BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini diuraikan tentang dasar-dasar yang diperlukan dalam pembahasan model antrian dengan *working vacation* pada pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) satu *server*, mencakup tentang model antrian satu *server* pola kedatangan berkelompok yang berdistribusi Poisson, waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial, *probability generating function* (PGF), dan antrian *batch arrival* satu *server.*

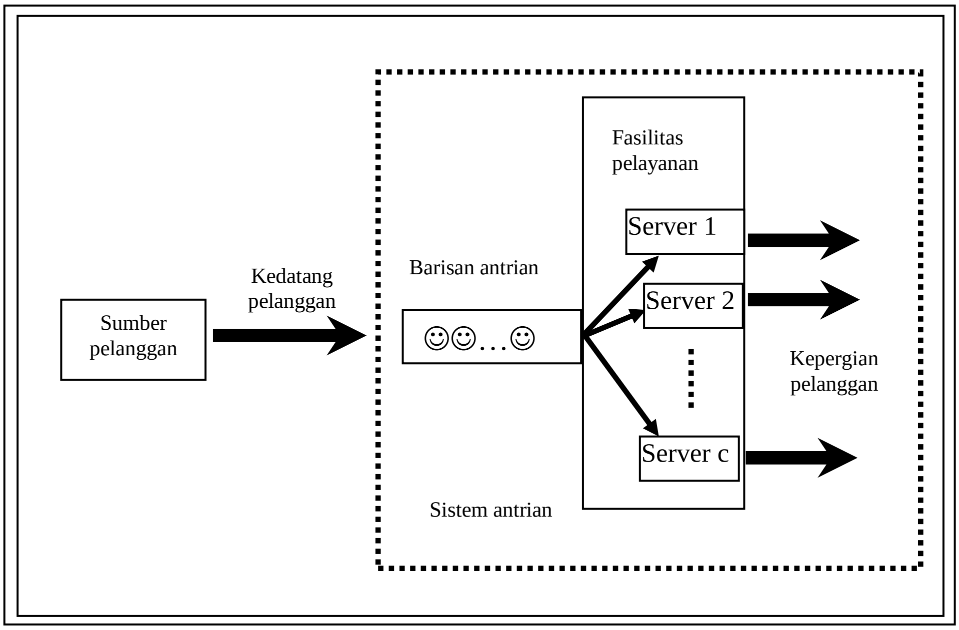
A. Proses Antrian

1. Definisi Proses Antrian

   Menurut Bronson (1996:310), proses antrian merupakan proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu panggilan dalam baris antrian jika belum mendapat pelayanan dan akhirnya meninggalkan fasilitas pelayanan setelah mendapat pelayanan. Proses ini dimulai saat pelanggan – pelanggan yang memerlukan pelayanan mulai datang. Mereka berasal dari suatu populasi yang disebut sebagai sumber input.

   Menurut Hillier dan Lieberman (1980:401), proses antrian adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan ke suatu sistem antrian, kemudian menunggu dalam antrian hingga pelayan memilih pelanggan sesuai dengan disiplin pelayanan, dan akhirnya pelanggan meninggalkan sistem antrian setelah selesai pelayanan.

Sistem antrian adalah himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur kedatangan para pelanggan dan pelayanannya. Sistem antrian merupakan ” proses kelahiran – kematian ” dengan suatu populasi yang terdiri atas para pelanggan yang sedang menunggu pelayanan atau yang sedang dilayani. Kelahiran terjadi jika seorang pelanggan memasuki fasilitas pelayanan, sedangkan kematian terjadi jika pelanggan meninggalkan fasilitas pelayanan. Keadaan sistem adalah jumlah pelanggan dalam suatu fasilitas pelayanan. (Wospakrik, 1996:302)



Gambar 2.1 Sistem Antrian

2. Komponen Dasar dalam Proses Antrian

Menurut Taha (1997:609), suatu sistem antrian bergantung pada tujuh komponen yaitu pola kedatangan, pola kepergian, kapasitas sistem, desain pelayanan, disiplin pelayanan, ukuran sumber pemanggilan, dan perilaku manusia. Komponen – komponen tersebut diuraikan sebagai berikut.

a. Pola Kedatangan

Menurut Wagner (1972:840), pola kedatangan adalah pola pembentukan antrian akibat kedatangan pelanggan dalam selang waktu tertentu. Pola kedatangan dapat diketahui secara pasti atau berupa suatu variabel acak yang distribusi peluangnya dianggap telah diketahui.

Jika tidak disebutkan secara khusus pelanggan datang secara individu ke dalam sistem antrian. Namun dapat pula lebih dari satu pelanggan datang secara besamaan ke dalam sistem antrian, pada kondisi ini disebut dengan *bulk arrival* (Taha, 1997:177).

b. Pola Kepergian

Pola kepergian adalah banyak kepergian pelanggan selama periode waktu tertentu. Pola kepergian biasanya dicirikan oleh waktu pelayanan, yaitu waktu yang dibutuhkan oleh seorang pelayan untuk melayani seorang pelanggan. Waktu pelayanan dapat bersifat deterministik dan dapat berupa suatu variabel acak dengan distribusi peluang tertentu (Bronson, 1996:310).

Waktu pelayan bersifat deterministik berarti bahwa waktu yang dibutuhkan untuk melayani setiap pelanggan selalu tetap, sedangkan waktu pelayanan yang berupa variabel acak adalah waktu yang dibutuhkan untuk melayani setiap pelanggan berbeda – beda.

c. Kapasitas sistem

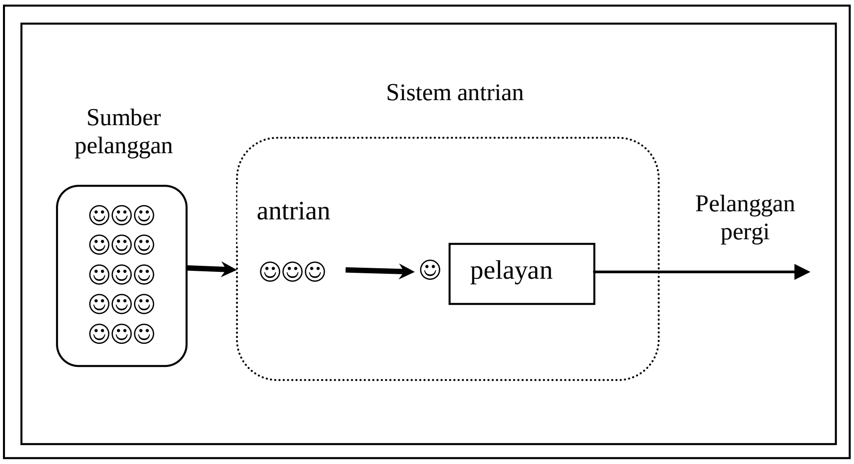
Menurut Bronson (1996:310), kapasitas sistem adalah banyak maksimum pelanggan, baik pelanggan yang sedang berada dalam pelayanan maupun dalam antrian, yang ditampung oleh fasilitas pelayanan pada waktu yang sama. Suatu sistem anrian yang tidak membatasi banyak pelanggan dalam fasilitas pelayanannya disebut sistem berkapasitas tak berhingga, sedangkan suatu sistem yang yang membatasi banyak pelanggan dalam fasilitas pelayanannya disebut sistem berkapasitas berhingga, jika pelanggan memasuki sistem pada saat fasilitas pelayanan penuh maka pelanggan akan ditolak dan meninggalkan sistem tanpa memperoleh pelayanan.

d. Desain Pelayanan

Menurut Sinalungga (2008:249), Desain sarana pelayanan dapat diklasifikasikan dalam *channel* dan *phase* yang akan membentuk suatu struktur antrian yang berbeda – beda. *Channel* menunjukkan jumlah jalur untuk memasuki sistem pelayanan. *Phase* berarti jumlah stasiun – stasiun pelayanan, dimana para pelanggan harus melaluinya sebelum pelayanan dinyatakan lengkap. Ada empat model struktur antrian dasar yang umum terjadi dalam seluruh sistem antrian:

1. *Single Channel – Single Phase*

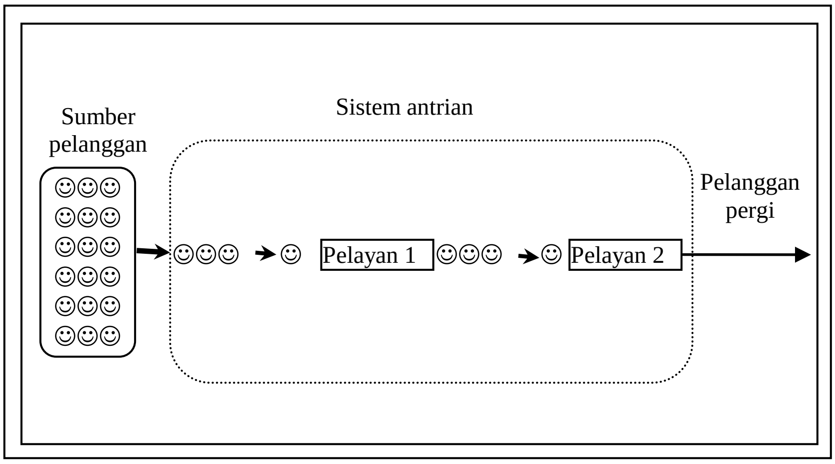
Single Channel berarti hanya ada satu jalur untuk memasuki sistem pelayanan atau ada satu pelayanan. *Single Phase* menunjukkan bahwa hanya ada satu stasiun pelayanan sehingga yang telah menerima pelayanan dapat langsung keluar dari sistem antrian. Contohnya antrian pada penjualan tiket kereta api yang dibuka hanya satu loket.



