

---

**MODEL MATEMATIKA  
DALAM KASUS EPIDEMIK KOLERA DENGAN POPULASI KONSTAN**

**Renny, M.Si  
Program Studi Matematika  
Universitas Jenderal Soedirman**

**ABSTRAK.** Dalam paper ini dibahas tentang model penyebaran penyakit kolera, yaitu model dengan populasi konstan. Dan akan dibahas tentang berapa banyak infeksi baru yang dihasilkan jika satu infeksi dimasukkan ke populasi yang sehat serta melihat perioda infeksi dari penyakit ini. Dalam paper ini juga akan dibahas tentang bagaimana matematika dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam penyebaran penyakit kolera dalam masa epidemik.

**Pendahuluan**

Kolera merupakan penyakit diare akut yang disebabkan oleh bakteri *Vibrio Cholera*. Pada saat menginfeksi seseorang bakteri ini memproduksi *Choleratoxin* yang mengakibatkan keluarnya cairan tubuh dalam jumlah yang banyak, sehingga tanpa penanganan yang tepat, seseorang yang terjangkit oleh bakteri ini dapat meninggal. Setiap tahunnya, penyakit ini telah menyebabkan kematian bagi ratusan ribu orang diseluruh dunia. Dan merupakan salah satu penyakit yang paling menakutkan diseluruh dunia. Ketika di suatu daerah dengan tingkat sanitasi yang sangat rendah terdapat seorang penderita diare yang membawa bakteri *V.Cholera*, maka sangat mungkin sekali terjadi penyebaran bakteri *V.Cholera* di sumber air daerah setempat, sehingga dapat mengakibatkan terkontaminasinya seluruh daerah tersebut, dan akan menyebabkan kemungkinan terjadinya tiga kasus, yaitu tidak ada outbreak (bebas kolera), terjadi epidemik atau terjadi endemik diwilayah yang terjangkiti tersebut.

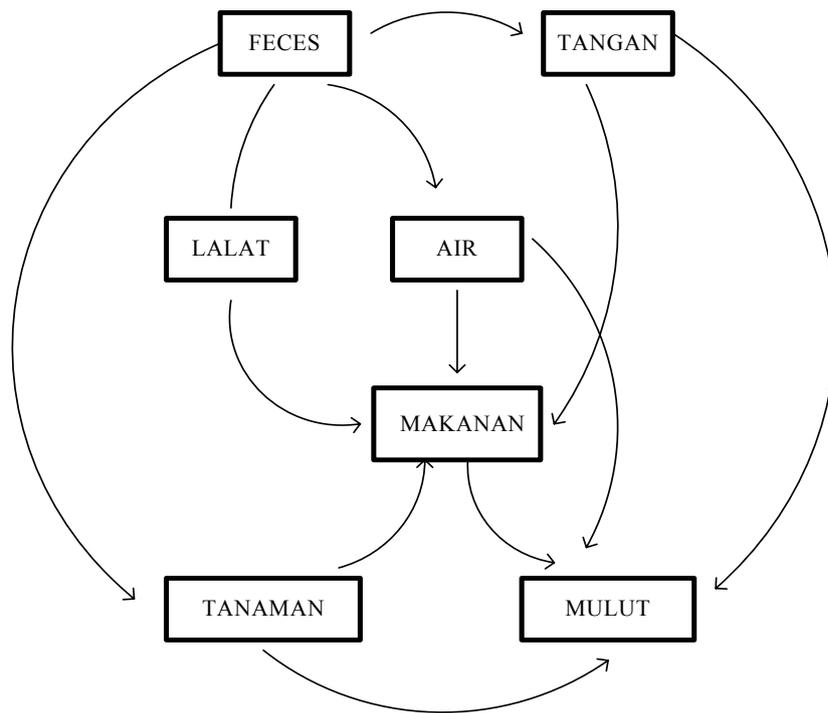
Badan Kesehatan Dunia (WHO) memperkirakan selama masa epidemik kolera 0.2 – 1 % dari penduduk diwilayah yang terjangkit wabah kolera akan mengidap penyakit ini dan mampu menularkannya kembali kependuduk lainnya. Penyakit kolera yang

terjadi pada lebih dari 90% orang tergolong ringan. Dan kurang dari 10% orang yang terinfeksi bakteri *Vibrio Cholera* berkembang menjadi penyakit yang parah. Menurut [www.chclibrary.org/micromed](http://www.chclibrary.org/micromed) tanpa penanganan yang tepat, laju kematian akibat penyakit kolera bisa mencapai 50% lebih.

