RUANG METRIK *FUZZY* DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Diajukan Kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Untuk Memenuhi Sebagai Persyaratan

Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Oleh
Ambar Sito Jati
NIM 10305144042

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2014

PERSETUJUAN

Skripsi yang berjudul "**RUANG METRIK *FUZZY* DAN SIFAT-SIFATNYA**" ini telah disetujui oleh pembimbing untuk diujikan.

Disusun oleh :

Ambar Sito Jati

10305144042

Disetujui pada tanggal

1 Juli 2014

Mengetahui:

Dosen Pembimbing

Dr. Agus Maman Abadi, M. Si.

NIP. 19700828 199502 1 001

PENGESAHAN

Skripsi yang berjudul :

"RUANG METRIK *FUZZY* DAN SIFAT-SIFATNYA"

Yang Disusun Oleh :
Nama : Ambar Sito Jati
NIM : 10305144042
Prodi : Matematika

Skripsi ini telah diuji didepan Dewan Penguji Skripsi pada tanggal 10 Juli 2014 dan dinyatakan lulus

DEWAN PENGUJI

Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
Dr. Agus Maman A., M.Si 19700828 199502 1 001	Ketua Penguji	....	17-07-2014
Husna 'Arifah, M.Sc. 19781015 200212 2 001	Sekretaris Penguji	....	17-07-2014
Dr.Sugiman, M.Si. 19650228 199101 1 001	Penguji Utama	....	14-07-2014
Fitriana Yuli S., M.Si. 19840707 200801 2 003	Penguji Pendamping	....	17-07-2014

Yogyakarta, 18 Juli 2014
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Dekan

Dr. Hartono
NIP. 19620329 198702 1 002

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini saya:

Nama	: Ambar Sito Jati
NIM	: 10305144042
Progam Studi	: Matematika
Jurusan	: Pendidikan Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Judul	: Ruang Metrik *Fuzzy* dan Sifat-Sifatnya

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar karya saya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti kata penulisan karya ilmiah yang telah lazim. Apabila ternyata terbukti bahwa pernyataan ini tidak benar maka sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya dan saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Yogyakarta, 1 Juli 2014
Yang menyatakan

Ambar Sito Jati
NIM 10305144042

MOTTO

Sapa temen dha tinemu,

tinemonan ing pamburi,

jer basuki mawa beya,

beya budi luhur yekti,

sura dira jayaningrat,

lebur dening pangastuti

~Kinanthi

Urip Sejatine Gawe Urup

PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan kepada:

Bapak dan Ibu yang terkasih. Tidak ada yang dapat saya sampaikan selain rasa syukur dan terimakasih atas limpahan kasih dan sayang yang selama ini selalu tercurah bagi kami putra-putrimu.

Adik-adikku; Tio, Tito, Uma, banyak tawa canda yang selalu tercipta dalam kebersamaan kita dalam setiap suasana. Dari kalian, aku coba pahami apa itu saling berbagai, mengisi, mengasihi, dan toleransi.

Semoga ketidaksempurnaan yang keluarga kita miliki, menjadikan kita semakin saling menyayangi.

Mei, Agung, Teguh, Febri, Uki, dan Rosyid, terlalu banyak yang ingin disampaikan, hingga tak tahu yang mana yang harus kutuliskan. Namun yang pasti, kebersamaan kita di kelas, perpustakaan, *food court*, kontrakan, pantai, gunung, dan di tempat lain yang pernah kita singgahi, akan selalu menjadi kenangan manis penuh arti. Tak perlu foto ataupun video sebagai kenangan, cukup ingatan akan kebersamaan yang tak kan terhapus zaman.

Semua teman-teman Matematika Swadana 2010, atas kebersamaan kita mengenal matematika sejak empat tahun yang lalu. Tak terasa waktu begitu cepat berlalu.

Semua teman, saudara, dan kerabat, yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

RUANG METRIK *FUZZY* DAN SIFAT-SIFATNYA

Oleh :
Ambar Sito Jati
10305144042

ABSTRAK

Ruang metrik merupakan himpunan tidak kosong yang dilengkapi dengan fungsi jarak. Himpunan *fuzzy* adalah suatu himpunan dimana nilai keanggotaan dari elemennya adalah bilangan real dalam interval tertutup $[0,1]$. Konsep himpunan *fuzzy* terus dipelajari dan dikembangkan oleh para ilmuwan baik secara teoritis maupun aplikasi dalam berbagai bidang. Konsep ruang metrik *fuzzy* merupakan perluasan dari ruang metrik dan himpunan *fuzzy*. Tugas akhir ini bertujuan menjelaskan pengertian dan sifat-sifat ruang metrik *fuzzy*, kaitan ruang metrik biasa dan ruang metrik *fuzzy*, serta kekonvergenan dan kelengkapan di ruang metrik *fuzzy*.

Penjelasan ruang metrik *fuzzy* dalam skripsi ini menggunakan definisi yang diperkenalkan oleh George dan Veeramani yaitu dengan bantuan norm-t kontinu. Hasil dari skripsi ini adalah berupa kajian tentang pengertian ruang metrik *fuzzy* dan ruang metrik yang menginduksi suatu ruang metrik *fuzzy* dengan suatu fungsi keanggotaan dan norm-t kontinu tertentu. Skripsi ini juga mengkaji kaitan antara kekonvergenan suatu barisan di ruang metrik dan kekonvergenan barisan tersebut di ruang metrik *fuzzy*.

Kata Kunci: *himpunan fuzzy, ruang metrik fuzzy, kekonvergenan, kelengkapan*

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, yang telah melimpahkan segala rahmat, nikmat dan karunia -Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan Skripsi yang berjudul “Ruang Metrik *Fuzzy* dan Sifat-Sifatnya” ini dengan baik. Skripsi ini disusun guna untuk memenuhi persyaratan guna memperoleh gelar Sarjana Sains Program Studi Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.

Penulis menyadari sepenuhnya dalam penulisan ini tidak lepas dari dukungan, arahan dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Hartono selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menyeleaikan studi.
2. Bapak Dr. Sugiman selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika yang telah memberikan kelancaran dalam pelayanan akademik untuk menyelesaikan studi.
3. Bapak Dr. Agus Maman Abadi selaku Ketua Program Studi Matematika sekaligus dosen pembimbing yang telah memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penulisan skripsi ini.
4. Bapak Nurhadi Waryanto, M.Eng, selaku Dosen Penasihat Akademik. Terimakasih untuk semua nasihat, motivasi dan dukungan selama menjadi mahasiswa matematika swadana 2010.

5. Seluruh Dosen Jurusan Pendidikan Matematika yang memberikan ilmu yang bermanfaat kepada penulis.
6. Keluarga tercinta yang selalu memberi motivasi dan semangat.
7. Seluruh Mahasiswa Matematika Angkatan 2010 serta semua pihak yang telah membantu sehingga skripsi ini bisa terselesaikan dengan baik.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis menerima saran dan kritik yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini. Demikianlah skripsi ini penulis susun. Semoga skripsi dapat memberikan manfaat bagi penulis pembaca.

Yogyakarta, Juli 2014
Ambar Sito Jati

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

μ_A	: fungsi keanggotaan dari suatu himpunan *fuzzy* A
A^C	: komplemen dari suatu himpunan A
A'	: himpunan semua titik limit dari himpunan A
$B_d(x,r)$	: bola terbuka di ruang metrik (X,d) dengan jari-jari r dan pusat x
$B_d[x,r]$	: bola tertutup di ruang metrik (X,d) dengan jari-jari r dan pusat x
$\forall$	: untuk setiap
$\exists$	: terdapat
$\in$	: elemen suatu himpunan
$\notin$	: bukan elemen suatu himpunan
$\cup$	: gabungan dua himpunan
$\cap$	: irisan dua himpunan
d	: metrik
(X,d)	: ruang metrik
F	: himpunan tertutup
$IntU$	: himpunan dari semua titik interior U
$\mathbb{N}$	: himpunan bilangan asli
$\subseteq$	: himpunan bagian
$\emptyset$	: himpunan kosong
$\mathbb{R}$	: himpunan bilangan real

