ISBN: 978-979-16353-3-2

S-15

Model Suku Bunga Multinomial[4]

Danang Teguh Qoyyimi[*], Dedi Rosadi[2]

[2] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada

*qoyyimi@ugm.ac.id

Makalah ini adalah merupakan pengembangan dari model suku bunga binomial seperti yang telah banyak dikenal. Dengan menggunakan asumsi multinomial diharapkan model binomial dapat diperluas menjadi model suku bunga multinomial. Jika diketahui suku bunga sampai saat ini, maka suku bunga pada periode berikutnya akan mempunyai $k + 1$ nilai yang mungkin. Sifat *path-independence* akan membuat bentuk multinomial relatif lebih sederhana. Dengan sifat ini jika diketahui sekarang waktu ke 0 dan suku bunga memiliki $k + 1$ nilai yang mungkin pada periode berikutnya, maka pada waktu ke t akan ditemukan hanya $tk + 1$ nilai yang mungkin.

Kata kunci: model suku bunga, multinomial, *term structure, contingent claim*.

1. Latar Belakang

Penghitungan harga pada produk-produk finansial sering memakai asumsi suku bunga tertentu. Untuk mempermudah proses pemodelan selanjutnya diasumsikan bahwa suku bunga tetap pada besaran tertentu. Pengasumsian suku bunga tetap ini sering menyebabkan beberapa kesalahan dalam penghitungan, karena faktanya suku bunga mengalami pergerakan. Sehingga diperlukan suatu model yang dapat memprediksi pergerakan suku bunga yang akan datang.

Model suku bunga waktu diskret yang sudah banyak digunakan adalah Model BDT yang diperkenalkan oleh Black, Derman , dan Toy pada tahun 1990. Black, dkk (1990) mengasumsikan bahwa suku bunga yang akan datang hanya mempunyai dua kemungkinan pergerakan, yaitu naik dan turun. Dengan menggunakan pendekatan distribusi binomial kemudian dapat disimulasikan suatu diagram pohon pergerakan suku bunga yang akan datang.

Makalah ini akan mengkaji pengembangan model BDT dengan mengasumsikan bahwa suku bunga yang akan datang akan bergerak dengan $k + 1$ buah nilai yang mungkin. Fleksibilitas nilai suku bunga yang akan datang ini diharapkan dapat memperluas penggunaan model pada pemberian harga produk-produk financial yang

[4] Dipresentasikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY 2009. Sabtu, 5 Desember 2009.

 ISBN: 978-979-16353-3-2

lain. Sebagai contoh implementasinya, akan dilihat implementasi model untuk menghitung harga wajar suatu *contingent claim* suku bunga.

2. Model Multinomial

Dalam bagian ini akan dianalisa model multinomial untuk suku bunga sesaat. Diketahui terdapat k + 1 nilai suku bunga pada periode berikutnya jika diketahui nilai suku bunga sesaat saat itu, $k \geq 1$. Diberikan beberapa asumsi sebagai berikut:

1. Obligasi tanpa kupon dengan waktu jatuh tempo T = 1, 2, ... , m diperdagangkan pada waktu diskret t = 0, 1, ... , n.
2. Pada waktu ke-t terdapat beberapa fungsi diskonto yang mungkin, dinotasikan sebagai $P_t^i(T)$, t = 0, 1, 2, ... , n, i = 0, 1, ..., k, T = 1, 2, ... , m.
3. Bentuk transisi dari fungsi diskonto ditentukan oleh fungsi $h_t^i(T)$, yang mengukur ketaktentuan dinamisasi suku bunga sesaat dan disamping itu $h_t^i(T)$ juga mengukur deviasi dari fungsi diskonto dari fungsi forward faktor diskonto.

Dan akan ditunjukkan model ini mempunyai:

4. *Path-independence,* bila dimulai dari fungsi diskonto tertentu pada t = 0, fungsi diskonto yang sama akan diperoleh tanpa melihat dimana posisi sebelumnya dalam diagram pohon modelnya.
5. Memenuhi asumsi *no-arbitrage*.