### Formulasi Masalah

Kolera ditransmisikan melalui meminum air atau memakan makanan yang terkontaminasi dengan bakteri kolera. Kolera *outbreak* dapat terjadi secara sporadis diberbagai belahan dunia, dimana suplai air, sanitasi, dan higienitasnya tidak memadai. Wilayah dengan jumlah penduduk yang sangat padat dan tingkat sanitasi yang sangat rendah seringkali menjadi langganan “tempat persinggahan” bagi penyakit ini. Keadaan wilayah di Indonesia dan didukung dengan pola hidup masyarakat didaerah-daerah pinggiran yang kurang memperhatikan kesehatan lingkungan akan membuat penyebaran penyakit ini berlangsung cepat. Karena selain air yang terkontaminasi oleh bakteri *V.Cholera*, penyakit ini juga diperantarai oleh lalat. Jika lalat tersebut hinggap ditempat yang ada feces orang yang terinfeksi kolera dan kemudian terbang kemakanan yang tidak ditutup rapat, maka akan sangat mungkin sekali orang yang memakan makanan tersebut akan terjangkit kolera, dengan gejala awalnya adalah menderita diare akut. Setiap orang bisa terkena kolera, namun anak-anak lebih banyak yang meninggal akibat penyakit ini, karena mereka lebih cepat mengalami dehidrasi dibandingkan dengan orang dewasa. Tanpa penanganan yang tepat, tingkat kematian akibat penyakit ini bisa mencapai 50%. Sehingga apabila terjadi endemik kolera penanganan yang tepat dan akurat dari pemerintah merupakan hal sangat penting dilakukan.

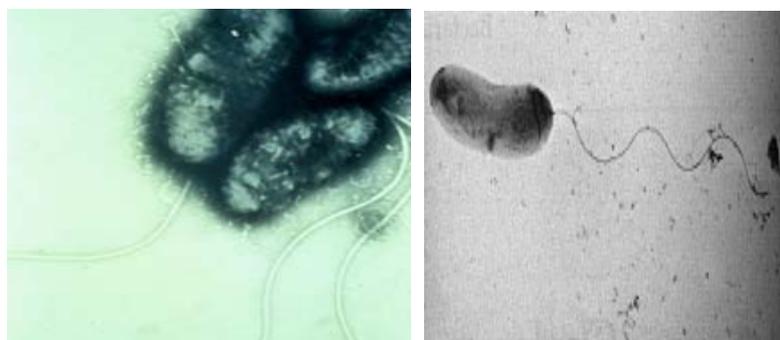
Berikut ini adalah rute transmisi dari penyakit kolera:



Gambar 1. Rute Transmisi Penyebaran Penyakit Kolera

Terlihat dalam bagan diatas, bahwa awal dari proses infeksi kolera berasal dari feces yang mengandung *V.Cholera*, dan jika seseorang tidak memperhatikan dengan sungguh-sungguh kesehatan pribadinya, maka dia dapat terinfeksi kolera melalui tangan yang kotor, ataupun makanan dan minuman yang secara tidak langsung telah mengandung *V.Cholera*.

Setelah memakan makanan yang terkontaminasi, makanan akan dicerna dilambung kemudian masuk ke usus kecil. Didalam usus kecil, bakteri *V.Cholera* akan mengikatkan diri dan tumbuh dengan subur dilingkungan alkalin didalam usus kecil.



Gambar 2. Bakteri *V.Colera*

---

Setelah sukses berkoloni didalam usus kecil, dan berhasil mengatasi sistem pertahanan tubuh host yang dimasukinya, bakteri ini mengeluarkan *cholera toxin* atau *cholera gen* dalam jumlah yang sangat besar, dan bertanggung jawab atas terjadinya diare. *Cholera toxin* adalah zat yang berupa protein. Infeksi oleh *cholera toxin* pada akhirnya akan menyebabkan keluarnya sodium klorida dari dalam tubuh bersama-sama dengan 10-12 liter air setiap harinya. Sehingga tidaklah mengherankan, orang yang terinfeksi oleh bakteri *V.Cholera* akan mengalami dehidrasi bahkan bisa menyebabkan kematian.