U	: himpunan terbuka
$cl(A)$	: himpunan yang memuat semua *closure points* dari A
τ	: topologi
(X, τ)	: ruang topologi
τ_d	: topologi yang diinduksi oleh metrik d
$\{x_n\}$	: barisan
x_n	: elemen dari barisan $\{x_n\}$
$*$	: norm-t kontinu
M	: himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times (0, \infty)$
$M(x, y, t)$	: fungsi keanggotaan dari suatu himpunan *fuzzy* M
$(X, M, *)$	: ruang metrik *fuzzy*
$M_d(x, y, t)$	: metrik *fuzzy* standar yang diinduksi oleh metrik d
$B_M(x, r, t)$	: bola terbuka pada $(X, M, *)$ dengan pusat $x \in X$ dan jari-jari r
$B_M[x, r, t]$	: bola tertutup pada $(X, M, *)$ dengan pusat $x \in X$ dan jari-jari r
τ_M	: topologi yang diinduksi oleh metrik *fuzzy* M

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Profesor Lotfi A. Zadeh dari Universitas California, Barkeley pertama kali memperkenalkan teori *fuzzy* pada tahun 1965 melalui tulisannya yang berjudul "*Fuzzy Sets*". Berdasarkan Wang (1997), pada waktu teori *fuzzy* mulai dipublikasikan, beberapa ilmuwan matematika berpendapat bahwa teori baru itu sama saja dengan teori probabilitas yang sudah lama dikenal dalam dunia matematika. Mereka menyatakan bahwa teori probabilitas sudah cukup untuk menyelesaikan masalah yang mengandung ketidakpastian dan yang bisa diselesaikan oleh teori *fuzzy*. Karena pada awalnya tidak ada aplikasi yang nyata dari teori *fuzzy*, maka kebanyakan lembaga riset tidak menganggap teori *fuzzy* sebagai bidang penelitian yang serius. Namun, beberapa ilmuwan yang tertarik pada teori *fuzzy*, seperti Richard Bellman, mulai mempelajari teori *fuzzy* secara mendalam.

Seiring dengan perkembangan zaman, teori *fuzzy* berkembang semakin pesat. Banyak matematikawan yang mempelajari dan mengembangkan himpunan *fuzzy* baik aplikasinya dalam berbagai bidang maupun konsep-konsep atau teori-teori terkait himpunan *fuzzy*. Perkembangan teori *fuzzy* akhirnya membuat para ahli matematika mulai mempertimbangakan untuk mempelajari teori matematika lain yang dipadukan dengan teori himpunan *fuzzy*. Salah satunya adalah ruang metrik *fuzzy*.

Ivan Kramosil dan Jiri Michalek (1975) adalah matematikawan yang pertama kali memperkenalkan konsep ruang metrik *fuzzy*. Pembahasan ruang metrik *fuzzy* terus berkembang. George dan Veeramani (1994) mendefinisikan ruang metrik *fuzzy* menggunakan norm-t kontinu. Selanjutnya banyak matematikawan yang mempelajari ruang metrik *fuzzy* menggunakan definisi tersebut. Contohnya adalah Sapena (2001) dan Gregori (2009) yang mempelajari sifat-sifat ruang metrik *fuzzy* sesuai dengan definisi ruang metrik *fuzzy* yang digunakan oleh George dan Veeramani. Selanjutnya, V. Gregori, A. Lopez-Crevillen, S. Morillas, dan A. Sapena (2009) mempelajari kekonvergenan dan kelengkapan di ruang metrik *fuzzy* serta mendefinisikan barisan p −konvergen, p −Cauchy, dan ruang metrik *fuzzy* p −lengkap.

Pembahasan ruang metrik *fuzzy* dan sifat-sifatnya banyak dilakukan hingga sekarang. Selain itu penelitian kaitan ruang metrik dengan ruang metrik *fuzzy* juga potensial untuk terus dikembangkan. Sehingga dalam tugas akhir ini akan dibahas pengertian ruang metrik *fuzzy*, kaitan ruang metrik dan ruang metrik *fuzzy*, serta konsep barisan konvergen dan barisan Cauchy dalam ruang metrik *fuzzy*, dan ruang metrik *fuzzy* lengkap.

B. Pembatasan Masalah

Agar pembahasan dalam penelitian ini tidak terlalu luas, masalah yang akan diteliti dibatasi hanya pada pengertian ruang metrik *fuzzy*, kaitan ruang metrik dan ruang metrik *fuzzy*, serta konsep barisan konvergen dan barisan Cauchy dalam ruang metrik *fuzzy*, dan ruang metrik *fuzzy* lengkap.

C. Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana menjelaskan pengertian ruang metrik *fuzzy*?
2. Bagaimana menjelaskan kaitan antara ruang metrik dan ruang metrik *fuzzy*?
3. Bagaimana menjelaskan sifat-sifat kekonvergenan dan kelengkapan di ruang metrik *fuzzy*?

D. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Menjelaskan pengertian ruang metrik *fuzzy*.
2. Menjelaskan kaitan antara ruang metrik dan ruang metrik *fuzzy*.
3. Menjelaskan sifat-sifat kekonvergenan dan kelengkapan di ruang metrik *fuzzy*.

E. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat sebagai referensi guna melakukan penelitian lebih lanjut yang berkaitan dengan pengertian dan sifat-sifat ruang metrik *fuzzy*, kaitan ruang metrik dan ruang metrik *fuzzy*, serta kekonvergenan kelengkapan di ruang metrik *fuzzy*.

BAB II

KAJIAN TEORI

A. Himpunan *Fuzzy*

Himpunan tegas (*crisp*) merupakan himpunan yang untuk setiap elemen dalam semestanya selalu dapat ditentukan secara tegas elemen tersebut merupakan anggota dari himpunan tersebut atau tidak. Namun, himpunan dalam kehidupan sehari-hari tidak selalu dapat didefinisikan dengan cara demikian. Misalnya himpunan orang berbadan tinggi. Jika didefinisikan bahwa "orang tinggi" adalah orang yang tingginya lebih dari atau sama dengan 1,7 meter, maka orang yang tingginya 1,69 meter termasuk orang yang tidak tinggi. Padahal pada kenyataannya sulit untuk menerima bahwa orang yang tingginya 1,69 meter termasuk orang yang tidak tinggi. Oleh karena itu, pada tahun 1965 Lotfi A. Zadeh mengatasi permasalahan tersebut dengan memperkenalkan teori himpunan *fuzzy*.

Lotfi A. Zadeh mengaitkan himpunan dengan suatu fungsi yang menyatakan derajat kesesuaian unsur-unsur dalam semestanya dengan konsep yang merupakan syarat keanggotaan himpunan tersebut. Fungsi dengan sifat demikian disebut fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* dan nilai fungsi keanggotaan tersebut disebut derajat keanggotaan suatu unsur dalam himpunan *fuzzy*. Fungsi keanggotaan dari suatu himpunan *fuzzy* A dalam semesta X adalah pemetaan μ_A dari X ke selang $[0,1]$, yaitu $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$. Nilai fungsi $\mu_A(x)$ menyatakan derajat keanggotaan unsur $x \in X$ dalam himpunan *fuzzy* A.

Definisi 2.1.1 (George Klir, 1997)

Misalkan X adalah himpunan tak kosong. Himpunan *fuzzy* A di X adalah suatu himpunan yang fungi keanggotaannya $\mu_A: X \to [0,1]$.

Sehingga himpunan *fuzzy* A di X dapat dinyatakan sebagai berikut:

$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid \forall x \in X\ dan\ \mu_A(x)$ menyatakan derajat keanggotaan x di $A\}$.

Berdasarkan definisi himpunan *fuzzy* di atas, maka himpunan tegas (*crisp*) merupakan kejadian khusus dari himpunan *fuzzy*, yaitu himpunan *fuzzy* yang fungsi keanggotaannya hanya bernilai 0 atau 1 saja. Untuk lebih memahami himpunan *fuzzy*, diberikan satu contoh himpunan *fuzzy* berikut.

Contoh 2.1.2

Misalkan $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Didefinisikan himpunan *fuzzy* A di X dengan fungsi keanggotaan

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + (x - 5)^2}$$

Maka diperoleh

$$A = \{(1, 0.06), (2, 0.1), (3, 0.2)(4, 0.5), (5, 1), (6, 0.5), (7,0.2), (8,0.1), (9,0.06)\}.$$

Himpunan *fuzzy* A dapat disebut himpunan bilangan asli yang dekat ke 5.

Menurut George Klir (1997), himpunan *fuzzy* A dan B dalam semesta X dikatakan sama, ditulis $A = B$, jika memenuhi $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, untuk setiap $x \in X$. Himpunan *fuzzy* A dikatakan merupakan himpunan bagian dari himpunan *fuzzy* B dalam semesta X, ditulis $A \subseteq B$, jika memenuhi $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, untuk setiap $x \in X$.