Dengan melihat *term structure* pada waktu ke-t dan referensi harga obligasi tanpa kupon terdiskonto, $P_t^i(T)$, dengan i menunjukkan posisi pada waktu ke-t, T jangka waktu obligasi, fungsi diskonto pada waktu ke-t diberikan sebagai berikut,

$$P_t^i(T) = \frac{P_{t-1}(T+1)}{P_{t-1}(1)} h_t^i(T), i = 0,1,\ldots,k \; . \qquad (1)$$

Teorema 2.5.1 (Abaffy at el, 2005):

Diberikan pergerakan term structure pasar pada periode yang akan datang dapat dibedakan dalam (k+1) buah titik. Dengan menggunakan konsep no-arbitrage, fungsi perturbasi dapat dipilih yang memenuhi persamaan berikut,

$$\sum_{i=0}^{k} h_t^i(T)\pi_t^i = 1, \qquad (2)$$

untuk setiap t dan T dengan,

$$\sum_{i=0}^{k} \pi_t^i = 1. \qquad (3)$$

Bukti:

Diambil $t - 1 = 0$ dan dihilangkan indeks t. Portofolio pada waktu $t - 1$ tersusun dari obligasi dengan waktu jatuh tempo $T + 1$ dan k buah obligasi dengan jatuh tempo $T_i + 1$ dengan bobot τ_i. Nilai awal portofolio ini adalah,

$$V_0 = P(T+1) + \sum_{i=1}^{k} \tau_i P(T_i + 1). \tag{4}$$

Nilai τ_i tidak diketahui dan masih harus dicari.

Pada $t = 1$, dengan menggunakan persamaan (1), nilai portofolio dengan alternatif j adalah,

$$V_1^j = \frac{1}{P(1)}\left[P(T+1)h^j(T) + \sum_{i=1}^{k} \tau_i P(T_i+1)h^j(T_i) \right],\ j = 0,\ldots,k. \tag{5}$$

Nilai portofolio ini independen untuk tiap *state* yang akan terjadi pada waktu $t = 1$. Sehingga nilai portofolio seperti diberikan dalam (5) akan konstan untuk setiap j, dengan diberikan nilai sekarang pada $t = 0$. Dengan kata lain setiap nilai portofolio akan memberikan tingkat imbal hasil bebas resiko yang sama, dan hal ini seharusnya sama dengan nilai awal dari portofolio pada waktu $t = 0$, V_0, sehingga,

$$V_1^0 P(1) = V_1^1 P(1) = \cdots = V_1^k P(1) = V_0. \tag{6}$$

Hasil ini akan memberikan sistem linear dengan k buah τ_i yang tidak diketahui dari k buah persamaan yang pertama,

$$P(T+1)h^0(T) + \sum_{i=1}^{k} \tau_i P(T_i+1)h^0(T_i) = P(T+1)h^j(T) + \sum_{i=1}^{k} \tau_i P(T_i+1)h^j(T_i),$$

untuk setiap $j = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Berikutnya dinotasikan suatu $dh^j(.)$ dengan,

$$dh^j(.) = h^j(.) - h^0(.). \tag{7}$$

Sehingga diperoleh,

$$\sum_{i=1}^{k} \tau_i P(T_i+1)\, dh^j(T_i) = -P(T+1)\, dh^j(T),\ j = 1, 2, \ldots, k. \tag{8}$$

Diberikan,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} P(T_1+1)\,dh^1(T_i) & \cdots & P(T_k+1)\,dh^1(T_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(T_1+1)\,dh^k(T_i) & \cdots & P(T_k+1)\,dh^k(T_i) \end{vmatrix}$$

 ISBN: 978-979-16353-3-2

$$= \left[\prod_{i=1}^{k} P\left(T+1_i\right) \right] \begin{vmatrix} dh^1\left(T_1\right) & \cdots & dh^1\left(T_k\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dh^k\left(T_1\right) & \cdots & dh^k\left(T_k\right) \end{vmatrix}$$

$$= \det\left(A'\right) \prod_{i=1}^{k} P\left(T+1_i\right).$$

Solusi tunggal untuk sistem persamaan linear (8) ada jika dan hanya jika det (A) ≠ 0. Jika diberikan matriks A_i' adalah matriks yang diperoleh dari matriks *A′* dengan mensubstitusikan ruas kanan dari (8) ke dalam kolom ke *i* dari *A′*, akan diperoleh,

$$\tau_i = \frac{\det\left(A_i'\right) P\left(T+1\right) \prod_{j=1,\, j\neq i}^{k} P\left(T_j+1\right)}{\det\left(A'\right) \prod_{j=1}^{k} P\left(T_j+1\right)}, \; i = 1, 2, \ldots, k. \tag{9}$$