### Tujuan dan Manfaat

Model matematika adalah model yang menggunakan lambang-lambang (simbol) matematika atau logika untuk menyajikan perilaku objek yang akan diteliti. Model ini dapat dianggap sebagai usaha abstraksi terhadap objek melalui cara analitik atau numerik dalam bentuk persamaan-persamaan matematika. Bila telah diperoleh suatu penyelesaian maka hasil tersebut dapat digunakan sebagai alat prediksi atau kontrol terhadap objek, yang dalam hal ini adalah penyakit kolera.

Dalam paper ini dibahas tentang penyebaran penyakit kolera dalam komunitas manusia disuatu wilayah tertentu. Sehingga kita bisa melihat bagaimana matematika dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam penyebaran kolera dalam masa epidemik.

### Formulasi Model Matematika

Dalam model matematika untuk penyakit kolera ini, diamati penyebaran penyakit ini dalam suatu populasi manusia yang berukuran  $N$ . Dan dari fakta yang ada diperoleh hal-hal sebagai berikut :

1. Setiap bayi yang lahir akan lahir sehat, tidak terinfeksi oleh penyakit ini.
2. Proses menularnya penyakit dari orang yang *infektive* ke orang yang *suspektibel* terjadi akibat adanya pertemuan orang dengan orang disungai

---

yang telah terkontaminasi oleh feces yang mengandung bakteri *Vibrio Chloera*.

3. Setiap orang yang telah sembuh dari penyakit ini, akan tetap beresiko untuk terinfeksi kembali apabila mereka berhubungan baik secara langsung ataupun tidak langsung dengan orang yang masih mengidap kolera.

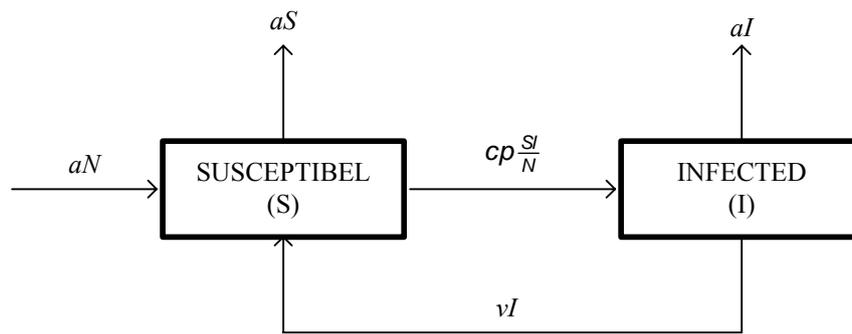
Dalam model ini, populasi manusia dibagi atas dua kompartemen, yaitu :

1. *Susceptibel (S)*, yaitu populasi manusia yang beresiko untuk terinfeksi penyakit kolera. Populasi yang suskeptibel ini menjadi tertular jika mereka menjalin kontak dengan populasi manusia yang infektid.
2. *Infected (I)*, yaitu populasi manusia yang telah terkena penyakit kolera dan mampu untuk menularkan penyakit ini ke populasi lainnya.

Untuk membangun model matematika dari penyebaran penyakit kolera, diberikan beberapa asumsi sebagai berikut :

1. Diasumsikan bahwa populasi manusia yang terdiri atas populasi  $S$  dan  $I$  adalah konstan atau dengan kata lain total populasi  $N(t) = S(t)+I(t)$  konstan.
2. Diasumsikan bahwa *laju kelahiran = laju kematian*
3. Diasumsikan bahwa semua individu dalam komunitas tersebut menggunakan sumber air yang sama (dalam hal ini menggunakan sungai) untuk melakukan berbagai aktivitas mandi, cuci dan buang air besar.
4. Kontak terjadi akibat adanya pertemuan orang dengan orang disungai yang sama dalam satu hari.

Dari asumsi diatas, digambarkan dalam diagram model sebagai berikut :



Gambar 3. Diagram Kompartemen Populasi Manusia pada Penyebaran Penyakit Kolera

Untuk memperoleh model matematikanya, terlebih dahulu akan ditelusuri dua langkah yang diperlukan, diantaranya yaitu :

- a. Memodelkan proses kontak dari penyakit
- b. Menjelaskan peluang kontak antara populasi infeksius dan susseptibel yang pada akhirnya akan melahirkan infeksi baru