Menurut George Klir (1997), pada himpunan *fuzzy* dapat didefiniskan operasi komplemen, gabungan dan irisan sebagai berikut.

1. Komplemen dari suatu himpunan *fuzzy* A merupakan himpunan *fuzzy* A^C dengan fungsi keanggotaan $\mu_{A^C}(x) = \{1 - \mu_A(x)\}$ untuk setiap $x \in X$, dan secara lengkap dapat ditulis sebagai berikut:

$$A^C = \left\{\left(x, \mu_{A^C}(x)\right)\middle|\ \mu_{A^C}(x) = \{1 - \mu_A(x)\}, \forall x \in X\ \right\}.$$

2. Gabungan dua himpunan *fuzzy* A dan B merupakan himpunan *fuzzy* $A \cup B$ dengan fungsi keanggotaan $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ untuk setiap $x \in X$, dan secara lengkap dapat ditulis sebagai berikut:

$$A \cup B = \left\{\left(x, \mu_{A\cup B}(x)\right)|\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in X\ \right\}.$$

3. Irisan dua himpunan *fuzzy* A dan B merupakan himpunan *fuzzy* $A \cap B$ dengan fungsi keanggotaan $\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ untuk setiap $x \in X$, dan secara lengkap dapat ditulis sebagai berikut:

$$A \cap B = \left\{\left(x, \mu_{A\cap B}(x)\right)|\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \forall x \in X\ \right\}.$$

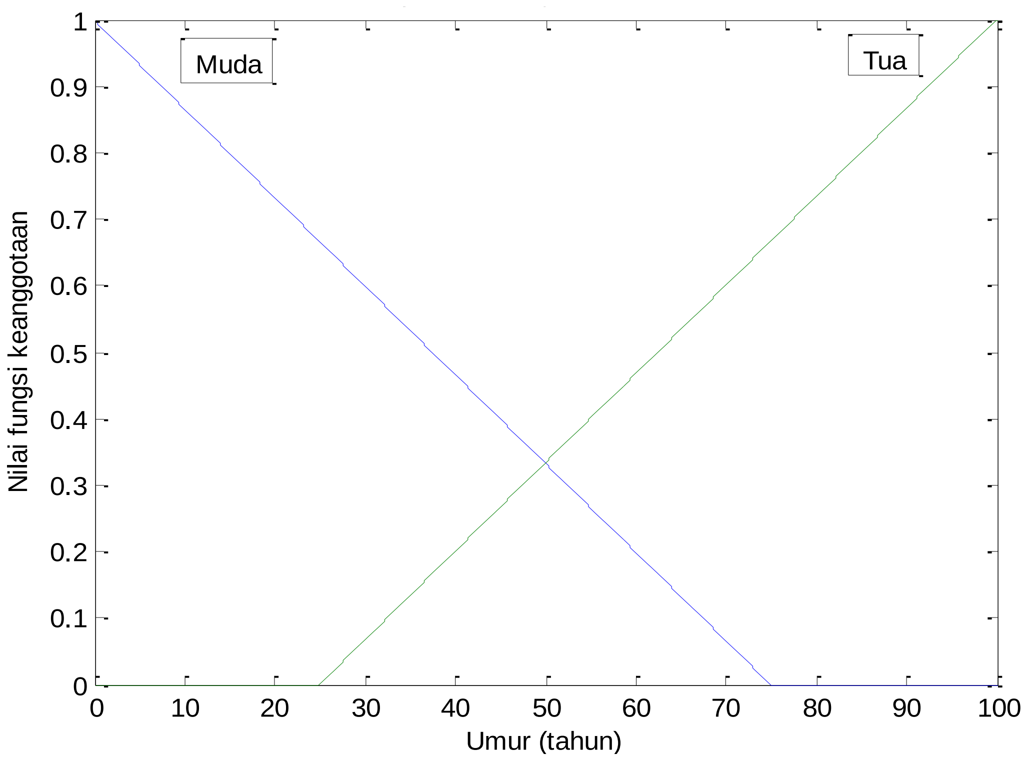
Contoh 2.1.3

Misalkan diketahui himpunan $X = [0,100]$ dan didefinisikan dua himpunan *fuzzy* pada X yaitu himpunan *fuzzy* $Muda$ dan himpunan *fuzzy* Tua dengan fungsi keanggotaan masing-masing didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_{Muda}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{75}, & 0 \leq x \leq 75 \\ 0, & untuk\ x\ yang\ lain \end{cases}$$

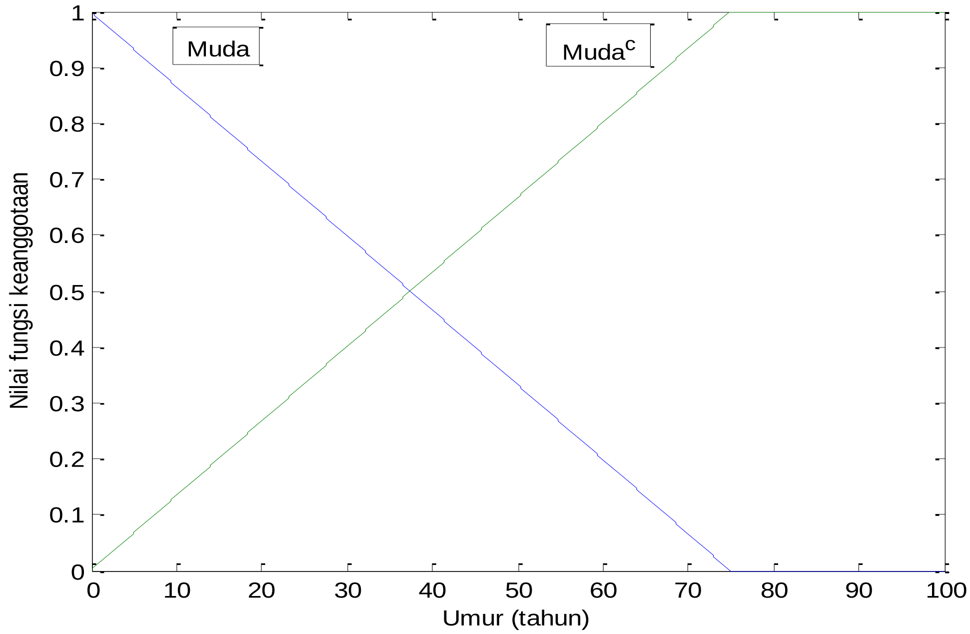
$$\mu_{Tua}(x) = \begin{cases} \frac{x - 25}{75}, & 25 \leq x \leq 100 \\ 0, & untuk\ x\ yang\ lain \end{cases}$$

Maka himpunan *fuzzy* $Muda$ dan himpunan *fuzzy* Tua dapat direpresentasikan dengan grafik berikut.

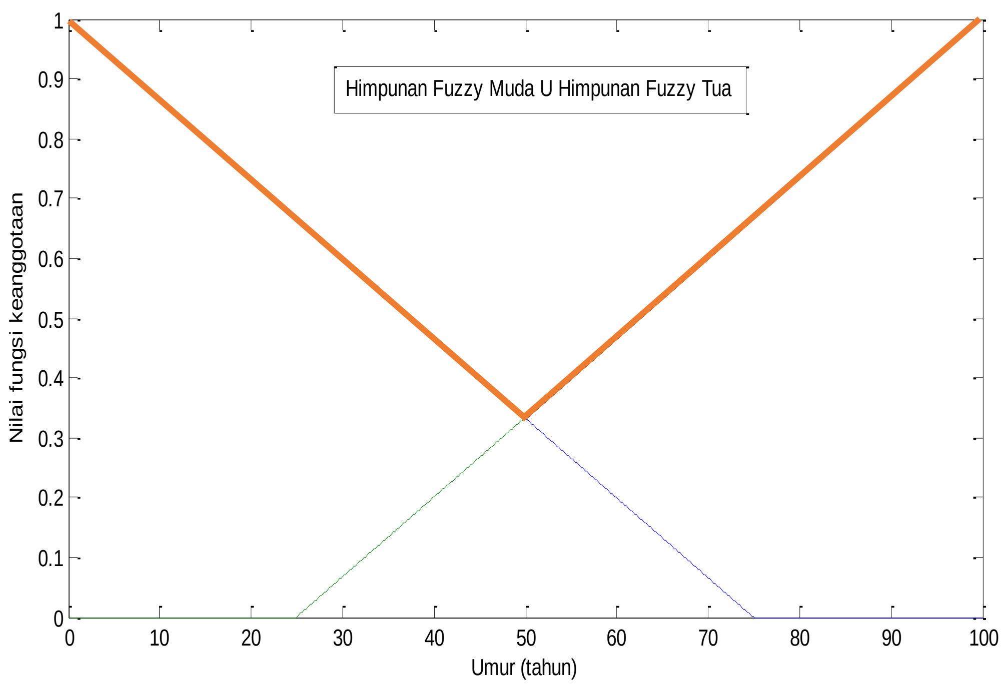


Gambar 2.1 Grafik Fungsi Keanggotaan Himpunan *Fuzzy* $Muda$ dan Himpunan *Fuzzy* Tua