Persamaan terakhir dari (6) dan dengan melihat persamaan (4) maka diperoleh hubungan,

$$P\left(T+1\right) + \sum_{i=1}^{k} \tau_i P\left(T_i+1\right) = P\left(T+1\right) h^0\left(T\right) + \sum_{i=1}^{k} \tau_i P\left(T_i+1\right) h^0\left(T_i\right). \tag{10}$$

Substitusi hasil (9) ke dalam persamaan (10) menghasilkan,

$$1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\det\left(A_i'\right)}{\det\left(A'\right)} = h^0\left(T\right) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\det\left(A_i'\right)}{\det\left(A'\right)} h^0\left(T_i\right),$$

$$1 = h^0\left(T\right) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\det\left(A_i'\right)}{\det\left(A'\right)} \left(h^0\left(T_i\right) - 1\right). \tag{11}$$

Selanjutnya perhatikan matriks A_i'. Kolom ke *i* matriks ini adalah (dh^1(*T*), ... , dh^k(*T*)). Dari persamaan (7) dan sifat determinan maka diperoleh,

$$\det\left(A_i'\right) = \det\left(B_i\right) - \det\left(C_i\right), \tag{12}$$

dengan

$$\det\left(B_i\right) = \begin{vmatrix} dh^1\left(T_1\right) & h^1\left(T\right) & \cdots & dh^1\left(T_k\right) \\ \cdots & \cdots & & \vdots \\ dh^k\left(T_1\right) & h^k\left(T\right) & \cdots & dh^1\left(T_k\right) \end{vmatrix}$$

dan,

$$\det\left(C_i\right) = \begin{vmatrix} dh^1\left(T_1\right) & h^0\left(T\right) & \cdots & dh^1\left(T_k\right) \\ \cdots & \cdots & & \vdots \\ dh^k\left(T_1\right) & h^0\left(T\right) & \cdots & dh^1\left(T_k\right) \end{vmatrix}.$$

Sehingga persamaan (11) akan menjadi,

$$1 = h^0(T) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(h^0(T_i) - 1\right)\left(\det(B_i) - \det(C_i)\right)}{\det(A')} \tag{13}$$

$$1 = h^0(T) + \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(h^0(T_i)-1\right)\sum_{j=1}^{k}(-1)^{i+j}\left(h^j(T)\det(B_{ji}) - h^0(T)\det(C_{ji})\right)}{\det(A')} \tag{14}$$

Dimana det(B_{ji}) dan det(C_{ji}) adalah minor dari B_i dan C_i pada posisi (*j, i*).

Selanjutnya persamaan (14) akan menjadi,

$$1 = \left\{\left[\det(A) - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{i+j}\left(h^0(T_i)-1\right)\det(C_{ji})\right]h^0(T) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{i+j}\left(h^0(T_i)-1\right)\det(B_{ji})h^j(T)\right\} \Big/ \det(A'). \tag{15}$$

Perlu diperhatikan bahwa $\det(A'_{ji}) = \det(B_{ji}) = \det(C_{ji})$, untuk *j* = 1, 2, ... , *k*.

Ambil,

$$\pi^0 = \left[\det(A') - \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{i+j}\left(h^0(T_i)-1\right)\det(A'_{ji})\right] \Big/ \det(A')$$

dan,

$$\pi^j = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+j}\left(h^0(T_i)-1\right)\det(A')_{ji} \Big/ \det(A'), \; j = 1, 2, ..., k. \tag{16}$$

Maka,

$$\sum_{j=0}^{k}\pi_t^j = 1.$$

Dengan menggunakan (15) dan (16) diperoleh,

$$\sum_{j=0}^{k}h_t^j(T)\pi_t^j = 1. \qquad \blacksquare$$

Langkah selanjutnya adalah menyelidiki sifat *path independent* dari fungsi $h_t^j(\cdot)$. Dengan sifat *path-independent* (atau rekombinasi pada diagram pohon) diketahui bahwa state *interior* (state di dalam) dapat diperoleh dari lebih satu node, sedangkan *outer* (state terluar) akan hanya diperoleh dari satu node saja. Untuk melihat keadaan ini misalkan dinotasikan P_{t+2}^{ij}, *i, j* = 0, 1, ... , *k*, dimana indeks di atas menunjukkan bahwa P_{t+2}^{ij} dihitung mulai dari *t* dan menggunakan h^i(.) dan h^j(.).