Gambar 2.2 Sistem Antrian Single Channel – Single Phase

2. *Single Channel – Multi Phase*

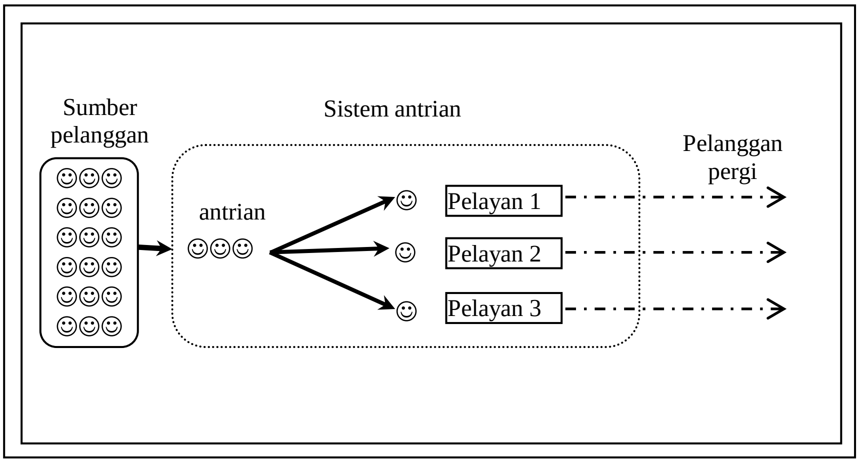
Multi Phase beraryi ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan dalam *phase – phase*. Misalnya pada antrian di laundry, pakaian – pakaian setelah dicuci kemudian dijemur lalu disetrika dan terakhir dikemas.



Ganbar 2.3 Sistem Antrian Single Channel – Multi Phase

3. *Multi Channel – Single Phase*

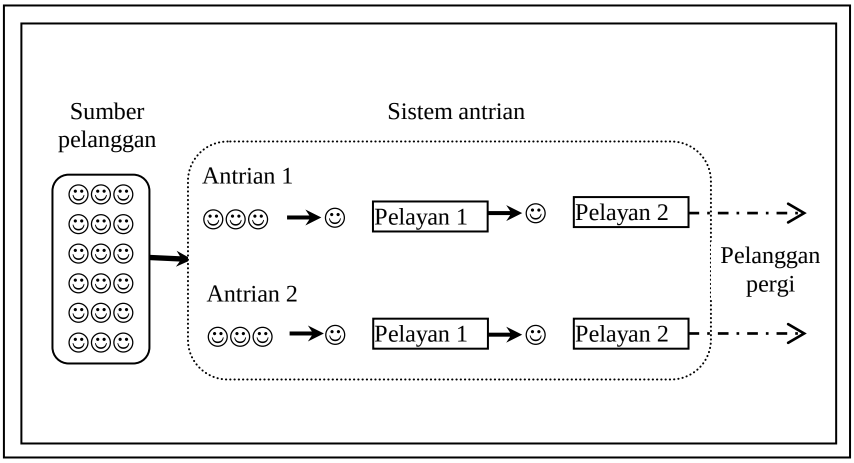
Sistem *multi channel – single phase* terjadi jika ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh suatu antrian tunggal. Sebagai contoh adalah saranan pelayanan nasabah di Bank.



Gambar 2.4 Sistem Antrian Multi Channel – Single Phase

4. *Multi Channel – Multi Phase*

Sistem ini terjadi jika ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dengan pelayanannya lebih dari satu *phase*. Sebagai contoh adalah pelayanan kepada pasien di rumah sakit dari pendaftaran, diagnosa, tindakan medis sampai pembayaran. Setiap sistem – sistem ini mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada setiap tahap, sehingga lebih dari satu individu dapat dilayani pada suatu waktu.



Gambar 2.5 Sistem Antrian Multi Channel – Multi Phase

e. Disiplin Pelayanan

Menurut Sinalungga (2008:251), disiplin pelayanan adalah suatu aturan yang dikenalkan dalam memilih pelanggan dari barisan antrian untuk segera dilayani. Adapun pembagian disiplin pelayanan ialah:

1. *First come first served (FCFS*) atau *first in first out (FIFO),* suatu peraturan dimana yang akan dilayani ialah pelanggan yang datang terlebih dahulu. Contohnya antrian di suatu kasir sebuah swalayan.
2. *Last come first served (LCFS)* atau *last in first out (LIFO)* merupakan antrian dimana yang datang paling akhir adalah yang dilayani paling awal atau paling dahulu. Contohnya antrian pada satu tumpukan barang digudang, barang yang terakhir masuk akan berada ditumpukkan paling atas, sehingga akan diambil pertama.

3. *Service in random order (SIRO)* atau pelayanan dalam urutan acak atau sering dikenal juga *random selection for services (RSS),* artinya pelayanan atau panggilan didasarkan pada peluang secara random, tidak mempermasalahkan siapa yang lebih dahulu tiba. Contohnya kertas – kertas undian yang menunggu untuk ditentukan pemenangnya, yang diambil secara acak.
4. *Priority service (PS),* artinya prioritas pelayanan diberikan kepada mereka yang mempunyai prioritas paling tinggi dibandingkan dengan mereka yang memiliki prioritas paling rendah, meskipun yang terakhir ini sudah lebih dahulu tiba dalam garis tunggu. Kejadian seperti ini bisa disebabkan oleh beberapa hal, misalnya seseorang yang keadaan penyakit yang lebih berat dibanding dengan orang lain dalam sebuah rumah sakit.

f. Sumber Pemanggilan

Menurut Taha (1996:177), ukuran sumber pemanggilan adalah banyaknya populasi yang membutuhkan pelayanan dalam suatu sistem antrian. Ukuran sumber pemanggilan dapat terbatas maupun tak terbatas. Sumber pemanggilan terbatas misalnya mahasiswa yang akan melakukan registrasi ulang di suatu universitas, dimana jumlahnya sudah pasti. Sedangkan sumber pemanggilan yang tidak terbatas misalnya nasabah bank yang antri untuk menabung atau membuka rekening baru, jumlahnya bisa tak terbatas.

g. Perilaku Manusia

Perilaku manusia merupakan perilaku – perilaku yang mempengaruhi suatu sistem antrian ketika manusia mempunyai peran dalam sistem baik sebagai pelanggan maupun pelayan. Jika manusia berperan sebagai pelayan, dapat melayani pelanggan dengan cepat atau lambat sesuai kemampuannya sehingga mempengaruhi lamanya waktu tunggu (Taha, 1996:178).

Menurut Gross dan Harris (1998:3), perilaku manusia dalam sistem antrian jika berperan sebagai pelanggan sebagai berikut:

1. *Reneging*

   menggambarkan situasi dimana seseorang masuk dalam antrian, namun belum memperoleh pelayanan, kemudian meninggalkan antrian tersebut.

2. *Balking*

   menggambarkan orang yang tidak masuk dalam antrian dan langsung meninggalkan antrian.

3. *Jockeying*

   menggambarkan situasi jika dalam sistem ada dua atau lebih jalur antrian maka orang dapat berpindah antrian dari jalur yang satu ke jalur yang lain.

B. Distribusi Eksponensial dan Distribusi Poisson

1. Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial digunakan untuk mengambarkan distribusi waktu pada fasilitas jasa, dimana waktu pelayanan tersebut diasumsikan bersifat bebas. Artinya, waktu untuk melayani pendatang tidak bergantung pada lama waktu yang telah dihabiskan untuk melayani pendatang sebelumnya, dan tidak bergantung pada jumlah pendatang yang menungu untuk dilayani. (Djauhari, 1997:175-176)

Definisi 2.1 (Cooper, 1981:42) Jika X adalah variabel acak kontinu dengan fungsi distribusi kumulatif $P\{X \leq x\} = F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x}, & \text{untuk } x \geq 0 \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

dan fungsi densitas peluang $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ yaitu

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}, \qquad x \geq 0 \tag{2.1}$$

maka X disebut berdistribusi Eksponensial dengan parameter μ.

2. Distribusi Poisson

Suatu eksperimen yang menghasilkan jumlah sukses yang terjadi pada interval waktu ataupun daerah yang speksifik dikenal sebagai eksperimen Poisson. Interval waktu tersebut dapat berupa menit, hari, minggu, bulan, maupun tahun, sedangkan daerah yang spesifik dapat berarti garis, luas, sisi, maupun material. (Dimyati, 1999:309)

Menurut Dimyati, (1999:309) ciri – ciri eksperimen Poisson adalah:

a. Banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu selang waktu atau suatu daerah tertentu bersifat independen terhadap banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpisah.
b. Peluang terjadinya satu hasil percobaan selama suatu selang waktu yang singkat sekali atau dalam suatu daerah yang kecil, sebanding dengan panjang selang waktu tersebut atau besarnya daerah tersebut.
c. Peluang bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi dalam selang waktu yang singkat tersebut atau dalam daerah yang kecil tersebut dapat diabaikan.

Definisi 2.2 (Djauhari, 1997:163) Variabel acak X dikatakan berdistribusi Poisson dengan parameter λ jika fungsi peluangnya sebagai berikut.

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad , x = 0,1,2, \ldots \tag{2.2}$$

C. *Probability Generating Function (PGF)*

Akan ditemukan gagasan untuk fungsi pembangkit probabilitas yang berguna dalam analisis sistem antrian. Probabilitas menghasilkan fungsi yang banyak digunakan dalam studi, proses stokastik dan sistem antrian adalah contoh khusus dari proses tersebut.

Definisi 2.3 (Bain & Engelhardt, 1991:61) Jika X adalah suatu variabel acak diskrit dengan fungsi peluang $f(x)$ maka nilai harapan dari X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_{x} x f(x) \tag{2.3}$$

Definisi 2.4 (Purcell & Varberg, 1987:49) Andaikan $S(x)$ adalah jumlah sebuah deret pangkat pada sebuah selang $I = \{x| -1 < x < 1\}$ sehingga

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots \tag{2.4}$$

maka turunan pertama dari $S(x)$ adalah

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{d\sum_{n=0}^{\infty} x^n}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} \tag{2.5}$$

Definisi 2.5 (Purcell & Varberg, 1987 : 12) Deret geometri berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n \quad , \qquad \text{dengan a} \neq 0$$

akan konvergen dan mempunyai jumlah

$$S = \frac{a}{a-x} \text{ , apabila } |x| < 1$$

Definisi 2.6 (Bunday, 1996:10) Jika N adalah suatu variabel acak diskrit yang diasumsikan nilainya n $(\mathrm{n} = 0,1,2,3, \ldots)$ dengan probabilitas P_n maka *probability generating function* (PGF) dari N didefinisikan sebagai

$$P(z) = E[z^N] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \tag{2.6}$$

P_n menyatakan peluang terdapat n pelanggan di dalam sistem antrian. $P(z)$ adalah rangkaian konvergen dan fungsi *well-behaved* dari z untuk $|z| \leq 1$.

untuk $z = 1$, diperoleh

$$P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \tag{2.7}$$

turunan pertama dari $P(z)$ adalah

$$P'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n z^{n-1} \tag{2.8}$$

sehingga untuk $z = 1$, diperoleh

$$P'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

berdasarkan Definisi (2.3) maka diperoleh

$$P'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = E(N) \tag{2.9}$$

demikian pula

$$P''(1) = E[N(N-1)] = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P_n$$

D. Notasi Kendal

Notasi baku untuk memodelkan suatu sistem antrian pertama kali dikemukakan oleh D.G.Kendall dalam bentuk $a/b/c$, dan dikenal sebagai notasi kendall. Namun, A.M. Lee menambahkan simbol d dan e sehingga menjadi $a/b/c/d/e$ yang disebut notasi Kendall – Lee (Taha, 1996:627).