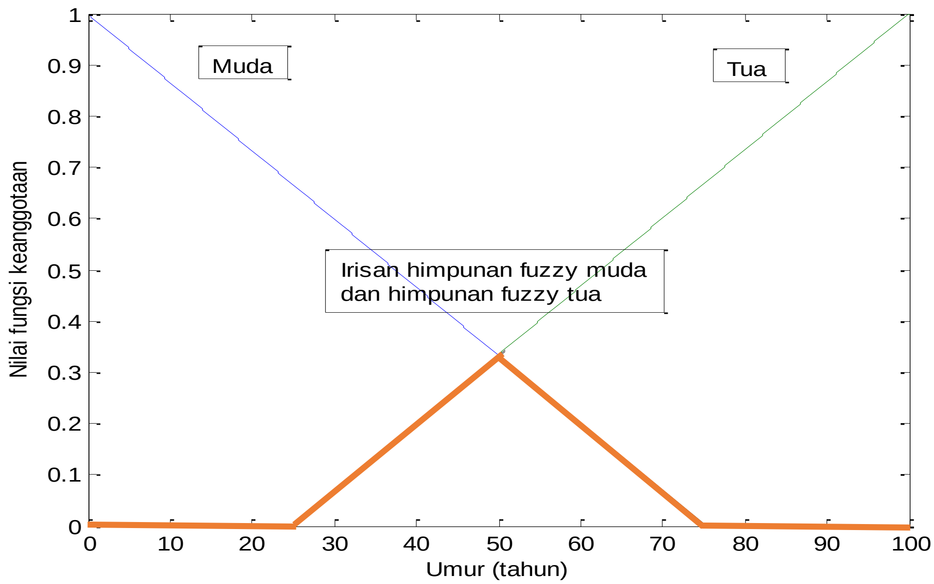
Selanjutnya akan dijelaskan komplemen himpunan *fuzzy* $Muda$, gabungan himpunan *fuzzy* $Muda$ dan himpunan *fuzzy* Tua, dan irisan himpunan *fuzzy* $Muda$ dan himpunan *fuzzy* Tua sebagai berikut.



Gambar 2.2 Grafik Fungsi Keanggotaan Himpunan *Fuzzy* $Muda$ dan Himpunan *Fuzzy* $Muda^C$



Gambar 2.3 Grafik Fungsi Keanggotaan Gabungan Himpunan *Fuzzy* $Muda$ dan Himpunan *Fuzzy* Tua



Gambar 2.4 Grafik Fungsi Keanggotaan Irisan Himpunan *Fuzzy* $Muda$ dan Himpunan *Fuzzy* Tua

B. Ruang Metrik

Sub-bab ini menjelaskan definisi-definisi dasar tentang ruang metrik dan topologi. Beberapa teorema yang dipelajari dalam ruang metrik dan topologi juga dijelaskan dan diberi contoh.

Definisi 2.2.1 (Davis, 2005)

Diberikan suatu himpunan tidak kosong X, suatu fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi kondisi berikut, untuk setiap $x, y, z \in X$,

(i) $d(x, y) \geq 0$;

(ii) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

Maka d disebut metrik pada X dan (X, d) disebut ruang metrik.

Selanjutnya, dua contoh ruang metrik berikut ini diberikan agar definisi ruang metrik dapat lebih dipahami.

Contoh 2.2.2

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dengan fungsi d_1 yang didefinisikan dengan $d_1(x,y) = |x-y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ merupakan suatu ruang metrik, sebab

(i) $d_1(x,y) = |x-y| \geq 0$;

(ii) $d_1(x,y) = |x-y| = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;

(iii) $d_1(x,y) = |x-y| = |y-x| = d_1(y,x)$;

(iv) $d_1(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq d_1(x,y) + d_1(y,z)$.

Jadi terbukti bahwa $(\mathbb{R}, d_1)$ merupakan ruang metrik.

Contoh 2.2.3

Misalkan X suatu himpunan tidak kosong dan $d_2: X \times X \to \mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$$d_2(x,y) = \begin{cases} 2, & jika\ x \neq y \\ 0 & jika\ x = y \end{cases}$$

untuk setiap $x, y \in X$, maka (X, d_2) merupakan suatu ruang metrik, sebab

(i) $d_2(x,y) \geq 0$;

(ii) $d_2(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;

(iii) $d_2(x,y) = d_2(y,x)$;

(iv) Jika $y = z$ maka $d_2(x,y) + d_2(y,z) = d_2(x,y) = d_2(x,z) = d_2(x,z)$

Jika $x = y$ maka $d_2(x,y) + d_2(y,z) = d_2(y,z) = d_2(x,z) \geq d_2(x,z)$

Untuk yang lain, $d_2(x,y) + d_2(y,z) = 2 + 2 = 4 > (x,z)$.

Jadi terbukti bahwa (X, d_2) merupakan ruang metrik.

Definisi 2.2.4 (Parzynski, 1987)

Misal (X, d) suatu ruang metrik dan A himpunan bagian tidak kosong dari X. A disebut terbatas jika terdapat bilangan real positif M sehingga $d(x, y) \leq M, \ \forall x, y \in A$.

Contoh 2.2.5

Misalkan ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Maka $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$ merupakan himpunan terbatas karena terdapat bilangan real positif $M = 1$ sehingga $d(x, y) = |x - y| \leq M = 1, \ \forall x, y \in [0,1]$.

Beberapa konsep dasar dalam topologi seperti bola terbuka, himpunan terbuka, himpunan tertutup, dan titik limit akan dijelaskan dan diberi contoh.

Definisi 2.2.6 (Davis, 2005)

Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan r suatu bilangan real dengan $r > 0$. Bola terbuka pada (X, d) dengan jari-jari r dan pusat $x \in X$ didefiniskan dengan

$$B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Contoh 2.2.7

Dari Contoh 2.2.2 diketahui $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ merupakan ruang metrik.

Bola terbuka pada $(\mathbb{R}, d)$ dengan jari-jari 0.25 dan pusat $0 \in \mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} B_d(0, 0.25) &= \{y \in \mathbb{R} : |y| < 0.25\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : -0.25 < y < 0.25\} \end{aligned}$$

Teorema berikut menjelaskan bahwa dua bola terbuka dengan pusat yang sama maka salah satunya merupakan himpunan bagian dari yang lain.

Teorema 2.2.8 (Aphane, 2009)

Misalkan $B_d(x, r_1)$ dan $B_d(x, r_2)$ bola terbuka dengan pusat yang sama yaitu $x \in X$, dengan $r_1, r_2 > 0$. Maka $B_d(x, r_1) \subseteq B_d(x, r_2)$ atau $B_d(x, r_2) \subseteq B_d(x, r_1)$.

Bukti:

i) Jika $r_1 = r_2$, maka $B_d(x, r_1) = B_d(x, r_2)$, sehingga $B_d(x, r_1) \subseteq B_d(x, r_2)$ atau $B_d(x, r_2) \subseteq B_d(x, r_1)$.

ii) Jika $r_1 \neq r_2$, tanpa mengurangi kemumuman diasumsikan $r_1 > r_2$.

Misalkan $a \in B_d(x, r_2)$, maka $d(x, a) < r_2$.

Karena $r_1 > r_2$ maka $d(x, a) < r_1$.

Sehingga $a \in B_d(x, r_1)$. Jadi $B_d(x, r_2) \subseteq B_d(x, r_1)$.

Selanjutnya dengan mengasumsikan $r_2 > r_1$ dan dengan langkah-langkah yang sama dapat dibuktikan bahwa $B_d(x, r_1) \subseteq B_d(x, r_2)$.

Jadi untuk sebarang $B_d(x, r_1)$ dan $B_d(x, r_2)$ bola terbuka dengan pusat yang sama maka $B_d(x, r_1) \subseteq B_d(x, r_2)$ atau $B_d(x, r_2) \subseteq B_d(x, r_1)$.

