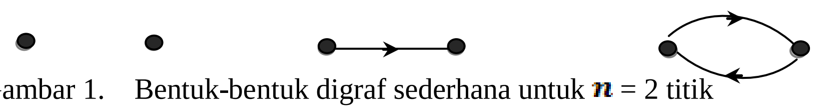
Ada dua keadaan yang mungkin terjadi di antara dua titik. Keadaan tersebut adalah
(1). Keadaan tidak ada sisi berarah antara dua titik
(2). Keadaan ada sisi berarah antara dua titik
Jika r adalah keadaan yang mungkin terjadi di antara dua titik maka, $r = 2$. Dari persamaan (1) diperoleh $y_1 = y_2 = 2$, dan berdasarkan Teorema Polya I diperoleh

$$Z(E_2; 2{,}2) = \frac{1}{2}[2^2 + 2]$$
$$= 3$$

Jadi banyaknya digraf tak isomorfik yang terbentuk dari dua titik ada sebanyak 3 graf.
Jika keadaan-keadaan di antara dua titik diberi bobot w, maka
(1). $w(z_1) =$ keadaan tidak ada sisi berarah antara dua titik.
(2). $w(z_2) =$ keadaan ada sisi berarah antara dua titik.
Misal $w(z_1) = T \; dan \; w(z_2) = A$.
Berdasarkan Teorema Polya II, indeks siklik dari E_2 dengan mensubsitusikan
$y_1 = [w(z_1)] + [w(z_2)] = [T + A]$, dan $y_2 = [w(z_1)]^2 + [w(z_2)]^2 = [T^2 + A^2]$ menjadi

$$Z(E_2; y_1, y_2) = \frac{1}{2}[{y_1}^2 + y_2 \quad]$$
$$= \frac{1}{2}[[T + A]^2 + [T^2 + A^2]]$$
$$= [T^2 + TA + A^2].$$

Artinya dari $n = 2$ titik akan dihasilkan 1 digraf tanpa sisi, 1 digraf dengan 1 sisi , dan 1 digraf dengan 2 sisi.



Gambar 1. Bentuk-bentuk digraf sederhana untuk n = 2 titik yang tak isomorfik

2. Digraf sederhana dengan $n = 3$ titik

Diketahui digraf sederhana G dengan himpunan titik $V = \{1,2,3\}$. Misal S_3 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan V, maka banyaknya anggota dari S_3 adalah $3! = 1.2.3 = 6$. Seluruh bentuk hasil perkalian cycle yang saling asing dari grup S_3 yaitu:

$g_1 = (1)(2)(3)$	$g_2 = (1)(23)$
$g_3 = (13)(2)$	$g_4 = (12)(3)$
$g_5 = (123)$	$g_6 = (132)$

Permutasi pada tiga titik suatu digraf sederhana membentuk grup simetri yaitu S_3, maka permutasi dari pasangan titik-titik (sisi) juga membentuk grup simetri yaitu E_3. Jadi grup S_3 (permutasi titik pada digraf) dengan $g \in S_3$ akan membangkitkan grup E_3 (permutasi sisi pada digraf) dengan $g' \in E_3$. Pasangan titik-titik (sisi) yang mungkin terbentuk dari tiga titik adalah

$n(n-1) = 3(3-1) = 6$ buah, yaitu $12, 13, 23, 21, 31, dan\ 32$. Diperoleh hasil kali cycle di E_3 adalah sebagai berikut:

$$g_1' = (12)(13)(23)(21)(31)(32) \qquad g_4' = (12\ \ 21)(13\ \ 23)(31\ \ 32)$$
$$g_2' = (12\ \ 13)(23\ \ 32)(21\ \ 31) \qquad g_5' = (12\ 23\ 31)(13\ 21\ 32)$$
$$g_3' = (12\ \ 32)(13\ \ 31)(23\ \ 21) \qquad g_6' = (12\ 31\ 23)(13\ 32\ 21)$$

Tipe cycle dan indeks siklik dari anggota-anggota E_3 yaitu

(1). Untuk $g_1' \in E_3$ mempunyai tipe cycle $[6,0,0,0,0,0]$ dengan indeks sikliknya adalah $y_1{}^6 y_2{}^0 y_3{}^0\ y_4{}^0 y_5{}^0 y_6{}^0 = y_1{}^6$.