Menurut Taha (1997:186), notasi Kendall – Lee tersebut perlu ditambahkan dengan simbol f. Sehingga karakteristik suatu antrian dapat dinotasikan dalam format baku $(a/b/c)$: $(d/e/f)$. Notasi dari a sampai f tersebut berturur – turut menyatakan distribusi waktu antar kedatangan, distribusi pelayanan, jumlah *server*, disiplin antrian, kapasitas sistem, dan ukuran sumber pemanggilan. Notasi a sampai f dapat digantikan dengan simbol – simbol yang diberikan dalam tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 Simbol – Simbol Pengganti Notasi Kendall – Lee

Notasi	Simbol	Keterangan
a dan b	M	Markov menyatakan kedatangan dan kepergian berdistribusi Poisson (waktu antar kedatngan berdistribusi Eksponensial).
	D	Deterministik menyatakan waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan konstan.
	E_k	Waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan berdistribusi Erlang
	GI	Distribusi independen umum dari kedatangan (atau waktu antar kedatangan)
	G	Distribusi umum dari keberangkatan (atau waktu pelayanan)
d	*FCFS/FIFO*	*First Come First Served/ First In First Out*
	LCFS/LIFO	*Last Come First Served/ Last In First Out*
	SIRO	*Service in random order*
	PS	*Priority service*
c, e, f	*1, 2, 3,… ∞*	

E. Proses Kelahiran dan Kematian (*Birth-Death Processes*)

Proses kedatangan dan kepergian dalam suatu sistem antrian merupakan proses kelahiran dan kematian (*birth – death processe*). Kelahiran terjadi jika seorang pelanggan memasuki sistem antrian dan kematian terjadi jika seorang pelanggan meninggalkan sistem antrian tersebut.

Menurut Winston (1994:115), proses kelahiran dan kematian merupakan proses penjumlahan dalam suatu sistem dimana keadaan sistem selalu menghasilkan n bilangan bulat positif. Keadaan sistem pada saat t

didefinisikan sebagai selisih antara banyaknya kelahiran dan kematian pada saat t. Dengan demeikian, keadaan sistem pada saat t dalam suatu sistem antrian yang dinotasikan dengan $N(t)$, adalah selisih antara banyaknya kedatangan dan kepergian pada saat t.

Misal, banyaknya kedatangan pelanggan pada saat t dinotasikan dengan $X(t)$ dan banyaknya kepergian pada saat t dinotasikan dengan $Y(t)$, maka banyaknya pelanggan yang berada dalam sistem pada saat t adalah $N(t) = X(t) - Y(t)$. Sedangkan peluang terdapat n pelanggan dalam sistem antrian pada saat t dinotasikan dengan $P(N(t) = n)$ atau $P_n(t)$.

Akan dicari peluang terdapat n pelanggan dalam suatu sistem antrian pada saat t. Namun sebelumnya, diberikan Definisi – Definisi yang digunakan pada pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.7 (Hogg dan Tanis, 2001 : 66) Kejadian $A_1, A_2, A_3, \ldots A_k$ dikatakan kejadian – kejadian yang saling asing jika $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.

Definisi 2.8 (Bain dan Engelhardt, 1992:9) Jika sebuah percobaan $A_1, A_2, A_3, \ldots$ adalah kejadian yang mungkin terjadi pada ruang sampel S. Fungsi peluang merupakan fungsi yang mengawankan setiap kejadian A dengan bilangan real $P(A)$ dan $P(A)$ disebut peluang kejadian A jika memenuhi ketentuan berikut.

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Jika A_1, A_2, A_3, A_4 ... adalah kejadian yang saling asing, maka P$(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \ldots)$ = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + ...

Definisi 2.9 (Hogg dan Tanis, 2001 : 96) Kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika dan hanya jika

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Jika kejadian A dan B tidak memenuhi kondisi tersebut maka disebut kejadian bergantung.

Definisi 2.10 (Ross, 1999 : 60) $o(\Delta t)$ merupakan suatu fungsi atas Δt dengan ketentuan $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

Definisi 2.11 (Purcell & Varberg, 1987 : 141)

$$f^{'}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{df(t)}{dt}$$

Asal limit fungsinya ada.

Teorema 2.1 (Bartle dan Sherbert, 2000 : 176 – 177) Misal f dan g didefinisikan pada $[a, b]$, misal $f(a) = g(a) = 0$, sehingga $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$ dikatakan *indeterminate* dan $g(x) \neq 0$ maka limit dari $\frac{f}{g}$ di a ada dan sama dengan $\frac{f^{'}(a)}{g^{'}(a)}$.

sehingga

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{'}(a)}{g^{'}(a)}$$

Teorema tersebut disebut dengan aturan L'Hopital.

Bukti:

Jika $f(a) = g(a) = 0$ untuk $a < x < b$ berlaku

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

maka $f^{'}(x)/g^{'}(x)$ berdasarkan Definisi (2.11) adalah

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Terbukti bahwa $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Menurut Wospakrik (1996:297), asumsi – asumsi proses kelahiran dan kematian dalam antrian sebagai berikut:

i) Semua kejadian pada suatu interval waktu yang sangat pendek (Δt) mempunyai probabilitas yang sama apabila sebanyak n pelanggan berada dalam sistem antrian, maka probabilitas sebuah kedatangan terjadi antara t dan $t+\Delta t$, dinyatakan dengan

$$P\left(\left(X(t+\Delta t)-X(t)\right)=1\right)=\lambda_n\Delta t+\mathrm{o}(\Delta \mathrm{t})$$

λ merupakan laju kedatangan.

ii) Probabilitas tidak ada kedatangan antara t dan $t+\Delta t$, dinyatakan dengan

$$P\left(\left(X(t+\Delta t)-X(t)\right)=0\right)=1-\lambda_n\Delta t+\mathrm{o}(\Delta \mathrm{t})$$

iii) Probabilitas ada satu kepergian antara t dan $t+\Delta t$, dinyatakan dengan

$$P\left(\left(X(t+\Delta t)-X(t)\right)=1\right)=\mu_n\Delta t+o(\Delta t)$$

μ merupakan laju pelayanan.

iv) Probabilitas tidak ada kepergian antara t dan $t+\Delta t$, dinyatakan dengan

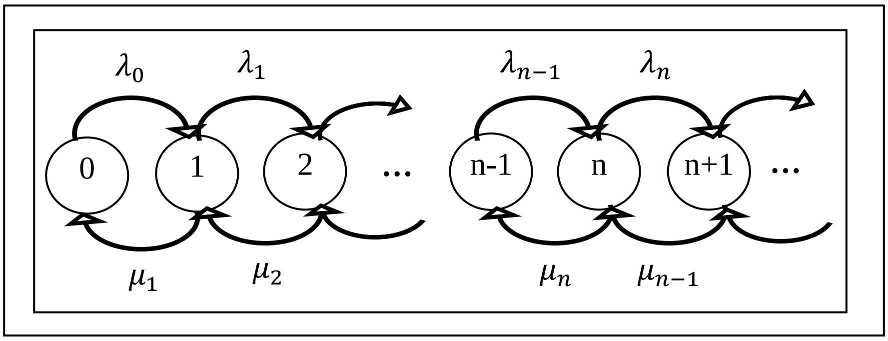
$$P\left(\left(X(t+\Delta t)-X(t)\right)=0\right)=1-\mu_n\Delta t+o(\Delta t)$$

v) Probalititas terjadi lebih dari satu kejadian pada selang waktu yang sangat pendek adalah sangat kecil sehingga dapat diabaikan, dapat dinyatakan dengan

$$P\left(\left(X(t+\Delta t)-X(t)\right)>1\right)=o(\Delta t)$$

vi) Proses kedatangan dan pelayanan merupakan kejadian yang saling bebas.

Berdasarkan asumsi (vi), kedatangan dan kepergian merupakan kejadian – kejadian yang saling bebas, sehingga kejadian – kejadian pada interval waktu tertentu tidak mempengaruhi kejadian pada interval waktu sebelumnya atau kejadian pada interval waktu sesudahnya. Proses kedatangan dan kepergian dalam suatu sistem antrian sesuai asumsi – asumsi diatas ditunjukkan pada Gambar 2.6 berikut.



Gambar 2.6 Proses Kedatangan dan Kepergian dalam Sistem Antrian

Berdasarkan Gambar 2.6 kemungkinan – kemungkinan kejadian saling asing yang dapat terjadi jika terdapat n $(n>0)$ pelanggan dalam sistem pada waktu $t+\Delta t$ adalah sebagai berikut.