Dari asumsi dan diagram populasi diatas, diketahui bahwa infeksi baru terjadi akibat adanya kontak antara populasi yang *susceptibel* dan populasi yang *infected*. Dalam hal ini kontak diartikan sebagai pertemuan antara orang dengan orang disungai yang telah terkontaminasi dalam satu hari. Bila rata-rata orang yang infeksius bertemu dengan orang yang *susceptibel* dalam satu hari adalah  $c$ , dan proporsi orang yang *susceptibel* dalam populasi adalah  $\frac{S(t)}{N(t)}$ , maka banyaknya kontak orang yang sakit dengan orang yang sehat dalam satu hari adalah

$$cI \frac{S}{N}$$

Bila peluang sukses transmisi *V.Cholera* melalui orang yang terinfeksi keorang yang sehat adalah  $p$ , maka banyaknya orang yang sehat terinfeksi kolera perhari adalah :

$$pcI \frac{S}{N}$$

(dalam hal ini diasumsikan peluang sukses akan terjadi setiap kali orang yang sehat melakukan aktivitas MCK (mandi, cuci, kakus) disungai yang beberapa saat sebelumnya telah digunakan oleh orang yang terinfeksi kolera).

Dalam penjelasan berikutnya, akan dijelaskan tentang perubahan jumlah populasi susceptibles dan infectid. Sebelumnya akan dituliskan notasi-notasi yang digunakan dalam model ini :

- $a$  : laju kelahiran / kematian manusia
- $v$  : laju kesembuhan populasi yang terinfeksi
- $c$  : rata-rata banyaknya pertemuan antara populasi yang infectid dengan yang susceptibles perhari
- $p$  : peluang sukses populasi yang susceptibles terinfeksi penyakit kolera
- $N$  : jumlah total populasi manusia
- $S$  : jumlah populasi susceptibles
- $I$  : jumlah populasi infectid

Perubahan jumlah orang yang sehat dalam satu satuan waktu bertambah akibat adanya jumlah kelahiran dalam populasi waktu  $t$  atau  $aN(t)$  dan jumlah orang yang telah sembuh dari penyakit dan masih berpeluang untuk terinfeksi kembali atau  $vI(t)$ , dan berkurang akibat adanya kematian alami orang yang sehat dalam waktu  $t$  atau  $aS(t)$  dan jumlah orang yang sehat yang menjadi sakit dalam waktu  $t$  atau  $cpI(t) \frac{S(t)}{N(t)}$

Sehingga perubahan pada populasi susceptibles adalah *number added – number lost*, yaitu

$$S(t + \Delta t) - S(t) = aN(t)\Delta t + vI(t)\Delta t - cpI(t) \frac{S(t)}{N(t)} \Delta t - aS(t)$$

atau

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = aN(t) - cpI(t) \frac{S(t)}{N(t)} - aS(t) + vI(t)$$

Jika  $\Delta t \rightarrow \infty$ , maka diperoleh

$$\frac{dS}{dt} = aN(t) - cpI(t) \frac{S(t)}{N(t)} - aS(t) + vI(t)$$

Sedangkan perubahan jumlah orang yang sakit dalam satu satuan waktu bertambah karena adanya jumlah orang yang sehat yang menjadi sakit dalam waktu  $t$  atau  $cpI(t) \frac{S(t)}{N(t)}$  dan berkurang karena jumlah orang yang telah sembuh dari penyakit dan masih berpeluang untuk terinfeksi kembali atau  $vI(t)$ , kematian alami orang yang sakit dalam waktu  $t$  atau  $aI(t)$ . Sehingga perubahan pada populasi infektid adalah *number added – number lost*, yaitu

$$I(t + \Delta t) - I(t) = cpI(t) \frac{S(t)}{N(t)} \Delta t - aI(t) - vI(t) \Delta t$$

Jika  $\Delta t \rightarrow \infty$ , maka diperoleh

$$\frac{dI}{dt} = cpI(t) \frac{S(t)}{N(t)} - aI(t) - vI(t)$$

### Pembahasan

Dari uraian diatas, maka model transmisi penyakit kolera adalah sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = aN(t) - cpI(t) \frac{S(t)}{N(t)} - aS(t) + vI(t) \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = cpI(t) \frac{S(t)}{N(t)} - aI(t) - vI(t) \quad (2)$$

Selanjutnya akan dibahas tentang analisa titik tetap dan menghitung basic reproduction number dari penyebaran penyakit kolera.