Contoh 2.2.9

Dari Contoh 2.2.2 diketahui $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ merupakan ruang metrik. Misalkan $B_d(x, r_1)$ dan $B_d(x, r_2)$ merupakan bola terbuka pada $(\mathbb{R}, d)$ dengan pusat yang sama yaitu $x \in \mathbb{R}$, dengan $r_1, r_2 > 0$. Maka

$$B_d(x,r_1) = \{y \in \mathbb{R} : d(x,y) < r_1\} = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < r_1\},$$

$$B_d(x,r_2) = \{y \in \mathbb{R} : d(x,y) < r_2\} = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < r_2\}$$

Jika $r_1 = r_2$ maka $B_d(x,r_1) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < r_1 = r_2\} = B_d(x,r_2)$.

Jika $r_1 < r_2$ maka $B_d(x,r_1) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < r_1 < r_2\} \subset B_d(x,r_2)$.

Jika $r_2 < r_1$ maka $B_d(x,r_2) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < r_2 < r_1\} \subset B_d(x,r_1)$.

Maka $B_d(x,r_1) \subseteq B_d(x,r_2)$ atau $B_d(x,r_2) \subseteq B_d(x,r_1)$.

Jika Definisi 2.2.6 menjelaskan pengertian bola terbuka, maka Definisi 2.2.10 di bawah ini menjelaskan pengertian bola tertutup dalam suatu ruang metrik. Selanjutnya diberikan contoh bola tertutup melalui Contoh 2.2.11.

Definisi 2.2.10 (Davis, 2005)

Misalkan (X,d) suatu ruang metrik dan r suatu bilangan real dengan $r > 0$. Bola tertutup dengan jari-jari r dan pusat $x \in X$ didefiniskan dengan

$$B_d[x,r] = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}.$$

Contoh 2.2.11

Dari Contoh 2.2.2 diketahui $(\mathbb{R},d)$ dengan $d(x,y) = |x-y|$ untuk setiap $x,y \in \mathbb{R}$ merupakan ruang metrik. Bola tertutup pada $(\mathbb{R},d)$ dengan jari-jari 2 dan pusat $0 \in \mathbb{R}$ didefiniskan dengan

$$B_d[0,2] = \{y \in \mathbb{R} : d(0,y) \leq 2\} = \{y \in \mathbb{R} : |y| \leq 2\}$$

Konsep tentang titik interior yang dijelaskan melalui Definisi 2.2.12 di bawah ini berkaitan dengan konsep himpunan terbuka dalam suatu ruang metrik yang akan dijelaskan melalui Definisi 2.2.14.

Definisi 2.2.12 (Davis, 2005)

Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan U himpunan bagian dari X. Suatu titik $x \in U$ disebut titik interior dari U jika terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_d(x, r) \subset U$. Himpunan dari semua titik interior U dituliskan dengan $IntU$.

Contoh 2.2.13

Diketahui ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Jika $U = \{x \in \mathbb{N}: 0 < x \leq 3\} \subset X$ maka $IntU = \{x \in \mathbb{N}: 1 \leq x \leq 2\} = \{1,2\}$.

Definisi 2.2.14 (Davis, 2005)

Misalkan (X, d) suatu ruang metrik. $U \subset X$ disebut terbuka jika untuk setiap $x \in U$ maka terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_d(x, r) \subseteq U$.

Contoh 2.2.15

Jika (X, d) adalah ruang metrik diskret dan $\{x\} \subset X$, maka $\{x\}$ merupakan himpunan terbuka, sebab terdapat $r = \frac{1}{2} > 0$ sehingga bola terbuka dengan pusat $x \in \{x\}$, jari-jari $r = \frac{1}{2}$ yaitu $B_d\left(x, \frac{1}{2}\right) = \left\{y \in X : d(x, y) < \frac{1}{2}\right\} \subseteq \{x\}$.

Teorema 2.2.16 di bawah ini menjelaskan bahwa setiap bola terbuka merupakan suatu himpunan terbuka.

Teorema 2.2.16 (T.W. Korner, 2014)

Setiap bola terbuka $B_d(x,r) = \{y \in A : d(x,y) < r\}$ merupakan himpunan terbuka, untuk setiap $x \in X$ dan $r > 0$.

Bukti:

Misalkan $x \in X$, $r > 0$ dan $y \in B_d(x,r)$. Pilih $r_1 > 0$ dengan $r_1 = r - d(x,y)$. Misalkan $z \in B_d(y,r_1)$, maka $d(y,z) < r_1$. Sehingga berdasarkan pertidaksamaan segitiga diperoleh

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r_1 = d(x,y) + r - d(x,y) = r.$$

Karena $d(x,z) < r$ maka $z \in B_d(x,r)$. Sehingga $B_d(x,r)$ himpunan terbuka.

Teorema 2.2.17 (T.W. Korner, 2014)

Diketahui suatu ruang metrik (X,d). Maka:

(1) $\emptyset$ dan X terbuka.

(2) Jika U_α terbuka untuk setiap $\alpha \in I$ maka $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ terbuka.

(3) Jika U_j terbuka untuk setiap $1 \leq j \leq n$ maka $\bigcap_{j=1}^{n} U_j$ terbuka.

Bukti:

(1) Jelas bahwa tidak terdapat suatu elemen di $\emptyset$, sehingga pernyataan untuk setiap $x \in \emptyset$ maka terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_d(x,r) \subseteq \emptyset$ bernilai benar. Sehingga $\emptyset$ terbuka.

X jelas terbuka berdasarkan definisi himpunan terbuka.

(2) Misalkan $x \in \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, kemudian pilih $\beta \in I$ sedemikian sehingga $x \in U_\beta$.

Karena U_β terbuka, maka dapat dipilih $r > 0$ sehingga $B_d(x, r) \subseteq U_\beta$.

Karena $U_\beta \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ maka $B_d(x, r) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

Sehingga $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ terbuka.

(3) Karena U_j terbuka, maka untuk setiap $x \in X$ terdapat $r_j > 0$ sedemikian sehingga $B_d(x, r_j) \subseteq U_j$ untuk setiap $1 \leq j \leq n$.

Misalkan $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_j, \dots, r_n\}$, maka $B_d(x, r) \subseteq U_j$ untuk setiap $1 \leq j \leq n$. Sehingga $B_d(x, r) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} U_j$. Akibatnya, $\bigcap_{j=1}^{n} U_j$ terbuka.

Contoh 2.2.18

Diketahui suatu ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$. Maka:

(1) $\emptyset$ dan $\mathbb{R}$ terbuka.

(2) Misalkan $U_1 = B_d(0,2)$ dan $U_2 = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 4\}$, maka U_1 dan U_2 terbuka. Sehingga $U_1 \cup U_2 = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 4\}$ terbuka.

(3) Misalkan $U_1 = B_d(0,2)$ dan $U_2 = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 4\}$, maka U_1 dan U_2 terbuka. Sehingga $U_1 \cap U_2 = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 2\}$ terbuka.

Definisi 2.2.19 (Davis, 2005)

Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan A himpunan bagian dari X. Suatu titik $x \in X$ disebut titik limit dari A jika untuk setiap $r > 0$, terdapat $y \in B_d(x, r) - \{x\}$. Atau dapat ditulis $\{B_d(x, r) - \{x\}\} \cap A \neq \emptyset$. Himpunan semua titik limit dari A ditulis dengan A' dan disebut *derived set* dari A.

Contoh 2.2.20

Diketahui ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Jika $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x \leq 3\} \subset X$ maka $0 \notin A$ dan $3 \in A$ adalah titik limit dari A.

Jika $A = \{x \in \mathbb{N}: 0 < x \leq 3\} \subset X$ maka $0 \notin A$, $1 \in A$, $3 \in A$ bukan titik limit dari A.

Definisi 2.2.21 (Davis, 2005)

Suatu himpunan bagian F dari ruang metrik (X, d) disebut tertutup jika F memuat setiap titik limitnya.

Contoh 2.2.22

Diketahui ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Jika $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x \leq 3\} \subset X$ maka A tidak tertutup karena $0 \notin A$ adalah titik limit dari A. Jika $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 3\} \subset X$ maka A tertutup karena A memuat semua titik limitnya.

Teorema 2.2.23 (Parzynski, 1987)

Suatu himpunan bagian F dari ruang metrik (X, d) tertutup jika dan hanya jika $X - F$ merupakan himpunan terbuka.