Tabel 2.2 Kemungkinan Kejadian Terdapat n Pelanggan dalam Sistem Pada Saat $t + \Delta t$

Kasus	Jumlah Pelanggan pada Waktu (t)	Jumlah Kedatangan pada Waktu (Δt)	Jumlah Kepergian pada Waktu (Δt)	Jumlah Pelanggan pada Waktu (t+Δt)
1	n	0	0	n
2	n+1	0	1	n
3	n-1	1	0	n
4	n	1	1	n

Menurut asumsi (vi), kedatangan dan kepergian merupakan kejadian – kejadian yang saling bebas, sehingga peluang dari masing – masing kejadian tersebut adalah sebagai berikut:

1. Probabilitas kasus 1 $= P_n(t)\big(1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)\big)(1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t))$
2. Probabilitas kasus 2 $= P_{n+1}(t)\big(1 - \lambda_{n+1} \Delta t + o(\Delta t)\big)(\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t)$
3. Probabilitas kasus 3 $= P_{n-1}(t)\big(\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t)\big)(1 - \mu_{n-1} \Delta t + o(\Delta t)$

   $= P_{n-1}(t)\big(\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t)\big)$
4. Probabilitas kasus 4 adalah $o(\Delta t)$, sesuai dengan asumsi v

Karena kasus – kasus tersebut saling asing, maka probabilitas terdapat n pelanggan dalam sistem ($n \geq 1$) pada saat ($t + \Delta t$) dinyatakan dengan:

$P_n(t + \Delta t) = P$ (kasus 1 atau kasus 2 atau kasus 3 atau kasus 4)

$P_n(t + \Delta t) =$ probabilitas kasus 1 + probabilitas kasus 2 + probabilitas kasus 3 + probabilitas kasus 4

$$
\begin{aligned}
P_n(t + \Delta t) = P_n(t)\big(1 - \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)\big)\big(1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)\big) \\
+ P_{n+1}(t)\big(1 - \lambda_{n+1} \Delta t + o(\Delta t)\big)(\mu_{n+1} \Delta t + o(\Delta t) \\
+ P_{n-1}(t)\big(\lambda_{n-1} \Delta t + o(\Delta t)\big) + o(\Delta t) \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t) - P_n(t)(\lambda_n \Delta t) - P_n(t)(\mu_n \Delta t) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}\Delta t)$$
$$+P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}\Delta t) + o(\Delta t) \qquad (2.11)$$

pada Persamaan (2.11) dikurangkan $P_n(t)$ pada ruas kanan dan kiri kemudian dibagi dengan Δt maka didapatkan:

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n) - P_n(t)(\mu_n) +$$
$$\frac{\mathrm{o}(\Delta \mathrm{t})}{\Delta \mathrm{t}} \qquad (2.12)$$

karena Δt sangat kecil dan mendekati nol, maka berdasarkan Definisi 2.11 didapatkan:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \Big[P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) -$$
$$P_n(t)(\lambda_n) - P_n(t)(\mu_n) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\Big]$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n) - P_n(t)(\mu_n)$$
$$= -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + (\mu_{n+1})P_{n+1}(t) + (\lambda_{n-1})P_{n-1}(t) \qquad (2.13)$$

Persamaan (2.13) merupakan dasar perhitungan probabilitas terdapat n pelanggan pada proses kedatangan murni dan kepergian murni. Persamaan (2.13) disebut sebagai Persamaan Kolmogorov untuk $n \geq 1$.

Selanjutnya akan dibahas secara khusus probabilitas terdapat n pelanggan untuk nilai $n = 0$. Pada saat jumlah pelanggan dalam sistem adalah nol, maka probabilitas terjadinya nol kepergian pelanggan pada kasus 1 adalah satu.

Probabilitas terdapat n pelanggan, dengan $n = 0$ dalam waktu $(t + \Delta t)$ adalah

$P_n(t + \Delta t) = P$ (Kasus 1 atau Kasus 2 atau Kasus 4)

$P_n(t + \Delta t) =$ Probabilis Kasus 1 + Probabilitas Kasus 2 + Probabilitas Kasus 4

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)\big(1-\lambda_n\Delta t + o(\Delta t)\big)(1) + P_{n+1}(t)\big(1-\lambda_{n+1}\Delta t + o(\Delta t)\big)\big(\mu_{n+1}\Delta t + o(\Delta t)\big) + o(\Delta t)$$

nilai $n = 0$ maka diperoleh

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)\,\big(1-\lambda_0\Delta t + o(\Delta t)\big)(1) + P_1(t)\big(1-\lambda_1\Delta t + o(\Delta t)\big)\,\big(\mu_1\Delta t + o(\Delta t)\big) + o(\Delta t)$$

$$= P_0(t)\,\big(1-\lambda_0\Delta t + o(\Delta t)\big) + P_1(t)(\mu_1\Delta t) + o(\Delta t)$$

$$= P_0(t)(\lambda_0\Delta t) + P_1(t)(\mu_1\Delta t) + o(\Delta t)$$

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t) - P_0(t)(\lambda_0\Delta t) + P_1(t)(\mu_1\Delta t) + o(\Delta t) \qquad (2.14)$$

pada Persamaan (2.14) dikurangkan $P_0(t)$ pada ruas kanan dan ruas kiri, kemudian dibagi dengan Δt, maka diperoleh

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

karena Δt sangat kecil dan mendekati nol, maka berdasarkan Definisi 2.11 didapatkan:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right]$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0) \qquad , n = 0 \qquad (2.15)$$

Persamaan (2.13) dan (2.15) merupakan Persamaan Kolmogorov yang digunakan sebagai dasar untuk menentukan peluang bahwa ada n pelanggan dengan $n \geq 1$ dan $n = 0$ pada selang waktu $(t, t+\Delta t)$, yang dapat diringkas sebagai berikut

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + (\mu_{n+1})P_{n+1}(t) + P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}), \qquad n \geq 1$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)\mu_1 - P_0(t)(\lambda_0), \qquad n = 0$$

F. Distribusi Kedatangan

Distribusi kedatangan berhubungan dengan peluang terdapat n kedatangan pelanggan dalam suatu sistem antrian pada interval waktu tertentu. Kedatangan yang dimaksud dalam pembahasan ini adalah kedatangan murni, yaitu kedatangan tanpa disertai kepergian, maka laju kepergian $\mu_n = 0, \forall n \geq 0$ (Dimyati, 1999 : 358 – 359).

Peluang terdapat n $(n \geq 0)$ kedatangan pada waktu t dapat diperoleh dengan mensubtitusikan $\mu_n = 0$ dan $\lambda_n = \lambda$ ke Persamaan (2.13) dan Persamaan (2.15) sehingga diperoleh sebagai berikut

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \tag{2.16}$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t), \quad n > 0 \tag{2.17}$$

Definisi 2.12 (Kreeyszig, 2003:33) Persamaan diferensial orde satu dapat dinyatakan sebagai

$$y = ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

Persamaan (2.16) dapat dinyatakan sebagai Persamaan differensial linear orde satu dengan $P(x) = \lambda$ dan $Q(x) = 0$. Maka penyelesaiannya adalah

$$P_0(t) = ce^{-\int \lambda dt}$$

$$= ce^{-\lambda t}$$

Diasumsikan bahwa proses kedatangan murni dimulai pada saat sistem memiliki nol pelanggan, sehingga peluang terdapat nol pelanggan $(n = 0)$ dalam sistem pada saat $t = 0$ adalah 1 dinotasikan dengan $P_0(0) = 1$.

Peluang ada pelanggan $(n > 0)$ pada $t = 0$ adalah 0, hal ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n > 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

dengan demikian

$$P_0(0) = ce^{-\lambda.0} = 1$$

dan diperoleh $c = 1$

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{2.19}$$

Jadi Persamaan (2.19) merupakan solusi untuk Persamaan (2.16).

Selanjutnya akan dicari solusi untuk Persamaan (2.17) sebagai berikut. Berdasarkan Definisi (2.12), Persamaan (2.17) dapat dinyatakan sebagai Persamaan differensial linear orde satu dengan $P(x) = \lambda$ dan $Q(x) = \lambda P_{n-1}(t)$. Maka penyelesaiannya adalah

$$P_n(t) = ce^{-\int \lambda dt} + e^{-\int \lambda dt} \int \lambda\, e^{\int \lambda dt} P_{n-1}(t) dt$$

$$= ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_{n-1}(t)\, dt \tag{2.20}$$

untuk nilai $n = 1$ diperoleh

$$P_1(t) = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_0(t)\, dt \tag{2.21}$$

Persamaan (2.19) disubsitusikan ke Persamaan (2.21) diperoleh

$$P_1(t) = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= ce^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} \tag{2.22}$$

berdasarkan Persamaan (2.18) maka dari Persamaan (2.22) didapatkan

$$P_1(0) = ce^{-\lambda.0} + \lambda.0.e^{-\lambda.0} = 0$$

sehingga diperoleh nilai $c = 0$, maka Persamaan (2.22) menjadi

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t} \tag{2.23}$$

Jadi Persamaan (2.23) adalah solusi Persamaan (2.17) untuk $n = 1$

Selanjutnya dicari solusi Persamaan (2.17) untuk $n = 2$ sebagai berikut untuk $n = 2$ Persamaan (2.20) menjadi

$$P_2(t) = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_1(t)\, dt \tag{2.24}$$

Persamaan (2.23) disubtitusikan ke Persamaan (2.24) didapatkan

$$P_2(t) = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} \lambda t e^{-\lambda t}\, dt$$

$$= ce^{-\lambda t} + \lambda^2 e^{-\lambda t} \int t\, dt$$

$$= ce^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t} \tag{2.25}$$

berdasarkan Persamaan (2.18) maka dari Persamaan (2.25) didapatkan

$$P_2(0) = ce^{-\lambda.0} + \frac{(\lambda.0)^2}{2} e^{-\lambda.0} = 0$$

sehingga diperoleh nilai $c = 0$, maka Persamaan (2.25) menjadi

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t} \tag{2.26}$$

Jadi Persamaan (2.26) adalah solusi Persamaan (2.25) untuk $n = 2$

Dari Persamaan (2.19), (2.23), dan (2.26) dapat disimpulkan bahwa solusi umum dari Persamaan (2.16) dan Persamaan (2.17) adalah

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \tag{2.27}$$

Bukti bahwa Persamaan (2.27) adalah solusi umum dari Persamaan (2.16) dan Persamaan (2.17) adalah sebagai berikut

Langkah – langkah pembuktian dengan induksi matematika

1. Persamaan (2.23) yaitu $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ membuktikan bahwa Persamaan (2.27) merupakan penyelesaian Persamaan (2.17) untuk $n = 1$.
2. Diasumsikan Persamaan (2.27) merupakan penyelesaian Persamaan (2.17) untuk $n = k$, maka $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$
3. Akan dibuktikan bahwa Persamaan (2.27) merupakan penyelesaian dari Persamaan (2.26) untuk $n = k + 1$

   untuk $n = k + 1$, Persamaan (2.17) menjadi

$$\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} = \lambda P_k(t) - \lambda P_{k+1}(t) \qquad (2.28)$$

asumsi 2 didistribusikan ke Persamaan (2.28) sehingga menjadi

$$\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} = \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} - \lambda P_{k+1}(t) \qquad (2.29)$$