Contoh:

 ISBN: 978-979-16353-3-2

Untuk menghitung $P_{t+2}^{46}\left(T\right)$ dimulai dari $P_t\left(T+2\right)$ memerlukan langkah-langkah berikut ini,

$$P_{t+1}^{4}\left(T+1\right)=\frac{P_t\left(T+2\right)}{P_t\left(1\right)}h_{t+1}^{4}\left(T+1\right),$$

$$P_{t+2}^{46}\left(T+1\right)=\frac{P_{t+1}^{4}\left(T+1\right)}{P_{t+1}^{4}\left(1\right)}h_{t+2}^{6}\left(T+1\right),$$

Dengan,

$$P_{t+1}^{4}\left(1\right)=\frac{P_t\left(2\right)}{P_t\left(1\right)}h_{t+1}^{4}\left(1\right),$$

Sehingga,

$$P_{t+2}^{46}\left(T\right)=\frac{P_t\left(T+2\right)h_{t+1}^{4}\left(T+1\right)h_{t+2}^{6}\left(T\right)}{P_t\left(2\right)h_{t+1}^{4}\left(1\right)}.$$

Teorema 2.5.2 (Abaffy et al, 2005):

Model multinomial akan *path independent* jika memenuhi persamaan berikut ini,

$$\frac{h_{t+1}^{i}\left(T+1\right)h_{t+2}^{j}\left(T\right)}{h_{t+1}^{i}\left(1\right)}=\frac{h_{t+1}^{i+1}\left(T+1\right)h_{t+2}^{j-1}\left(T\right)}{h_{t+1}^{i+1}\left(1\right)}=\cdots=\frac{h_{t+1}^{j}\left(T+1\right)h_{t+2}^{i}\left(T\right)}{h_{t+1}^{j}\left(1\right)}, \qquad (17)$$

untuk i = *0, ... , k*-1*, j* = 1, 2*, ... , k, i + j = m,* dan *m* = 1, 2*, ... , 2k*-1.

Bukti:

Dimulai dari *t* dan waktu jatuh tempo *T* + 2 dengan fungsi diskonto $P_t(T+2)$. Dapat ditunjukkan bahwa dalam cabang rekombinasi periode berikutnya akan mengikuti deret aritmetik 1 + *nk*, dimana *n* = 1, 2, ... sejalan dengan waktu *t* + 1, *t* + 2, ... Jadi untuk *n* > 1 jumlah rantai dari persamaan yang memenuhi asumsi path dependence adalah,

(1 + *nk*) – 2

Dan jumlah syarat pada fungsi *h* (yaitu jumlah ruas kanan dan ruas kiri dari (17) adalah $k^2 - 2$. Rantai 2*k* – 1 persamaan harus memenuhi,

$$P_{t+2}^{ij}\left(T\right)=P_{t+2}^{i+1\,j-1}\left(T\right)=\cdots=P_{t+2}^{ji}\left(T\right),\ i=0,\ldots,k,\ j=1,\ldots,k, \qquad (18)$$

Dimana *i + j = m, m* = 1, 2, ... , 2*k* – 1. Akan diperhatikan salah satu persamaan dalam (18) dan dengan logika yang sama dapat diperluas berlaku untuk setiap *i + j = m*, *m* ∈ [1, 2*k* – 1]. Misalkan diambil persamaan yang paling depan yaitu,

$$P_{t+2}^{m}\left(T\right)=P_{t+2}^{ij}\left(T\right)=P_{t+2}^{i+1\,j-1}$$

$$\frac{P_t\left(T+2\right)h_{t+1}^{i}\left(T+1\right)h_{t+2}^{j}\left(T\right)}{P_t\left(2\right)h_{t+1}^{i}\left(1\right)}=\frac{P_t\left(T+2\right)h_{t+1}^{i+1}\left(T+1\right)h_{t+2}^{j-1}\left(T\right)}{P_t\left(2\right)h_{t+1}^{i+1}\left(1\right)}$$