### Penentuan Titik Tetap

Titik tetap diperoleh dengan cara membuat persamaan (1) dan (2) bernilai nol. Pada saat titik tetap diraih maka laju pertumbuhan dari tiap persamaan akan tetap dengan kata lain tidak terdapat perubahan jumlah populasi lagi (keadaan setimbang). Notasi yang akan digunakan untuk titik tetap dari tiap persamaan adalah  $S^*$  dan  $I^*$ .

Sebagai langkah awal, tetapkan persamaan (1) bernilai nol, sedemikian sehingga :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= 0 \\ aN - cpI \frac{S}{N} - aS + vI &= 0\end{aligned}\quad (3)$$

dan

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= 0 \\ cpI \frac{S}{N} - aI - vI &= 0 \\ (cpS - (a + v)N)I &= 0 \\ \Rightarrow I^* &= 0\end{aligned}\quad (4)$$

substitusikan nilai yang kita dapatkan ini kedalam persamaan (3), maka :

$$aN = aS$$

atau

$$S^* = N$$

Diperoleh salah satu titik tetap yaitu  $T_1(S_1^*, I_1^*) = (N, 0)$ . Titik tetap ini merupakan titik tetap non endemik yang menyatakan bahwa dalam keadaan setimbang pada saat belum ada infeksi maka jumlah populasi susseptibel sama dengan total populasi tersebut.

Dengan cara yang sama, didapatkan titik tetap endemiknya adalah

$$S^* = \frac{a+v}{cp} N$$

dan nilai  $I$  pada saat setimbang, yaitu :

$$I^* = \frac{cp - a - v}{cp} N$$

Sehingga sistem dinamik (1) dan (2) mempunyai dua titik tetap, yaitu :

$$T_1 = (N, 0)$$

$$T_2 = \left( \frac{a + v}{cp} N, \frac{cp - a - v}{cp} N \right)$$

dengan titik tetap endemik  $T_2$  ada jika parameter

$$\frac{cp}{a + v} > 1$$

**Analisa Titik Tetap**

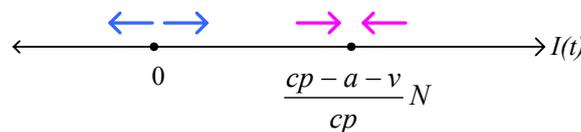
Titik tetap yang sudah didapatkan diatas perlu diuji kestabilannya, apakah titik tetap tersebut bersifat stabil atau tidak.

Dari model yang ada diatas, dapat disederhanakan kedalam bentuk model 1 dimensi dengan asumsi bahwa  $N(t)=S(t)+I(t)$  konstan. Sehingga sistem dinamik tersebut dapat disederhanakan dengan mengeliminir variabel  $S(t)=N(t)-I(t)$ . Dan didapatkan

$$I_1^* = 0$$

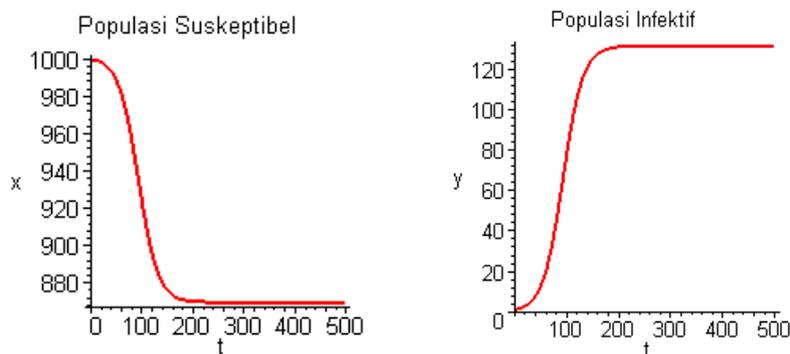
$$I_2^* = \frac{cp - a - v}{cp} N$$

sifat kestabilannya dapat dilihat digaris  $I(t)$  yang menyatakan populasi infektif dalam waktu  $t$ , yaitu :



Gambar 4. Sifat Dinamik Titik Tetap Populasi Infektif

Terlihat bahwa titik tetap non endemik  $T_1$  tidak stabil, dan titik tetap endemik  $T_2$  stabil, dengan semua nilai-nilai yang berada disekitar  $I_2^* = \frac{cp - a - v}{cp} N$  akan bergerak menuju titik tetap tersebut.