Persamaan (2.29) merupakan Persamaan differensial orde satu dengan $p(x) = \lambda$ dan $Q(x) = \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t}$, sehingga penyelesaiannya adalah

$$P_{k+1}(t) = ce^{-\int \lambda dt} + e^{-\int \lambda dt} \int \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{\int \lambda dt} dt$$

$$= ce^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dt$$

$$= ce^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \lambda^{k+1} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$= ce^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t} \qquad (2.30)$$

berdasarkan Persamaan (2.18) maka dari Persamaan (2.30) didapatkan

$$P_{k+1}(0) = ce^{-\lambda.0} + \frac{(\lambda.0)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda.0}$$

sehingga diperoleh nilai $c = 0$, maka Persamaan (2.30) menjadi

$$P_{k+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda t} \tag{2.31}$$

Persamaan (2.31) merupakan penyelesaian dari Persamaan (2.17) untuk $n = k + 1$ dan memenuhi Persamaan (2.27)

Jadi, $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ merupakan solusi umum dari Persamaan (2.16) dan Persamaan (2.17). Dengan demikian, berdasarkan Definisi (2.2) dapat disimpulkan bahwa kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson.

Teorema 2.2 (Bronson, 1966:305) Jika kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson maka waktu antar kedatangan pelanggan berdistribusi Eksponensial.

Bukti:

Berdasarkan uraian sebelumnya, diketahui bahwa kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson. $T_n(n > 0)$ adalah waktu antara $(n-1)$ kedatangan sampai n kedatangan. Barisan $\{T_n, n = 1,2,3, \ldots\}$ merupakan barisan waktu antar kedatangan yang saling asing dan saling bebas.

Ambil T_1 yang merupakan waktu antara tidak ada pelanggan dalam sistem dan ketika ada kedatangan pertama. Akan ditunjukkan bahwa T_1 berdistribusi Eksponensial.

Ambil $t < T_1$, maka banyaknya kedatangan pada waktu t adalah nol, artinya

$$\begin{aligned} P_n(T_1 > t) &= P \text{ (tidak ada kedatangan selama waktu } t\text{)} \\ &= P_0(t) \end{aligned}$$

berdasarkan Persamaan (2.19), $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ dengan λ menyatakan laju kedatangan rata – rata, maka fungsi distribusi kumulatif dari T_1 dengan $t \geq 0$ adalah

$$
\begin{aligned}
F(t) &= P(T_1 \leq t) \\
&= 1 - P(T_1 > t) \\
&= 1 - P_0(t) \\
&= 1 - e^{-\lambda t}
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

berdasarkan Definisi (2.1), Persamaan (2.32) merupakan distribusi kumulatif dari distribusi Eksponensial yang secara umum ditulis

$$
F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}
$$

sehingga fungsi densitas peluang dari T_1 untuk $t \geq 0$ adalah

$$
f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \tag{2.33}
$$

Berdasarkan Definisi (2.1), T_1 merupakan peubah acak yang berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ. Sesuai dengan asumsi bahwa barisan waktu antar kedatangan pada sistem antrian adalah saling bebas, maka pembuktian diatas juga berlaku untuk $\{T_n\}, n > 0$. Jadi terbukti bahwa waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial.

G. Distribusi Kepergian

Distribusi kepergian berhubungan dengan peluang terdapat n kepergian pelanggan dalam suatu sistem antrian pada interval waktu tertentu. Kepergian yang dimaksud dalam pembahasan ini adalah kepergian murni, yaitu kepergian yang tanpa disertai kedatangan, sehingga laju kedatangan $\lambda_n = 0, \forall\, n \geq 0$.

Diasumsikan bahwa laju kepergian tidak tergantung pada banyaknya pelanggan yang berada dalam sistem, sehingga $\mu_n = \mu, \forall\, n \geq 0$. Peluang terdapat $n(n \geq 0)$ kepergian selama waktu t dapat diperoleh dengan mensubsitusikan $\lambda_n = 0$ dan $\mu_n = \mu$ ke Persamaan (2.13) dan Persamaan (2.15) sehingga diperoleh

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_{n+1}(t) \tag{2.34}$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), \qquad n > 0 \tag{2.35}$$

Akan ditunjukkan bahwa kepergian pelanggan berdistribusi Poisson. Jika jumlah pelanggan dalam sistem antrian selama t adalah $n = N$, maka $P_{n+1} = 0\,, n \geq N$ sehinga untuk $n \geq N$ berlaku

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t) \tag{2.36}$$

Sedangkan untuk $0 < n < N$ berlaku

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) \tag{2.37}$$

berdasarkan Definisi (2.12), Persamaan (2.16) dan Persamaan (2.37) dapat dinyatakan sebagai Persamaan differensial orde satu. Sehingga penyelesaian Persamaan (2.36) adalah

$$P_n(t) = ce^{-\mu t}\,, \qquad n \geq N$$

Diasumsikan bahwa proses kepergian murni dimulai $(t = 0)$ pada saat sistem memiliki $n = N$ pelanggan dalam sistem. Sehingga peluang terdapat N pelanggan dalam sistem pada kondisi awal $(t = 0)$ dinotasikan $P_N(0)$ adalah 1. Jika $0 \leq n < N$ maka $P_N(0) = 0$. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut

$$P_N(0) = \begin{cases} 0 & ,0 \leq n < N \\ 1 & ,n = N \end{cases} \tag{2.38}$$

dengan demikian, $P_N(0) = ce^{-\mu.0} = 1$

maka diperoleh nilai $c = 1$, oleh karena itu diperoleh

$$P_n(t) = e^{-\mu t} \tag{2.39}$$

Selanjutnya akan dicari solusi untuk Persamaan (2.37) sebagai berikut,

Penyelesaian dari Persamaan (2.37) adalah

$$P_n(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} P_{n+1}(t)dt, \quad 0 < n < N \tag{2.40}$$

untuk $n = N - 1$ maka

$$P_{N-1}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} P_N(t)dt \tag{2.41}$$

subsitusi Persamaan (2.39) ke Persamaan (2.41) segingga diperoleh

$$P_{N-1}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} e^{-\mu t}dt$$

$$= ce^{-\mu t} + \mu te^{-\mu t} \tag{2.42}$$

berdasarkan Persamaan (2.38), maka

$$P_{N-1}(0) = ce^{-\mu.0} + \mu.0.e^{-\mu.0}$$

sehingga $c = 0$, maka Persamaan (2.44) menjadi

$$P_{N-1}(t) = \mu te^{-\mu t} \tag{2.43}$$

untuk $n = N - 2$, Persamaan (2.42) menjadi

$$P_{N-2}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} P_{N-1}(t)dt \tag{2.44}$$

Persamaan (2.43) disubsitusikan ke Persamaan (2.44) sehingga diperoleh

$$P_{N-2}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int e^{\mu t} \mu te^{-\mu t}dt$$

$$= ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t} \int \mu t\, dt$$

$$= ce^{-\mu t} + \frac{(\mu t)^2}{2} e^{-\mu t} \tag{2.45}$$

berdasarkan Persamaan (2.38) maka

$$P_{N-2}(0) = ce^{-\mu.0} + \frac{(\mu.0)^2}{2} e^{-\mu.0} = 0$$

sehingga diperoleh $c = 0$, maka Persamaan (2.45) menjadi

$$P_{N-2}(t) = \frac{(\mu t)^2}{2} e^{-\mu t} \tag{2.46}$$

Dari Persamaan (2.39), (2.43), dan Persamaan (2.46) dapat disimpulkan bahwa penyelesaian umum dari Persamaan (2.36) dan Persamaan (2.37) adalah

$$P_n(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}$$

Pembuktiannya analog dengan pembuktian distribusi kedatangan yang telah dibahas pada subbab sebelumnya. Jadi kepergian pelanggan juga berdistribusi Poisson, dengan parameter μ.

Teorema 2.3 (Wagner, 1978 : 850) Jika kepergian pelanggan berdistribusi Poisson maka waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.

Bukti :

Misal keadaan awal suatu sistem antrian sebanyak $n = N$ pelanggan. Ambil T_1 sebagai waktu pelayanan pertama, T_n, $n > 1$ menunjukkan waktu pelayanan kepada pelanggan ke n sehingga barisan $\{T_n\}$ dengan $n = 1,2,3, ...$ merupakan barisan waktu pelayanan yang saling asing dan saling bebas.

Akan ditunjukkan bahwa T_1 berdistribusi Eksponensial. Ambil $t < T_1$, maka jumlah kepergian pada waktu t adalah nol, artinya

$$P_N(T_1 > t) = P \text{ (Terdapat N pelanggan pada waktu } t)$$

$$= P_N(t)$$

berdasarkan Persamaan (2.39), $P_N(t) = e^{-\mu t}$ dengan μ menyatakan laju pelayanan rata – rata, maka fungsi distribusi kumulatif dari T_1 dengan $t \geq 0$ adalah

$$\begin{aligned} F(t) &= P(T_1 \leq t) \\ &= 1 - P(T_1 > t) \\ &= 1 - P_N(t) \\ &= 1 - e^{-\mu t} \end{aligned} \tag{2.47}$$

Berdasarkan Definisi (2.1), Persamaan (2.47) merupakan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Eksponensial yang secara umum ditulis

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

sehingga fungsi densitas peluang dari T_1 untuk $t \geq 0$ adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \mu e^{-\mu t} \tag{2.48}$$

Berdasarkan Definisi (2.1), T_1 merupakan variabel acak yang berdistribusi Eksponensial dengan parameter μ. Sesuai dengan asumsi bahwa barisan waktu pelayanan pada sistem antrian adalah saling bebas, maka pembuktian diatas juga berlaku untuk $\{T_n\}$, $n > 0$. Jadi terbukti bahwa waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.