Bukti:

($\Longrightarrow$)

Misalkan F tertutup. Terdapat dua kemungkinan, yaitu

(1) $X - F = \emptyset$. Berdasarkan Teorema 2.2.17, $\emptyset$ merupakan himpunan terbuka, sehingga $\emptyset = X - F$ terbuka.

(2) $X - F \neq \emptyset$. Ambil sebarang $y \in X - F$, sehingga $y \notin F$. Karena F tertutup maka F memuat semua titik limitnya. Sehingga y bukan titik limit F. Maka terdapat $r > 0$ sehingga $B_d(y,r) - \{y\} \cap F = \emptyset$. Akibatnya $B_d(y,r) \subset X - F$. Jadi untuk setiap $y \in X - F$ terdapat $r > 0$ sehingga $B_d(y,r) \subset X - F$. Maka $X - F$ terbuka.

($\Leftarrow$)

Misalkan $X - F$ terbuka dan $y \in X - F$. Maka terdapat $B_d(y,r) \subset X - F$. Sehingga terdapat $B_d(y,r)$ dengan $B_d(y,r) \cap F = \emptyset$. Sehingga y bukan titik limit F. Akibatnya, jika x titik limit F maka $x \in F$. Artinya, F memuat semua titik limitnya. Sehingga F tertutup.

Teorema 2.2.24 (T.W. Korner, 2014)

Diketahui suatu ruang metrik (X,d). Maka:

(1) $\emptyset$ dan X tertutup.

(2) Jika F_α tertutup untuk setiap $\alpha \in A$ maka $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ tertutup.

(3) Jika F_j tertutup untuk setiap $1 \leq j \leq n$ maka $\bigcup_{j=1}^{n} F_j$ tertutup.

Bukti:

(1) $\emptyset$ adalah himpunan tertutup, sebab $X - \emptyset = X$ adalah himpunan terbuka.

X adalah himpunan tertutup, sebab $X - X = \emptyset$ adalah himpunan terbuka.

(2) Karena F_α tertutup, maka $X - F_\alpha$ terbuka untuk setiap $\alpha \in A$.

Sehingga $X - \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A}(X - F_\alpha)$ merupakan himpunan terbuka.

Akibatnya $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ tertutup.

(3) Karena F_j tertutup maka $X - F_j$ terbuka untuk setiap $1 \leq j \leq n$. Akibatnya $X - \bigcup_{j=1}^{n} F_j = \bigcap_{j=1}^{n}(X - F_j)$ merupakan himpunan terbuka. Sehingga $\bigcup_{j=1}^{n} F_j$ merupakan himpunan tertutup.

Teorema 2.2.14 menjelaskan bahwa setiap bola terbuka merupakan suatu himpunan terbuka, sedangkan Teorema 2.2.25 di bawah ini menjelaskan bahwa setiap bola tertutup merupakan himpunan tertutup.

Teorema 2.2.25 (Davis, 2005)

Setiap bola tertutup dalam sebarang ruang metrik (X, d) merupakan himpunan tertutup.

Bukti:

Misalkan diketahui sebarang bola tertutup $B_d[x, r] = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$. Akan dibuktikan bahwa $B_d[x, r]$ himpunan tertutup dengan cara menunjukkan bahwa $X - B_d[x, r]$ merupakan himpunan terbuka.

Misalkan $z \in X - B_d[x, r]$, maka $d(x, z) > r$. Misalkan $s = d(x, z) - r > 0$, maka $B_d[z, s] \subset X - B_d[x, r]$.

Misalkan $y \in B_d(z, s)$, maka $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ sehingga

$d(x, y) \geq d(x, z) - d(y, z) > d(x, z) - s = r$. Akibatnya $y \in X - B_d[x, r]$. Sehingga $X - B_d[x, r]$ merupakan himpunan terbuka.

Jadi terbukti bahwa setiap bola tertutup dalam sebarang ruang metrik (X, d) merupakan himpunan tertutup.

Definisi 2.2.26 (Cain, 1994)

Misalkan X sebarang himpunan. Didefinisikan τ koleksi himpunan bagian X yang memenuhi kondisi berikut:

(i) $\emptyset \in \tau$ dan $X \in \tau$.

(ii) Jika $U_\alpha \in \tau$ untuk setiap $\alpha \in I$ maka $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.

(iii) Jika $U_j \in \tau$ untuk setiap $1 \leq j \leq n$ maka $\bigcap_{j=1}^{n} U_j \in \tau$.

Maka τ disebut topologi pada X dan (X, τ) disebut ruang topologi.

Contoh 2.2.27

a. Misalkan $X = \{1,2,3\}$ dan $\tau = \big\{\emptyset, \{2\}, \{1,2,3\}\big\}$. Maka τ merupakan topologi pada X.
b. Misalkan $X = \{1,2,3\}$ dan $\tau = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2,3\}\big\}$. Maka τ bukan merupakan topologi pada X sebab $\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} \notin \tau$.
c. Misalkan $X = \{a, b\}$, maka $\tau = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$ merupakan topologi pada X.

Teorema 2.2.28 (T.W. Korner, 2014)

Misalkan (X, d) suatu ruang metrik maka koleksi dari himpunan bagian terbuka membentuk suatu topologi.

Bukti: Sesuai dengan Teorema 2.2.17.

Teorema 2.2.29 di bawah ini menjelaskan bahwa suatu metrik dapat menginduksi suatu topologi metrik.

Teorema 2.2.29 (Aphane, 2009)

Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan didefinisikan τ_d sebagai berikut:

$$\tau_d = \{A \subset X : x \in A \iff \exists r > 0 \; sehingga \; B_d(x, r) \subseteq A\}.$$

Maka τ_d adalah suatu topologi pada X.

Bukti:

(i) Jelas bahwa $\emptyset \in \tau_d$ dan $X \in \tau_d$.

(ii) Misalkan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i \in \tau_d$ dan $U = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Akan ditunjukkan bahwa $U \in \tau_d$.

Misalkan $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$, maka $a \in A_i$ untuk suatu $i \in I$.

Karena $A_i \in \tau_d$, maka terdapat $r > 0 \; sehingga \; B_d(a, r) \subseteq A_i$.

Sehingga $B_d(a, r) \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i = U$. Jadi $U \in \tau_d$.

(iii) Misalkan $A_j \in \tau_d$ untuk setiap $1 \leq j \leq n$ dan $V = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$.

Akan ditunjukkan bahwa $V \in \tau_d$.

Misalkan $a \in \bigcap_{j=1}^{n} A_j$, maka $a \in A_j$ untuk setiap $1 \leq j \leq n$. Sehingga untuk setiap $1 \leq j \leq n$ terdapat $r_j > 0$, $sehingga \; B_d(a, r_j) \subseteq A_i$.

Misalkan $r = \min\{r_j\}$ dengan $1 \leq j \leq n$.

Sehingga $r \leq r_j$ untuk setiap $1 \leq j \leq n$.

Akibatnya $B_d(a, r) \subseteq A_j$ untuk setiap $1 \leq j \leq n$.

Sehingga $B_d(a, r) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} A_j = V$. Jadi $V \in \tau_d$.

Selanjutnya τ_d disebut topologi metrik yang diinduksi oleh metrik d.

Definisi 2.2.30 (T.W. Korner, 2014)

Suatu ruang topologi (X, τ) disebut ruang Hausdorff jika untuk setiap $x, y \in X$ dengan $x \neq y$, maka terdapat dua himpunan terbuka U dan V dengan $U \cap V = \emptyset$ sedemikian sehingga $x \in U$ dan $y \in V$.

Contoh 2.2.31

Misalkan diketahui suatu ruang topologi (X, τ) dengan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = 2^x$. Maka (X, τ) merupakan suatu ruang Hausdorff sebab $\forall a, b \in X$ dengan $x \neq y$, maka terdapat $U = \{x\}$ dan $V = \{y\}$ sehingga $x \in U$, $y \in V$ dan $U \cap V = \emptyset$.

Contoh 2.2.32

Misal ruang topologi (X, τ) dengan $X = \{a, b, c, d\}$ dan $\tau = \big\{\{a, b\}, \{c, d\}, X, \emptyset\big\}$. Maka (X, τ) bukan ruang Hausdorff sebab $\exists a, b \in X$ dengan $a \neq b$, sehingga terdapat $U = \{a, b\}$ dan $V = \{a, b, c, d\}$ dengan $x \in U$, $y \in V$ dan $U \cap V = \{a, b\}$.

Teorema 2.2.33 (T.W. Korner, 2014)

Setiap ruang metrik merupakan ruang Hausdorff.