Gambar 5. Grafik Populasi Susseptibel dan Infektive

Pada gambar 5 diatas, dapat dilihat plot grafik dari total populasi yang sehat dan yang terinfeksi kolera disuatu wilayah yang terjangkit kolera. Terlihat bahwa dalam waktu kurang dari 100 hari, kurang lebih 12% penduduk diwilayah tersebut akan terinfeksi kolera.

**Basic Reproductive Number (R<sub>0</sub>)**

Basic reproduction number adalah banyaknya infeksi (kasus) baru yang dihasilkan akibat adanya satu penderita yang masuk kedalam populasi yang sehat.

Pada saat endemik, persamaan  $\frac{dI}{dt} > 0$  atau dengan kata lain

$$cp\frac{S}{N} - (a + v)I > 0 \Rightarrow cp\frac{S}{N} > a + v \text{ asumsikan pada saat } t=0, \text{ maka } S=N$$

sehingga  $R_0 = \frac{cp}{a + v}$

dengan  $R_0 = \text{banyaknya kontak} \times \text{peluang sukses kontak} \times \text{periode waktu infeksi}$

Setelah mensubstitusikan nilai parameter yang ada, didapatkan basic reproduction number untuk penyakit kolera adalah :  $R_0 = 12 - 14$  kasus baru akibat adanya satu penderita kolera yang berinteraksi dengan populasi yang sehat.

Nilai basic reproductive number ( $R_0$ ) yang diperoleh dapat digunakan sebagai ukuran untuk mengukur terjadinya endemi. Pada model ini, didapatkan

---

$R_0 > 1$  yang artinya infeksi akan menuju tak hingga. Dan dari  $R_0 = \frac{cp}{a+v}$  kita dapat mengontrol tingkat kesembuhan ( $v$ ) dengan melakukan vaksinasi terhadap penduduk agar jumlah kasus kolera dapat ditekan.

### **Interpretasi Model Kolera dengan Populasi Konstan**

Dari pembahasan model yang ada, diperoleh hasil-hasil sebagai berikut :

1. Setiap ada satu penderita aktif yang mengidap kolera masuk kedalam suatu populasi sehat, maka dapat dipastikan sebagian besar populasi yang sehat lainnya akan terinfeksi oleh penyakit kolera. Hal ini akan sangat didukung sekali jika masyarakat yang ada didalam komunitas tersebut tidak memperhatikan higienitasnya.
2. Akan muncul 12-14 kasus baru setiap harinya selama masa endemik.
3. Terjadi endemik kolera diwilayah yang terjangkit kolera dengan peluang sukses seseorang terinfeksi kolera adalah 25% jika seseorang bertemu dengan orang yang telah terinfeksi kolera.

### **Validasi Model**

Jika merujuk kedalam kasus nyata, model diatas belum terbentuk sesuai dengan kenyataan, karena belum memperhitungkan kasus adanya kematian akibat penyakit kolera. Sehingga kurang realistik. Namun, model diatas dibangun untuk mempermudah pemahaman tentang konsep dasar sistem dinamik penyakit kolera.

### **Kesimpulan dan Saran**

Terlihat bahwa salah satu faktor pengendali penyakit kolera adalah dengan memberikan vaksinasi bagi penderitanya. Hal ini terlihat ketika dibahas tentang basic reproductive number. Dalam model matematika dalam kasus penyebaran penyakit kolera diperoleh hasil, bahwa matematika dapat digunakan untuk memprediksi terjadinya wabah akibat kolera dan menentukan variabel-variabel yang dapat dikontrol

untuk mengantisipasi penyebaran penyakit ini. Namun dalam model yang dibahas dalam paper ini belum melibatkan faktor treatment penyakit kolera. Mungkin akan lebih baik untuk pembahasan selanjutnya kita melibatkan faktor tersebut dan melihat sifat-sifat dinamikanya.

#### **REFERENSI**

1. Diekmann, O & Heesterbeek, J.A.P. 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious Disease*. John Willey & son, Ltd. New York.
2. Murray, J.D. 1993. *Mathematical Biology*. Velrag Berlin – Heidelberg : Springer.
3. Oxford Medical. 1993. *Disease Control Priorities in Developing Countries*. Oxford University Press. USA.
4. [www.chclibrary.org/micromed](http://www.chclibrary.org/micromed)
5. [www.genomenetwork.org/articles/06\\_02/cholera\\_trip.shtml](http://www.genomenetwork.org/articles/06_02/cholera_trip.shtml)