(2). Untuk $g_2' \in E_3$ mempunyai tipe cycle $[0,3,0,0,0,0]$ dengan indeks sikliknya adalah $y_1{}^0 y_2{}^3 y_3{}^0 y_4{}^0 y_5{}^0 y_6{}^0 = y_2{}^3$.

(3). Untuk $g_3' \in E_3$ mempunyai tipe cycle $[0,3,0,0,0,0]$ dengan indeks sikliknya adalah $y_1{}^0 y_2{}^3 y_3{}^0 y_4{}^0 y_5{}^0 y_6{}^0 = y_2{}^3$.

(4). Untuk $g_4' \in E_3$ mempunyai tipe cycle $[0,3,0,0,0,0]$ dengan indeks sikliknya adalah $y_1{}^0 y_2{}^3 y_3{}^0 y_4{}^0 y_5{}^0 y_6{}^0 = y_2{}^3$

(5). Untuk $g_5' \in E_3$ mempunyai tipe cycle $[0,0,2,0,0,0]$ dengan indeks sikliknya adalah $y_1{}^0 y_2{}^0 y_3{}^2 y_4{}^0 y_5{}^0 y_6{}^0 = y_3{}^2$.

(6). Untuk $g_6' \in E_3$ mempunyai tipe cycle $[0,0,2,0,0,0]$ dengan indeks sikliknya adalah $y_1{}^0 y_2{}^0 y_3{}^2 y_4{}^0 y_5{}^0 y_6{}^0 = y_3{}^2$.

Tampak bahwa anggota-anggota S_3 yang mempunyai tipe cycle dan indeks siklik yang sama akan diubah ke anggota-anggota E_3 yang mempunyai tipe cycle dan indeks siklik yang sama pula, sehingga indeks siklik dari E_3 adalah

$$Z(E_3; y_1, y_2, \dots, y_6) = \frac{1}{m}\sum_{g' \in G} Z(g'; y_1, y_2, \dots, y_6)$$
$$= \frac{1}{6}[y_1{}^6 + y_2{}^3 + y_2{}^3 + y_2{}^3 + y_3{}^2 + y_3{}^2]$$
$$= \frac{1}{6}\left[y_1{}^6 + 3y_2{}^3 + 2y_3{}^2\right] \qquad \dots \qquad (2)$$

Ada dua keadaan yang mungkin terjadi di antara dua titik. Keadaan tersebut adalah

(1) keadaan tidak ada sisi berarah antara dua titik
(2) keadaan ada sisi berarah antara dua titik

Jika r adalah keadaan yang mungkin terjadi di antara dua titik maka, $r = 2$. Dari persamaan (2) diperoleh $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 2$, dan berdasarkan Teorema Polya I diperoleh

$$Z(E_3; y_1, y_2, y_3, \dots, y_6) = \frac{1}{6}\left[y_1{}^6 + 3y_2{}^3 + 2y_3{}^2\right]$$
$$Z(E_3; 2,2,2,2,2,2) = \frac{1}{6}[2^6 + 3.2^3 + 2.2^2]$$
$$= \frac{1}{6}[96] = 16$$

Jadi banyaknya digraf sederhana tak isomorfik yang terbentuk dari tiga titik ada sebanyak 16 buah.

Jika keadaan-keadaan di antara dua titik diberi bobot w, maka

(1) $w(z_1) =$ keadaan tidak ada sisi berarah antara dua titik.
(2) $w(z_2) =$ keadaan ada sisi berarah antara dua titik

Misal $w(z_1) = T\ dan\ w(z_2) = A$.