 ISBN: 978-979-16353-3-2

$$\frac{h_{t+1}^{i}(T+1)\,h_{t+2}^{j}(T)}{h_{t+1}^{i}(1)}=\frac{h_{t+1}^{i+1}(T+1)\,h_{t+2}^{j-1}(T)}{h_{t+1}^{i+1}(1)}. \tag{19}$$

Dengan menggunakan logika yang sama maka diperoleh persamaan (17). ■

Akibat:

Untuk setiap waktu jatuh tempo T berlaku persamaan berikut,

$$h_{t+2}^{i}(T)=\left[h_{t+2}^{i-1}(T)\,h_{t+2}^{i+1}(T)\right]^{1/2},\ i=1,\ldots,k-1, \tag{20}$$

$$h_{t+2}^{i-1}(T)\big/h_{t+2}^{i+1}(T)=h_{t+2}^{i-2}(T)\big/h_{t+2}^{i}(T)=h_{t+2}^{i-3}(T)\big/h_{t+2}^{i-1}(T)=\cdots \tag{21}$$

Bukti:

Akan dibuktikan hasil untuk i = 1. Dari persamaan (17) diambil hanya persamaan yang pertama di awal, yaitu untuk m = 1 dan 2,

$$\frac{h_{t+1}^{0}(T+1)\,h_{t+2}^{1}(T)}{h_{t+1}^{0}(1)}=\frac{h_{t+1}^{1}(T+1)\,h_{t+2}^{0}(T)}{h_{t+1}^{1}(1)} \tag{22}$$

dan

$$\frac{h_{t+1}^{0}(T+1)\,h_{t+2}^{2}(T)}{h_{t+1}^{0}(1)}=\frac{h_{t+1}^{1}(T+1)\,h_{t+2}^{1}(T)}{h_{t+1}^{1}(1)}. \tag{23}$$

Dengan membagi persamaan (22) dengan persamaan (23) dan disederhanakan maka diperoleh persamaan (20). Analogi yang sama berlaku untuk persamaan-persamaan dalam (17). Hasil (23) diperoleh dengan menggunakan persamaan yang lain untuk m dan m – 1 yang sama.

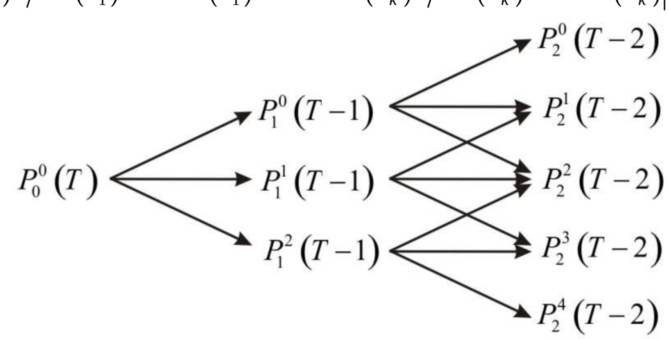
Dari (20) dan (21) dapat diperoleh,

$$h^{j}(\cdot)=\frac{\left(h^{1}(\cdot)\right)^{j}}{\left(h^{0}(\cdot)\right)^{j-1}}. \tag{24}$$

Dengan menggunakan persamaan (24) dua buah fungsi dapat dipilih secara bebas ketika fungsi yang lain telah dihitung dengan menggunakan persamaan (24).

Dengan menggunakan persamaan (24) det (A′) dapat disajikan dalam bentuk berikut,

$$\det(A')=\begin{vmatrix} h^{1}(T_1)-h^{0}(T_1) & \cdots & h^{1}(T_k)-h^{0}(T_k) \\ h^{1}(T_1)^{2}/h^{0}(T_1)-h^{0}(T_1) & \cdots & h^{1}(T_k)^{2}/h^{0}(T_k)-h^{0}(T_k) \\ & \ddots & \\ h^{1}(T_1)^{k}/h^{0}(T_1)^{k-1}-h^{0}(T_1) & \cdots & h^{1}(T_k)^{k}/h^{0}(T_k)^{k-1}-h^{0}(T_k) \end{vmatrix}. \tag{25}$$