H. Proses Kedatangan dan Kepergian *Steady State*

Kondisi *steady state* yaitu keadaan sistem yang tidak tergantung pada keadaan awal maupun waktu yang telah dilalui. Jika suatu sistem antrian telah mencapai kondisi *steady state* maka peluang terdapat n pelanggan dalam sistem pada waktu $t(P_n(t))$ tidak tergantung pada waktu (Ecker dan Kupferschmid, 1988:394).

Kondisi *steady state* terjadi ketika $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ dan $\lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$ sehingga $P_n(t) = P_n$ untuk semua t, artinya P_n tidak tergantung pada waktu.

Proses kedatangan dan kepergian pada pembahasan sebelumnya menghasilkan Persamaan (2.13) dan Persamaan (2.15). Untuk memperoleh kondisi *steady state*, substitusikan $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ dan $P_n(t) = P_n$ pada Persamaan (2.13) dan Persamaan (2.15), sehingga diperoleh Persamaan kesetimbangan sebagai berikut

$$0 = -(\lambda_n + \mu_n)P_n + (\mu_{n+1})P_{n+1} + P_{n-1}(\lambda_{n-1}) \quad n \geq 1 \tag{2.49}$$

$$0 = P_1(\mu_1) - P_0(\lambda_0), \qquad n = 0 \tag{2.50}$$

atau

$$P_{n+1} = \frac{(\lambda_n + \mu_n)P_n}{\mu_{n+1}} - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}} P_{n-1}, \qquad n > 0 \tag{2.51}$$

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0, \qquad n = 0 \tag{2.52}$$

akan dicari penyelesaian umum dari Persamaan (2.49) dan (2.50)

untuk $n = 1$, maka Persamaan (2.51) menjadi

$$P_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)P_1}{\mu_2} - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0 \tag{2.53}$$

selanjutnya Persamaan (2.52) disubtitusikan ke Persamaan (2.53), sehingga diperoleh

$$P_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_0 + \mu_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1} P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$$

untuk $n = 2$ diperoleh

$$P_3 = \frac{(\lambda_2 + \mu_2)P_2}{\mu_3} - \frac{\lambda_1}{\mu_3} P_1$$

selanjutnya akan dibuktikan bahwa penyelesaian umum dari Persamaan (2.49) dan (2.50) adalah

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_1} P_0$$

$$= P_0 \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \right), \tag{2.54}$$

Bukti dengan induksi matematika:

1. Untuk $n = 1$ maka

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

   dan $n = 2$ maka

$$P_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$$

2. Diasumsikan bahwa Persamaan (2.54) berlaku untuk $n = k$ maka

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2} \cdots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1} P_0$$

3. Akan dibuktikan Persamaan (2.54) berlaku untuk $n = k + 1$

$$P_{k+1} = \frac{\lambda_k \lambda_{k-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{k+1} \mu_k \cdots \mu_1} P_0$$

subsitusikan Persamaan (2.54) ke Persamaan (2.51), dengan $n = k + 1$ diperoleh

$$P_{k+2} = \frac{(\lambda_{k+1} + \mu_{k+1})}{\mu_{k+2}} \frac{\lambda_k \lambda_{k-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{k+1} \mu_k \cdots \mu_1} P_0 - \frac{\lambda_k}{\mu_{k+2}} \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \cdots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1} P_0$$

$$= \frac{\lambda_{k+1} \lambda_k \lambda_{k-1} \cdots \lambda_0 P_0}{\mu_{k+2} \mu_{k+1} \mu_k \cdots \mu_1} + \frac{\mu_{k+1} \lambda_k \lambda_{k-1} \cdots \lambda_0 P_0}{\mu_{k+2} \mu_{k+1} \mu_k \cdots \mu_1} - \frac{\lambda_k}{\mu_{k+2}} \frac{\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \cdots \lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1} \cdots \mu_1} P_0$$

$$= \frac{\lambda_{k+1} \lambda_k \lambda_{k-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{k+2} \mu_{k+1} \mu_k \cdots \mu_1} P_0 \tag{2.55}$$

Jadi terbukti bahwa Persamaan (2.54) berlaku untuk $n = k + 1$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa Persamaan (2.54) menyatakan peluang terdapat n pelanggan dalam keadaan *steady state* (P_n), $n > 0$.

I. Persamaan Kolmogorov ($M/M/1$)

Pada subbab sebelumnya telah dibahas masalah proses kelahiran dan kematian. Dengan mensubtitusikan $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = \mu$ ke Persamaan (2.13) dan Persamaan (2.15), akan menghasilkan Persamaan Kolmogorov pada sistem antrian ($M/M/1$) sebagai berikut.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_n(t) + (\mu)P_{n+1}(t) + (\lambda)P_{n-1}(t) \tag{2.56}$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = (\mu)P_1(t) - (\lambda)P_0(t) \tag{2.57}$$

J. Ukuran Keefektifan Sistem Antrian

Menurut Taha (1997, 189:190), ukuran keefektifan suatu sistem antrian dapat ditentukan setelah probabilitas *steady state* diketahui. Ukuran – ukuran keefektifan suatu sistem tersebut antara lain:

1. Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem antrian (L_s)
2. Nilai harapan banyaknya pelanggan dalan antrian (L_q)
3. Nilai harapan waktu tunggu dalam sistem antrian (W_s)
4. Nilai harapan waktu tunggu dalam antrian (W_q)

Sebelum membahas lebih lanjut, akan diuraikan lima Definisi yang mendukung pembahasan ukuran keefektifan suatu sistem.

Definisi 2.13 (Taha, 1993:596) Jumlah pelanggan dalam sistem adalah jumlah pelanggan dalam antrian ditambah jumlah pelanggan yang sedang mendapat layanan.

Definisi 2.14 (Taha, 1993:596) Laju kedatangan efektif merupakan laju kedatangan rata – rata dalam waktu yang panjang. Laju kedatangan efektif dinotasikan λ_{eff} dan dinyatakan dengan

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n \qquad (2.58)$$

λ_n merupakan laju kedatangan jika ada n pelanggan dalam sistem, jika laju kedatangan konstan untuk semua n, maka cukup ditulis dengan λ.

(Dimyati, 1993 : 353)

Definisi 2.15 (Dimyati, 2003:373) Laju pelayanan rata – rata untuk seluruh pelayan dalam sistem antrian adalah laju pelayanan rata – rata diamana pelanggan yang sudah mendapat pelayanan meninggalkan sistem antrian. Laju pelayanan rata – rata untuk seluruh pelayan dinyatakan dengan μ.

Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem antrian (L_s) merupakan jumlah dari perkalian keseluruhan pelanggan dalam sistem dengan peluang terdapat n pelanggan (Ecker, 1988:390), dinyatakan dengan

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n \qquad (2.59)$$

Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam antrian (L_q) merupakan jumlah dari perkalian pelanggan dalam antrian dengan peluang terdapat n pelanggan (Hiller & Lieberman, 2011:852), dinyatakan dengan

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)P_n \tag{2.60}$$

Apabila W_s merupakan waktu menunggu pelanggan dalam sistem antrian dan W_q merupakan waktu menunggu pelanggan dalam antrian, maka hubungan W_s, W_q, L_s, L_q dinyatakan dengan

$$L_s = \lambda W_s \tag{2.61}$$

$$L_q = \lambda W_q \tag{2.62}$$

Persamaan (2.61) dan (2.62) dikenal dengan formula *Little Law*, diperkenalkan pertama kali oleh John D.C Little pada tahun1961 (Gross dan Harris, 1998:11).

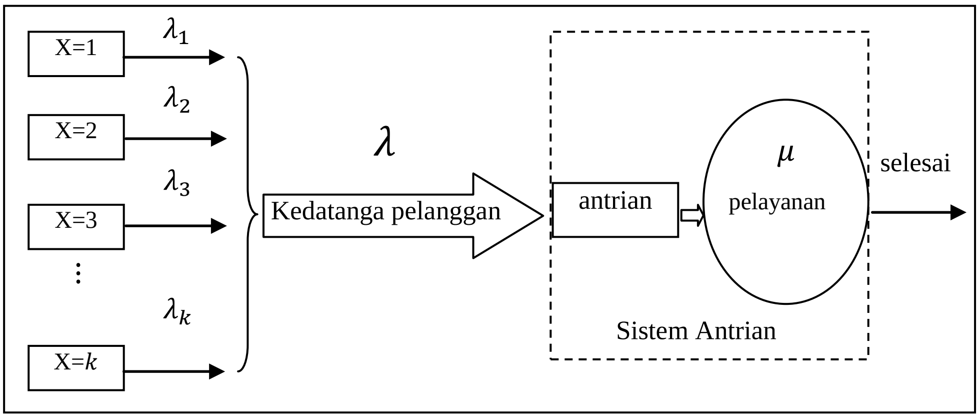
K. Antrian Kedatangan Berkelompok (*Batch Arrival*) Satu *Server*

1. Pola Kedatangan Berkelompok (*Batch Arrival*)

   Pada sistem antrian ini pelanggan datang secara berkelompok dengan ukuran kelompok tersebut adalah X, dimana secara umum X adalah variabel acak positif. Pada pembahasan ini, pelanggan datang berdasarkan distribusi Poisson dengan laju kedatangan λ, dan terdapat sebuah *server* yang memiliki waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial dengan laju pelayanan μ, dimana pelanggan dilayani secara individu dengan disiplin antrian *FIFO* (*First In First Out*). Desain pelayanan pada sistem antrian ini adalah *Single*

Channel single Phase. Notasi untuk model antrian satu *server* dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) tersebut adalah $M^X/M/1$.

Contoh situasi pada sistem antrian dimana pelanggan datang secara berkelompok yaitu kedatangan pelanggan secara berkelompok di sebuah restoran, dan surat – surat yang datang di kantor pos. ilustrasi sistem antrian dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*) terlihat dalam gambar 2.7 berikut ini.