Berdasarkan Teorema Polya II, indeks siklik dari E_3 dengan mensubsitusikan $y_1 = [w(z_1)] + [w(z_2)] = [T + A]$, $y_2 = [[w(z_1)]^2 + [w(z_2)]^2] = [[T^2 + A^2]]$, dan $y_3 = [[w(z_1)]^3 + [w(z_2)]^3] = [[T^3 + A^3]]$ diperoleh indeks siklik E_3 yaitu

$$Z(E_3; y_1, y_2, y_3, \dots, y_6) = \frac{1}{6}\left[{y_1}^6 + 3{y_2}^3 + 2{y_3}^2\right]$$

$$Z(E_3; y_1, y_2, y_3, \dots, y_6) = \frac{1}{6}[[T + A]^6 + 3.[T^2 + A^2]^3 + 2.[T^3 + A^3]^2]$$
$$= [T^6 + T^5A + 4T^4A^2 + 4T^3A^3 + 4T^2A^4 + TA^5 + 6A^6]$$

Artinya dari $n = 3$ titik akan diperoleh: 1 digraf tanpa sisi, 1 digraf dengan 1 sisi, 4 digraf dengan 2 sisi, 4 digraf dengan 3 sisi, 4 digraf dengan 4 sisi, 1 digraf dengan 5 sisi, dan 1 digraf dengan 6 sisi.

3. Digraf sederhana dengan $n = 4$ titik

Diketahui digraf sederhana *G* dengan himpunan titik $V = \{1,2,3,4\}$. Misal S_4 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan V, maka banyaknya anggota dari S_4 adalah $4! = 1.2.3.4 = 24$. Dengan cara yang sama seperti pada digraf sederhana yang terdiri dari 2 titik dan 3 titik di atas, untuk digraf sederhana yang terdiri 4 titik ini diperoleh 218 digraf sederhana tak isomorfik yang terdiri atas: 1 digraf tanpa sisi, 1 digraf dengan 1 sisi, 5 digraf dengan 2 sisi, 13 digraf dengan 3 sisi, 27 digraf dengan 4 sisi, 38 digraf dengan 5 sisi, 48 digraf dengan 6 sisi, 38 digraf dengan 7 sisi, 27 digraf dengan 8 sisi, 13 digraf dengan 9 sisi, 5 digraf dengan 10 sisi, 1digraf dengan 11 sisi, dan 1 digraf dengan 12 sisi.

PENUTUP

Dari pembahasan di atas, diperoleh simpulan bahwa Teorema Polya I berkaitan dengan banyaknya digraf sederhana yang terdiri dari *n* titik antara satu digraf dengan digraf lainnya. Teorema Polya II berkaitan dengan banyaknya digraf sederhana yang tidak isomorfik yang terdiri dari *n* titik dan *k* garis antara digraf satu dengan digraf yang lainnya. Saran dari penulis, penelitian ini dapat dikembangkan pada pewarnaan graf.

DAFTAR PUSTAKA

Gunawan, S. 2002. Aplikasi Teorema Polya pada Enumerasi Graf Sederhana. *Integral* Vol. 8 No. 1 Hal: 1-10. Tersedia di: http://santosa.ukdw.ac.id. [20 April 2011].

Tomakin, F. Y. 2009. The Polya Theory and Permutation Groups. *Chamcuri Journal of Mathematics*. Vol. 1 No.2. Hal: 1-23. Tersedia di: http://www.math.sc.chula.ac.th/cjm [20 April 2011].

Vasudev, C. 2007. *Combinatorics and Graph Theory*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.

Wihikanwijna. 2006. *Burnside Lemma Introduksi Enumerasi Polya*. Tersedia di: http://himatika.mipa.ugm.ac.id/down/kul/BurnsidePolya.pdf. [20 April 2011].

Wilson, Robin J. & Watkins, John J. 1990. *Graphs: An Introductory Approach*. New York: John Wiley & Sons. Inc.