Gambar 2.3 *Ilustrasi diagram pohon untuk k = 2 dengan sifat path-independence*

 ISBN: 978-979-16353-3-2

3. Penentuan fungsi h_t^j

Untuk memudahkan penganalisaan, dalam subbab ini diasumsikan h_t^j tidak akan berubah atas waktu, sehingga indeks *t* dapat dihilangkan. Menurut teorema-teorema pada subbab sebelumnya fungsi h_t^j harus memenuhi persamaan (17) dan (2), dan dengan menggunakan persamaan (24) akan dicari solusi persamaan-persamaan berikut,

$$h^0(T+1)h^1(T)h^1(1)=h^1(T+1)h^0(T)h^0(1), \tag{26}$$

$$\sum_{i=0}^{k}\pi^{k-i}\left[h^1(T)\right]^{k-i}\left[h^0(T)\right]^{i}=\left[h^0(T)\right]^{k-1}. \tag{27}$$

Ambil $\gamma = h^1(1)$, $\delta = h^0(1)$, dan

$$\frac{h^1(T)}{h^0(T)}=v(T), \tag{28}$$

sehingga persamaan (26) menjadi,

$$\frac{v(T+1)}{v(T)}\frac{\delta}{\gamma}=1. \tag{29}$$

Persamaan (29) ini adalah persamaan diferensi order satu, yang memiliki solusi umum,

$$v(T+1)=v(0)\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{T+1}. \tag{30}$$

Karena $h^1(0) = h^0(0) = 1$, maka $v(0) = 1$, dan persamaan (30) akan menjadi,

$$v(T+1)=\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{T+1}. \tag{31}$$

Subtitusi persamaan (31) ke dalam persamaan (28) diperoleh,

$$h^1(T)=h^0(T)\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{T}. \tag{32}$$

Substitusi hasil (32) ke dalam (27) diperoleh,

$$\left[h^0(T)\right]^{k}\sum_{i=0}^{k}\pi^{k-i}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{(k-i)T}=\left[h^0(T)\right]^{k-1}, \tag{33}$$

$$h^0(T)\sum_{i=0}^{k}\pi^{k-i}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{(k-i)T}=1 \tag{34}$$

$$h^0(T)=\left(\sum_{i=0}^{k}\pi^{k-i}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{(k-i)T}\right)^{-1} \tag{35}$$

Dengan mengambil $T = 1$ pada (35) diperoleh,

$$h^0(1)=\left(\sum_{i=0}^{k}\pi^{k-i}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{(k-i)}\right)^{-1} \tag{36}$$

Karena diketahui bahwa $h^0(1) = \delta$ maka syarat berikut harus terpenuhi,

$$\frac{1}{\delta}=\sum_{i=0}^{k}\pi^{k-i}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{(k-i)}. \tag{37}$$

Dari persamaan (24) dan (32) diketahui,

$$h^{j}(T)=h^{0}(T)\left(\frac{h^{1}(T)}{h^{0}(T)}\right)^{j}=h^{0}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{jT}. \tag{38}$$

Untuk obligasi satu periode (T = 1) harga obligasi pada waktu n dan state i adalah,

$$P_n^i(1)=\frac{P(n+1)}{P(n)}\frac{h^0(n)h^0(i_0)\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{i_0}h^0(i_1)\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{2i_1}\cdots h^0(i_{k-1})\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{ki_{k-1}}}{h^0(i_0)h^0(i_1)\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{i_1}\cdots h^0(i_{k-1})\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{(k-1)i_{k-1}}} \tag{39}$$

dimana menurut sifat *path independence*, $i_0 + i_1 + \cdots + i_{k-1} = kn - 1$. Hal ini menghasilkan,

$$P_n^i(1)=\frac{P(n+1)}{P(n)}h^0(n)\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{kn-1}. \tag{40}$$

Teorema 2.6.1 (Abaffy et al, 2005):
Diberikan $q^i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$, adalah probabilitas untuk mencapai path i. Probabilitas untuk mencapai node n pada waktu $t = 1 \ldots T$ diberikan sebagai,

$$P(n)=\sum P\{X_0=i_0,\ldots,X_k=i_k\}=\sum\frac{t!}{i_0!\ldots i_k!}q_0^{i_0}q_1^{i_1}q_2^{i_2}\ldots q_k^{i_k}, \tag{41}$$

Dengan $P\{X_0=i_0,\ldots,X_k=i_k\}$ adalah probabilitas bersama dimana diambil i_0 langkah pertama sampai i_k langkah ke k dengan,

$$\sum_{j=0}^{k}i_j=t,\ i_j>0,\ j=0,\ldots,k, \tag{42}$$

Dan jumlahan dalam (41) dapat dihitung untuk semua *path* dalam node tersebut dan dengan selisih i_j.