Gambar 2.7 Sistem Antrian $\mathbf{M^X/M/1}$

Jika X adalah variabel acak yang menyatakan ukuran kelompok dengan fungsi peluang $a_k = P(X = k)$ dengan $k \geq 1$ maka berdasarkan Definisi (2.5) *probability generating function* (*PGF*) dari X adalah

$$A(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \ , |z| \leq 1 \tag{2.63}$$

turunan pertama dari $A(z)$ adalah

$$A'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

maka

$$A'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k, \tag{2.64}$$

berdasarkan Definisi (2.3), Persamaan (2.64) merupakan nilai harapan dari X dinyatakan dengan

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k = A'(1) \tag{2.65}$$

Dengan demikian nilai harapan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian dapat diperoleh dengan mencari $A'(1)$. Sehingga nilai harapan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian adalah

$$E(X) = A'(1) = \bar{a} \tag{2.66}$$

2. Proses Kedatangan dan Kepergian Pada Sistem Antrian $M^X/M/1$

Pada sistem antrian dengan pola kedatangan berkelompok (*batch arrival*), ukuran kelompok yang masuk ke dalam suatu sistem antrian merupakan variabel acak positif X, dengan fungsi peluang kedatangan suatu kelompok berukuran k adalah

$$P(X = k)a_k \text{ dengan } k \geq 1 \tag{2.67}$$

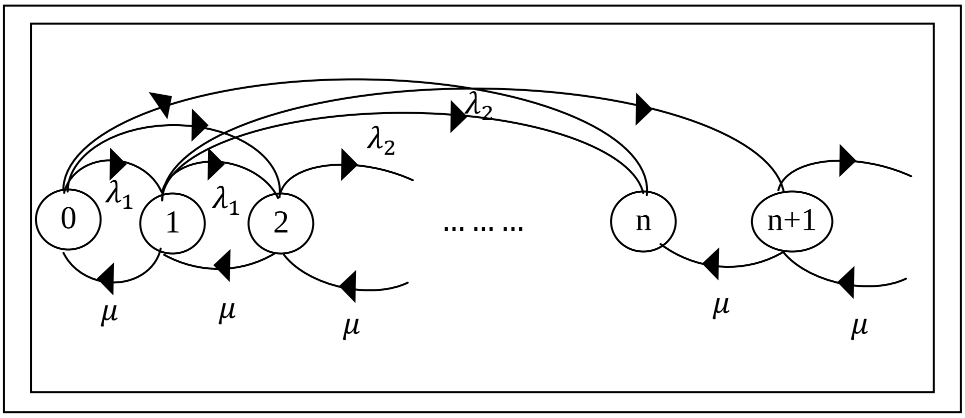
jika laju kedatangan suatu kelompok yang terdiri dari k pelanggan dinyatakan dengan λ_k maka

$$a_k = \frac{\lambda_k}{\lambda} \tag{2.68}$$

dengan λ adalah $\sum_k \lambda_k$.

karena proses kedatangan pada sistem antrian pola kedatangan berkelompok mengikuti distribusi Poisson dengan banyaknya kedatangan tiap satuan waktu adalah λ dan setiap kedatangan tersebut berukuran $\bar{a}$, maka banyaknya kedatangan tiap satuan waktu pada sistem antrian $M^X/M/1$ ini adalah $\lambda\bar{a}$.

Laju transisi untuk sistem anrian $M^X/M/1$ dapat dilihat dalam gambar 2.8 berikut



Gambar 2.8 Diagram Laju Transisi untuk Sistem Antrian $\mathbf{M^X/M/1}$ (Hadianti, 2006:176)

Berdasarkan Gambar 2.8, jika terdapat $n(n > 0)$ pelanggan kejadian – kejadian saling asing yang mungkin terjadi dengan pola kedatangan berkelompok yang berukuran k $(1 \leq k \leq n)$ dapat ditunjukkan pada tabel 2.3 sebagai berikut

Tabel 2.3 Kemungkinan Terdapat n Pelanggan dalam Sistem Antrian dengan Pola Kedatangan Berkelompok Pada $t + \Delta t$

Kasus	jumlah pelanggan pada waktu (t)	jumlah kedatangan pada waktu (Δt)	jumlah kepergian pada waktu (Δt)	Jumlah pelanggan pada waktu $(t + \Delta t)$
1	n	0	0	n
2	n+1	0	1	n
3	n-k	k	0	n
4	n	1	1	n

Jika terdapat n pelanggan dengan $n = 0$ maka kejadian – kejadian saling asing yang mungkin terjadi dapat dilihat pada tabel 2.4 sebagai berikut

Tabel 2.4 Kemungkinan Terdapat n Pelanggan dalam Sistem Antrian dengan Pola Kedatangan Berkelompok Pada $t + \Delta t$

Kasus	jumlah pelanggan pada waktu (t)	jumlah kedatangan pada waktu (Δt)	jumlah kepergian pada waktu (Δt)	Jumlah pelanggan pada waktu $(t + \Delta t)$
1	n	0	0	n
2	n+1	0	1	n
4	n	1	1	n

Pada model antrian dengan pola kedatangan berkelompok, probabilitas sebuah kedatangan yang terdiri dari k pelanggan terjadi antara t dan $(t + \Delta t)$ adalah $\lambda a_k \Delta t + o(\Delta t)$.

Probabilitas kasus 3 = probabilitas kedatangan berukuran 1 atau 2 atau 3 atau 4 dan seterusnya sampa n.

Probabilitas kasus 3 $= P_{n-1}(t)\big(\lambda a_1 \Delta t + o(\Delta t)\big) + P_{n-2}(t)\big(\lambda a_2 \Delta t + o(\Delta t)\big) + P_{n-3}(t)\big(\lambda a_3 \Delta t + o(\Delta t)\big) + \cdots + P_0(t)(\lambda a_n \Delta t + o(\Delta t))$

$$= \sum_{k=1}^{n} P_{n-k}\,(t) P_{n-1}(t) \lambda a_k \Delta t + o(\Delta t) \qquad (2.69)$$

Karena model antrian $M^X/M/1$ merupakan variasi dari model antrian $M/M/1$ maka proses kedatangan dan kepergian pada sistem antrian $M^X/M/1$ diperoleh berdasarkan proses kedatangan dan kepergian pada sistem antrian $M/M/1$. Pada proses kedatangan dan kepergian sistem antrian $M/M/1$ menghasilkan Persamaan Kolmogorov yaitu Persamaan

(2.56) dan (2.57). Sehingga proses kedatangan dan kepergian pada sistem antrian $M^X/M/1$ diperoleh berdasarkan Persamaan (2.56) dan (2.57) dengan probabilitas kasus ketiga sesuai dengan Persamaan (2.69), maka menghasilkan Persamaan Kolmogorov sebagai berikut.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + \mu)P_n(t) + (\mu)P_{n+1}(t) + \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k\, P_{n-k}(t), n \geq\ 1 \quad (2.70)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)(\mu) - P_0(t)(\lambda) \quad , n = 0 \quad (2.71)$$

3. Solusi *Steady State* Model Antrian $M^X/M/1$

Kondisi *steady state* yaitu keadaan sistem yang tidak tergantung pada keadaan awal maupun waktu yang telah dilalui. Jika suatu sistem antrian telah mencapai kondisi *steady state* maka peluang terdapat n pelanggan dalam sistem pada waktu t, yang dinotasikan dengan $(P_n(t))$ tidak tergantung pada waktu.

Kondisi *steady state* terjadi ketika $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ dan $\lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$, sehingga $P_n(t) = P_n$, untuk semua t, artinya P_n tidak tergantung pada waktu. Kondisi *steady state* pada sistem antrian $M^X/M/1$ diperoleh dengan mensubtitusikan $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$, dan $P_n(t) = P_n$ ke Persamaan (2.70) dan Persamaan (2.71) sehingga didapatkan

$$0 = P_1\mu - P_0\lambda \qquad , n = 0 \quad (2.72)$$

$$0 = -(\lambda + \mu)P_n + (\mu)P_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k P_{n-k} \quad , n \geq 1 \quad (2.73)$$

Persamaan (2.72) dan (2.73) tidak dapat diselesaikan menggunakan metode rekursif seperti pada model antrian $M/M/1$. Untuk menentukan solusi *steady state* pada model antrian $M^X/M/1$, langkah pertama adalah menentukan PGF dari banyak pelanggan dalam sistem.

Jika N adalah variabel diskrit yang menyatakan banyaknya pelanggan dalam sistem, dengan probabilitas P_n maka berdasarkan Definisi (2.3) PGF dari N adalah

$$P(z) = E[z^N] = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \text{ , } |z| \leq 1 \tag{2.74}$$

Jika X menyatakan ukuran kelompok yang masuk ke dalam sistem antrian dan N menyatakan banyaknya pelanggan dalam sistem, maka dari Persamaan (2.63) dan Persamaan (2.74) PGF dari X dan N masing – masing adalah

$$A(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \text{ ,} \qquad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n \text{ ,} \qquad |z| \leq 1$$

penyelesaian Persamaan (2.72) dan (2.73) dengan mencari PGF dari N adalah sebagai berikut

Persamaan (2.72) dan (2.73) dikalikan dengan z^n, maka didapatkan

$$0 = P_1 \mu z^n - P_0 \lambda z^n \quad , n = 0 \tag{2.75}$$

$$0 = -(\lambda + \mu) P_n z^n + (\mu) P_{n+1} z^n + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k P_{n-k} z^n \text{ ,} \quad n \geq 1 \tag{2.76}$$

kemudian Persamaan (2.75) dan Persamaan (2.76) dapat diuraikan sebagai berikut.

untuk $n = 0$ maka Persamaan (2.75) menjadi $0 = P_1 \mu - P_0 \lambda$, nilainya sama dengan Persamaan (2.72).

dari Persamaan (2.76) dapat diuraikan sebagai berikut.

untuk $n = 1$ didapatkan $0 = -(\lambda+\mu)P_1 z + (\mu)P_2 z + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k P_{1-k} z$

untuk $n = 2$ didapatkan $0 = -(\lambda+\mu)P_2 z^2 + (\mu)P_3 z^2 + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k P_{2-k} z^2$

untuk $n = 3$ didapatkan $0 = -(\lambda+\mu)P_3 z^3 + (\mu)P_4 z^3 + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k P_{3-k} z^3$

$$\vdots$$

untuk $n - 1$ didapatkan $0 = -(\lambda+\mu)P_{n-1} z^{n-1} + (\mu)P_n z^{n-1} +$

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k P_{(n-1)-k} z^{n-1}$$

untuk n didapatkan $0 = -(\lambda+\mu)P_n z^n + (\mu)P_{n+1} z^n + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k P_{n-k} z^n$

$$\vdots$$

dan seterusnya.