Bukti:

Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan $x, y \in X$ dengan $x \neq y$. Misalkan $U = \{x\}$ dan $V = \{y\}$, maka $U \cap V = \emptyset$ dengan $x \in U$ dan $y \in V$.

Sehingga terbukti bahwa setiap ruang metrik merupakan ruang Hausdorff.

C. Barisan di Ruang Metrik

Definisi-definisi tentang barisan, barisan konvergen, barisan Cauchy, dan ruang metrik lengkap akan dijelaskan dalam bagian ini. Selanjutnya beberapa teorema yang dipelajari dalam barisan di ruang metrik juga dijelaskan dan diberi contoh. Definisi 2.3.1 di bawah ini menjelaskan pengertian barisan dalam suatu ruang metrik dan selanjutnya contohnya disampaikan melalui Contoh 2.3.2.

Definisi 2.3.1 (Shirali, 2006)

Misalkan (X, d) suatu ruang metrik. Suatu fungsi $f: \mathbb{N} \to X$ disebut barisan jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = x_n \in X.$$

Contoh 2.3.2

Dari Contoh 2.2.2 diketahui $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ merupakan ruang metrik. Maka $\{x_n\} = \frac{1}{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ merupakan barisan dalam ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$, sebab

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \{x_n\} = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}.$$

Definisi 2.3.3 (Parzynski, 1987)

Misalkan (X, d) suatu ruang metrik, $\{x_n\}$ suatu barisan di X. Barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon, \forall n \geq n_0$.

Suatu barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik (X, d) konvergen ke $x \in X$ ditulis dengan $x_n \to x$ atau $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Contoh 2.3.4

Misalkan $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dan metrik $d(x, y) = |x - y|$. Maka barisan $\{x_n\}$ yang didiefinisikan dengan $x_n = \frac{1}{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ merupakan barisan yang konvergen ke 0, sebab untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Sehingga jika $n \geq n_0$ maka

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Jadi barisan $\{x_n\}$ konvergen ke 0.

Definisi 2.3.5 (Parzynski, 1987)

Suatu barisan $\{x_n\}$ dalam suatu ruang metrik (X, d) disebut barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Contoh 2.3.6

Barisan $\{x_n\} = \frac{1}{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ pada Contoh 2.3.2 merupakan barisan Cauchy, sebab untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$. Jika $n, m \geq n_0$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}$. Sehingga untuk setiap $n, m \geq n_0$

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Jadi barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy.

Teorema 2.3.7 (Parzynski, 1987)

Barisan $\{x_n\}$ yang konvergen dalam suatu ruang metrik (X,d) adalah barisan Cauchy.

Bukti:

Misal $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga jika $n \geq n_0$ maka $d(x_n, x) < \varepsilon$ sehingga $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Misal $n, m \geq n_0$ maka $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dengan pertidaksamaan segitiga maka

$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Jadi terbukti bahwa barisan yang konvergen dalam suatu ruang metrik merupakan barisan Cauchy.

Pengertian ruang metrik lengkap dijelaskan melalui Definisi 2.3.8 di bawah ini. Selanjutnya untuk lebih memahami ruang metrik lengkap diberikan satu contoh ruang metrik tidak lengkap yaitu Contoh 2.3.9 dan dan satu contoh ruang metrik lengkap yaitu Contoh 2.3.10

Definisi 2.3.8 (Parzynski, 1987)

Suatu ruang metrik (X,d) disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy dalam (X,d) konvergen.

Contoh 2.3.9

Misalkan $A = (0,1) \subset \mathbb{R}$ dengan $d(x,y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in A$. Maka ruang metrik (A,d) bukan merupakan ruang metrik lengkap. Sebab, $\{x_n\} = \frac{1}{n}$ merupakan barisan Cauchy tetapi tidak konvergen ke suatu elemen di A.

Contoh 2.3.10 (Parzynski, 1987)

Ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ merupakan suatu ruang metrik lengkap. Sebab, terdapat Teorema Kriteria Konvergensi Cauchy yang menyatakan bahwa setiap barisan bilangan real $\{x_n\}$ merupakan barisan konvergen jika dan hanya jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy. Artinya, misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ maka $\{x_n\}$ merupakan barisan konvergen. Sehingga $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ merupakan ruang metrik lengkap.

BAB III

KONSEP DASAR RUANG METRIK *FUZZY*

Bab III terbagi menjadi empat sub-bab, yaitu sub-bab A, sub-bab B, sub-bab C dan sub-bab D. Sub-bab A menjelaskan pengertian ruang metrik *fuzzy* dan contoh ruang metrik *fuzzy*. Sub-bab B menjelaskan kaitan ruang metrik dan ruang metrik *fuzzy* dan sifat-sifat yang terdapat dalam ruang metrik dan ruang metrik *fuzzy*. Sub-bab C membahas pengertian, contoh dan teorema yang berlaku dalam topologi yang dibangun oleh suatu ruang metrik *fuzzy*. Selanjutnya Sub-bab D menjelaskan pengertian kekonvergenan dan kelengkapan di ruang metrik *fuzzy*.

A. Pengertian Ruang Metrik *Fuzzy*

Terdapat lebih dari satu cara mendefinisikan ruang metrik *fuzzy*. Definisi ruang metrik *fuzzy* yang diperkenalkan oleh George dan Veeramani, yang digunakan sebagai acuan oleh penulis, menggunakan bantuan norm-t kontinu. Sehingga akan dijelaskan pengertian norm-t kontinu melalui Definisi 3.1.1 dan contoh norm-t kontinu yaitu Contoh 3.1.2.

Definisi 3.1.1 (Sapena, 2001)

Operasi biner $*: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ disebut norm-t jika $*$ memenuhi kondisi:

(i) Operasi biner $*$ bersifat komutatif dan asosiatif;

(ii) Untuk setiap $a \in [0,1]$, $a * 1 = a$;

(iii) Jika $a \leq c$ dan $b \leq d$ maka $a * b \leq c * d$, $\forall a, b, c, d \in [0,1]$.

Jika $*$ kontinu maka $*$ disebut norm-t kontinu.

Contoh 3.1.2

Operasi biner $*$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ didefinisikan dengan

$a * b = a \times b,\ \forall a, b \in [0,1]$. Operasi biner $*$ adalah norm-t, sebab $\forall a, b, c, d \in [0,1]$

(i) operasi biner $*$ bersifat komutatif dan asosiatif, yaitu

$a * b = a \times b = b \times a = b * a$, dan

$(a * b) * c = (a \times b) * c = a \times b \times c = a * (b \times c) = a * (b * c)$;

(ii) untuk setiap $a \in [0,1]$, $a * 1 = a \times 1 = a$;

(iii) jika $a \leq c$ maka $a * b = a \times b \leq c \times b = c * b$,

jika $b \leq d$ maka $b * c = b \times c \leq d \times c = d * c$,

sehingga $a * b = a \times b \leq c \times b = b \times c \leq d \times c = c \times d = c * d$.

Maka $*$ adalah norm-t.

Selajutnya dibuktikan $*$ kontinu di $(a, b) \in [0,1] \times [0,1]$, yaitu

a) Operasi biner $*$ terdefinisi di (a, b) karena

$*(a, b) = a * b = a \times b \in [0,1]$;

b) $\lim_{x \to (a,b)} *(x) = a * b = a \times b \in [0,1]$, sehingga $\lim_{x \to (a,b)} *(x)$ ada;

c) $*(a, b) = a \times b = \lim_{x \to (a,b)} *(x)$

Jadi $*$ adalah norm-t kontinu.

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa terdapat lebih dari satu cara mendefinisikan ruang metrik *fuzzy*. Definisi ruang metrik *fuzzy* yang diperkenalkan oleh George dan Veeramani yang digunakan sebagai acuan oleh penulis adalah sebagai berikut.

Definisi 3.1.3 (V. Gregori, 2009)

Misalkan X suatu himpunan tidak kosong, $*$ suatu norm-t kontinu, dan M suatu himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times (0, \infty)$ yang memenuhi kondisi berikut,

untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $s, t > 0$,

(i) $M(x, y, t) > 0$;

(ii) $M(x, y, t) = 1$ jika dan hanya jika $x = y$;

(iii) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$;

(iv) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$;

(v) $M(x, y, \bullet): (0, \infty) \to (0,1]$ kontinu

$(X, M, *)$ disebut ruang metrik *fuzzy*.