Selanjutnya pada *pricing* obligasi tanpa kupon dikenal syarat cukup dan perlu untuk terpenuhi *local expectation hypothesis* (LEH). Prinsip LEH mengatakan bahwa ekpektasi *holding period return* pada semua obligasi tanpa kupon yang mungkin akan sama, dimana holding period adalah interval periode terpendek selanjutnya (dalam hal ini satu periode). Jadi ketika LEH tidak terjadi dapat diharapkan ekpektasi obigasi dengan jangka waktu yang lebih lama akan memberikan ekpektasi return yang lebih besar, dan dapat dibuat suatu T-periode waktu premium, $\tau(T)$, yaitu ekpektasi *holding period return* dari obligasi periode T dibanding dengan *return* obligasi satu periode.
Hal ini berarti bahwa harus dilihat selisih antara ekpektasi return dari obligasi periode (T+1) dengan satu periode dan rate of retun satu periode.
Pada model yang telah dikonstruksikan di atas ekspektasi *rate of return* dari obligasi periode (T+1) dibagi satu periode adalah,

$$\left(\sum_{i=0}^{k}q^i\frac{P(T+1)}{P(1)}h^i(T)\right)\frac{1}{P(T+1)}, \tag{43}$$

ISBN: 978-979-16353-3-2

Dengan $\sum_{i=0}^{k} q^i = 1$, qi adalah probabilitas P akan menempati path i dan fungsi hi memenuhi persyaratan dalam (2) dan (3).
Rate of return satu periode diberikan sebagai 1/P(1), sehingga *T-period term premium* $\tau(T)$ adalah,

$$\tau(T) = \frac{1}{P(1)}\left(\sum_{i=0}^{k} q^i h^i(T) - 1\right), \qquad (44)$$

dengan $\sum_{i=0}^{k} q^i = 1, \sum_{i=0}^{k} \pi^i = 1, \sum_{i=0}^{k} h^i \pi^i = 1$.

Dari pengertian ini dan dengan melihat hasil dari subbab 2.5 maka dapat dilihat bahwa LEH akan terpenuhi jika dan hanya jika $q^i = \pi^i$ untuk *i* = 0, ..., *k*.

6. Penutup

Dengan melihat model suku bunga waktu diskret asumsi multinomial ini diharapkan dapat digunakan untuk valuasi berbagai macam produk finansial yang berhubungan sengan suku bunga atau hasil investasi tergaransi (guaranted rate). Sehingga analisa dan penelitian lebih lanjut yang akan melihat perilaku model ketika diimplementasikan pada valuasi produk finansial yang lain. Bentuk ini juga masih relatif sederhana sehingga masih diperlukan penelitian-penelitian lanjutan yang akan melihat bentuk multinomial yang lebih umum.

Daftar Pustaka

Abaffy, J, et al, 2005, *Extension of the Ho and Lee Interest-rate Model to The Multinomial Case*, European Journal of Operational Research 163 (2005), 154-169.

Buetow, Jr., GW, et.al,2001. *Term-Structure Models Using Binomial Trees,* The Research Foundation of AIMR.

Black, Fischer, Derman, Emanuel, Toy, William, 1990. *A One-Factor Model of Interest Rate and Its Application to Treasury Bond Options*. Financial Analyst Journal 46 (January-February), 33-39.

Fabozzi, Frank, et.al, 2002. *Interest Rate, Term-Structure, and Valuation Modelling*, Jogn Willey & Sons, Inc

Jay, Burthon D, dkk, 2002. *Fair Valuation of Insurance Liabilities: Principles and Methods*. American Academy of Actuaries.

Lin, X. Sheldon, 2006. *Introductory Stochastic Analysis for Finance and Insurance*. Hoboken, New Jersey : Willey & Sons, Inc.

Panjer, Harry H., dkk, 1998. *Financial Economics with Applications to Investment, Insurance and Pensions*. The Actuarial Foundation, Schaumburg, IL.

Wuthrich, Mario Valentin, Buhlmann, Hans, Furrer, Hansjorg, 2008. *Market-Consistent Actuarial Valuation*. Berlin Heidelberg, New York: Springer-Verlag.