Langkah penyelesaian berikutnya yaitu Persamaan – Persamaan yang telah didapatkan diatas dari penguraian Persamaan (2.75) dan Persamaan (2.76) dijumlahkan dari $n = 0$ sampai ∞.

Untuk jumlahan dari $n = 1$ sampai ∞ diperoleh

$$-(\lambda+\mu)\sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P_{n-k} a_k z^n = 0 \qquad (2.77)$$

Persamaan (2.77) ditambah dengan Persamaan (2.72) didapatkan

$$(P_1\mu - P_0\lambda) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n - \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_n z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1} z^n +$$

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P_{n-k} a_k z^n = 0 \qquad (2.78)$$

dengan

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P_{n-k} a_k z^n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P_{n-k} z^{n-k} a_k z^k$$

kemudian dapat diuraikan sebagai berikut

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (P_{n-1}z^{n-1}a_1z^1 + P_{n-2}z^{n-2}a_2z^2 + P_{n-3}z^{n-3}a_3z^3 + P_{n-4}z^{n-4}a_4z^4 + P_{n-3}z^{n-5}a_5z^5 + \cdots)$$

$$= (P_0z^0a_1z^1 + P_1z^1a_1z^1 + P_0z^0a_2z^2 + P_2z^2a_1z^1 + P_1z^1a_2z^2 + P_0z^0a_3z^3 + P_3z^3a_1z^1 + P_2z^2a_2z^2 + P_1z^1a_3z^3 + P_0z^0a_4z^4 + \cdots)$$

$$= P_0z^0(a_1z^1 + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \cdots) + P_1z^1(a_1z^1 + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \cdots) + P_2z^2(a_1z^1 + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \cdots) + P_3z^3(a_1z^1 + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \cdots) + \cdots$$

$$= (a_1z^1 + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \cdots)(P_0z^0 + P_1z^1 + P_2z^2 + P_3z^3 + P_4z^4)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_kz^k \sum_{n=k}^{\infty} P_{n-k}z^{n-k} \tag{2.79}$$

berdasarkan Persamaan (2.63) dan Persamaan (2.74), maka persaman (2.79) dapat dinyatakan dengan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_kz^k \sum_{n=k}^{\infty} P_{n-k}z^{n-k} = A(z)P(z) \tag{2.80}$$

kemudian substitusikan Persamaan (2.80) ke Persamaan (2.78), sehingga diperoleh

$$(P_1\mu - P_0\lambda) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} P_nz^n - \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_nz^n \, \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1}z^n + \lambda A(z)P(z) = 0$$

$$(P_1\mu - P_0\lambda) - \lambda(P(z) - P_0) - \mu(P(z) - P_0) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} P_{n+1}z^n + \lambda A(z)P(z) = 0$$

$$-(\lambda+\mu)P(z)+\mu P_0+\mu P_1+\mu\sum_{n=1}^{\infty}P_{n+1}z^n+\lambda A(z)P(z)=0$$

$$-(\lambda+\mu)P(z)+\mu P_0+\mu\sum_{n=0}^{\infty}P_{n+1}z^n+\lambda A(z)P(z)=0 \qquad (2.81)$$

misal $n+1=m$, maka subtitusi $n=m-1$ ke Persamaan (2.81), sehingga diperoleh

$$-(\lambda+\mu)P(z)+\mu P_0+\frac{\mu}{z}\sum_{m=1}^{\infty}P_m z^m+\lambda A(z)P(z)=0 \qquad (2.82)$$

kedua ruas pada Persamaan (2.82) dikalikan dengan z, menghasilkan

$$-z(\lambda+\mu)P(z)+z\mu P_0+\mu[P(z)-P_0]+\lambda A(z)P(z)=0$$

$$(-z(\lambda+\mu)+z\lambda A(z)+\mu)P(z)+\mu P_0(z-1)=0$$

$$P(z)=\frac{\mu P_0(z-1)}{(z(\lambda+\mu)-zA(z)-\mu)}$$

$$=\frac{\mu P_0(z-1)}{z\lambda(1-A(z))-\mu(1-z)}$$

$$=\frac{\mu P_0(1-z)}{\mu(1-z)-z\lambda(1-A(\mathrm{z}))} \qquad (2.83)$$

Jadi Persamaan (2.83) adalah PGF dari N, pada model antrian $M^X/M/1$.

Pada Persamaan (2.83) akan dicari nilai P_0 yang merupakan peluang terdapat nol pelanggan dalam sistem sebagai berikut

dari Persamaan (2.74) diketahui PGF dari N adalah

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n z^n$$

untuk $z=1$, diperoleh

$$P(1)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n 1^n$$

berdasarkan Definisi (2.8) jumlah total suatu peluang adalah 1, sehingga diperoleh

$$P(1) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1, \tag{2.84}$$

dari Persamaan (2.83) diketahui PGF dari N adalah

$$P(z) = \frac{\mu P_0(1-z)}{\mu(1-z) - z\lambda(1-A(z))}$$

subtitusi $z = 1$ ke Persamaan (2.83), maka diperoleh

$$P(1) = \frac{\mu P_0(1-1)}{\mu(1-1) - 1\lambda(1-A(1))}$$

Persamaan tersebut berbentuk $\frac{0}{0}$ maka berdasarkan teorema 2.1 penyelesaiannya menggunakan aturan I'Hopital sebagai berikut

$$\lim_{z\to 1} P(z) = \frac{\lim_{z\to 1} \mu P_0(1-z)}{\lim_{z\to 1}[\mu(1-z) - z\lambda(1-A(z))]}$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{-\mu P_0}{-\mu - \lambda + \lambda A(z) + \lambda z A'(z)}$$

$$= \frac{\mu P_0}{\mu - \lambda A'(1)} \tag{2.85}$$

dari Persamaan (2.84) dan Persamaan (2.85) diperoleh

$$1 = \frac{\mu P_0}{\mu - \lambda A'(1)}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda A'(1)}{\mu} \tag{2.86}$$

subtitusi Persamaan (2.66) ke Persamaan (2.86) diperoleh

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda E(X)}{\mu}$$

jadi

$$P_0 = 1 - \rho \tag{2.87}$$

dengan

$$\rho = \frac{\lambda E(X)}{\mu}$$

subtitusi Persamaan (2.87) ke Persamaan (2.83) maka PGF dari N dapat dinyatakan dengan

$$P(z) = \frac{\mu(1-\rho)(1-z)}{\mu(1-z) - z\lambda\big(1 - A(z)\big)} \tag{2.88}$$

Probabilitas terdapat n pelanggan dalam sistem pada model antrian $M^X/M/1$ merupakan koefisien dari z^n. Dari Persamaan (2.88) dapat ditentukan nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem pada model antrian $M^X/M/1$.

Pada sistem antrian diasumsikan *server* selalu tersedia untuk melayani pelanggan. Namun, pada kenyataannya banyak faktor yang menyebabkan *server* tidak dapat melayani pelanggan pada waktu pelayanan berlangsung. Hal tersebut dianggap sebagai *vacations* yang dilakukan *server*.

L. *Server Vacations*

Vacation dalam konsep antrian adalah periode ketika *server* tidak tersedia untuk memberikan pelayanan. Kedatangan pada waktu *vacation* dimulai hanya akan dilayani setelah *server* kembali dari *vacation*. Banyak situasi yang menyebabkan *server* melakukan *vacation*, antara lain yaitu gangguan mesin, maintenance sistem, dan pergantian *server* (dimana *server* melayani lebih dari satu antrian dalam sistem atau melayani lebih dari satu sistem). Doshi (1986) membahas perbedaan tipe dari model *vacation* yaitu :

1. Model *single vacation*

   Model ini adalah tepat satu *vacation* setelah berakhir dari setiap periode sibuk. Jika *server* kembali dari *vacation*, *server* tidak pergi untuk *vacation* yang lain sekalipun sistem masih kosong pada waktu itu. Tipe *vacation* ini mungkin timbul dari panggilan seperti maintenance dalam sistem produksi, maintenance bisa menjadi pertimbangan *vacation*.

2. Model *multiple vacation*

   Tipe dari *vacation* ini mungkin timbul dari panggilan seperti *maintenance* komputer dan komunikasi sistem dimana pengolah dalam komputer dan komunikasi sistem melakukan percobaan sekali dan *maintenance* tambahan dilakukan dengan fungsi pemilihan yang utama dari mereka (proses panggilan telepon, menerima dan mengirim data, dan lain sebagainya). *Maintenance* pekerja dibagi menjadi *segment* pendek. Sewaktu – waktu pelanggan tidak datang, pengolah melakukan *segment* dari *maintenance* pekerja. Ketika sistem kosong, *server* mengambil *vacation* (pekerja dalam *segment maintenance*). Saat kembali dari *vacation*, *server* mulai melayani hanya jika terdapat K atau lebih pelanggan yang menunggu dalam antrian, jika jumlah yang menunggu kurang dari K, maka *server* pergi untuk *vacation* yang lain (*segment maintenance*).

3. Model pelayanan *vacation* terbatas

   Pada model ini *server* mengambil *vacation* saat sistem kosong atau setelah melayani m pelanggan, atau setelah waktu T. Dengan begitu *server* menetapkan pelayanan dalam sistem sesuai dengan tipe *vacation*.

Dalam surveinya Doshi (1986), menyebutkan beberapa model pelayanan sebagai berikut:

- *Gated service*, dalam kasus ini, setelah *server* kembali dari *vacation*, *server* menetapkan pintu terakhir pelanggan menunggu. Ketika memulai untuk melayani hanya pelanggan yang tak lebih dari pintu, mendasarkan beberapa peraturan dari banyaknya atau panjangnya antrian pelanggan yang harus dilayani.
- *Exhaustive service*, dalam kasus ini, *server* melayani pelanggan sampai sistem kosong, kemudian pergi untuk *vacation*.
- *Limited service*, dalam kasus ini, menyediakan K tempat dalam jumlah maksimum dari pelanggan bisa dilayani sebelum *server* pergi *vacation*. *Server* pergi untuk *vacation* ketika : (i) sistem kosong, atau (ii) ketika K pelanggan telah dilayani.