Nilai $M(x, y, t)$ merepresentasikan derajat kedekatan antara x dan y terhadap t.

Contoh 3.1.4 (V. Gregori, 2009)

Misalkan $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$.

Didefinisikan norm-t kontinu $a * b = a \times b$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$ dan misalkan M adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times (0, \infty)$ dengan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$M(x, y, t) = \begin{cases} 1, & x = y; \\ xyt, & x \neq y, t \leq 1; \\ xy, & x \neq y, t > 1 \end{cases}$$

untuk setiap $x, y \in X$ dan $t > 0$.

Akan dibuktikan bahwa $(X, M,*)$ adalah ruang metrik *fuzzy*.

(i) $M(x,y,t) > 0$ berdasarkan definisi $M(x,y,t)$;

(ii) $M(x,y,t) = 1$ jika dan hanya jika $x = y$ berdasarkan definisi $M(x,y,t)$;

(iii) $M(x,y,t) = M(y,x,t)$ berdasarkan definisi $M(x,y,t)$;

(iv) Akan dibuktikan $M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$;

$\forall x,y,z \in X$ dan $t,s > 0$,

(1) $x = y = z \quad \forall x,y,z \in X$ dan $t,s > 0$.

Maka $M(x,y,t) = 1$, $M(y,z,s) = 1$ dan $M(x,z,t+s) = 1$.

Akibatnya $M(x,y,t) * M(y,z,s) = M(x,z,t+s)$.

(2) $x \neq y = z$

Jika $t,s \leq 1$, dan $t + s \leq 1$ maka

$M(x,y,t) = xyt$, $M(y,z,s) = 1$ dan $M(x,z,t+s) = xz(t+s)$.

Sehingga

$M(x,y,t) * M(y,z,s) = xyt * 1 = xyt = xzt \leq xzt + xzs =$

$M(x,z,t+s)$.

Jika $t,s \leq 1$, dan $t + s > 1$ maka

$M(x,y,t) = xyt$, $M(y,z,s) = 1$ dan $M(x,z,t+s) = xz$.

Sehingga

$M(x,y,t) * M(y,z,s) = xyt = xyt = xzt \leq xz = M(x,z,t+s)$.

Jika $t,s > 1$, maka

$M(x,y,t) = xy$, $M(y,z,s) = 1$ dan $M(x,z,t+s) = xz$.

Sehingga

$M(x,y,t) * M(y,z,s) = xy * 1 = xy = xz = M(x,z,t+s)$.

Jika $t \leq 1$, dan $s > 1$ maka

$M(x,y,t) = xyt$, $M(y,z,s) = 1$ dan $M(x,z,t+s) = xz$.

Sehingga

$M(x,y,t) * M(y,z,s) = xyt = xzt \leq xz = M(x,z,t+s)$.

Jika $t > 1$, dan $s \leq 1$ maka

$M(x,y,t) = xy$, $M(y,z,s) = 1$ dan $M(x,z,t+s) = xz$.

Sehingga $M(x,y,t) * M(y,z,s) = xy = xz = M(x,z,t+s)$.

(3) $x = y \neq z$

Jika $t, s \leq 1$, dan $t + s \leq 1$ maka

$M(x,y,t) = 1$, $M(y,z,s) = yzs$ dan $M(x,z,t+s) = xz(t+s)$.

Sehingga

$M(x,y,t) * M(y,z,s) = yzs = xzs \leq xzt + xzs =$

$M(x,z,t+s)$.

Jika $t, s \leq 1$, dan $t + s > 1$ maka

$M(x,y,t) = 1$, $M(y,z,s) = yzs$ dan $M(x,z,t+s) = xz(t+s)$.

Sehingga

$M(x,y,t) * M(y,z,s) = yzs = xzs \leq xzt + xzs =$

$M(x,z,t+s)$.

Jika $t \leq 1$ dan $s > 1$ maka

$M(x,y,t) = 1$, $M(y,z,s) = yz$ dan $M(x,z,t+s) = xz$.

Sehingga $M(x,y,t) * M(y,z,s) = yz = xz = M(x,z,t+s)$.

Jika $t > 1$, dan $s \leq 1$ maka

$M(x,y,t) = 1,\ M(y,z,s) = yzs$ dan $M(x,z,t+s) = xz$.

Sehingga $M(x,y,t) * M(y,z,s) = yzs \leq xz = M(x,z,t+s)$.

(4) $x \neq y \neq z$

Jika $t,s \leq 1$, dan $t + s \leq 1$ maka

$M(x,y,t) = xyt,\ M(y,z,s) = yzs$ & $M(x,z,t+s) = xz(t+s)$.

Sehingga

$M(x,y,t) * M(y,z,s) = xyt * yzs = xy^2zst < xzt + xzs =$

$M(x,z,t+s)$.

Jika $t,s \leq 1$, dan $t + s > 1$ maka

$M(x,y,t) = xyt,\ M(y,z,s) = yzs$ dan $M(x,z,t+s) = xz$.

Sehingga

$M(x,y,t) * M(y,z,s) = xyt * yzs = xy^2zst < xz =$

$M(x,z,t+s)$.

Jika $t \leq 1$ dan $s > 1$ maka

$M(x,y,t) = xyt,\ M(y,z,s) = yz$ dan $M(x,z,t+s) = xz$.

Sehingga

$M(x,y,t) * M(y,z,s) = xyt * yz = xy^2zt < xz =$

$M(x,z,t+s)$.

Jika $t > 1$, dan $s \leq 1$ maka

$M(x, y, t) = xy,\ M(y, z, s) = yzs$ dan $M(x, z, t + s) = xz$.

Sehingga

$M(x, y, t) * M(y, z, s) = xy * yzs = xy^2zs < xz =$

$M(x, z, t + s)$.

(v) Berdasarkan definisi dari $M(x, y, \bullet)$ maka $M(x, y, \bullet)$ kontinu.

$\therefore$ $(X, M, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*.

Definisi 3.1.5 (Sapena, 2001)

Suatu ruang metrik *fuzzy* $(X, M, *)$ dengan $M(x, y, t)$ yang tidak bergantung pada nilai t disebut ruang metrik *fuzzy* stasioner.

Contoh 3.1.6

Misalkan $X = \mathbb{N}$. Didefinisikan norm-t kontinu $a * b = a \times b$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$ dan M adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times (0, \infty)$ dengan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$M(x, y, t)\begin{cases} 1 \ \ jika\ x = y \\ \dfrac{1}{xy} \ \ jika\ x \neq y \end{cases}$$

untuk setiap $t > 0$.

Akan ditunjukkan bahwa $(X, M, *)$ merupakan ruang metrik *fuzzy*.

(i) $M(x, y, t) > 0$;

(ii) $M(x, y, t) = 1$ jika dan hanya jika $x = y$;

(iii) $\forall x, y \in X$ dan $\forall t > 0$ jelas bahwa $M(x, y, t) = M(y, x, t)$.

(iv) Untuk membuktikan $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$, diperhatikan beberapa kemungkinan;

(1) $x = y = z \quad \forall x, y, z \in X$ dan $t, s > 0$.

Maka $M(x, y, t) = 1,\ M(y, z, s) = 1$ dan $M(x, z, t + s) = 1$.

Akibatnya $M(x, y, t) * M(y, z, s) = 1 = M(x, z, t + s)$.

(2) $x \neq y = z$

Maka $M(x, y, t) = \frac{1}{xy},\ M(y, z, s) = 1$ dan $M(x, z, t + s) = \frac{1}{xz}$.

Sehingga $M(x, y, t) * M(y, z, s) = \frac{1}{xy} = \frac{1}{xz} = M(x, z, t + s)$.

(3) $x = y \neq z$

$M(x, y, t) = 1, M(y, z, t) = \frac{1}{yz}$ dan $M(x, z, t + s) = \frac{1}{xz}$.

Sehingga $M(x, y, t) * M(y, z, s) = \frac{1}{yz} = \frac{1}{xz} = M(x, z, t + s)$.

(4) $x \neq y \neq z$

$M(x, y, t) = \frac{1}{xy},\ M(y, z, s) = \frac{1}{yz}$ dan $M(x, z, t + s) = \frac{1}{xz}$.

Sehingga

$M(x, y, t) * M(y, z, s) = \frac{1}{xy} * \frac{1}{yz} = \frac{1}{xy^2z} \leq \frac{1}{xz} = M(x, z, t + s)$.

(v) $M(x, y, t)$ tidak bergantung pada t, sehingga $M(x, y, \bullet)$ adalah fungsi kontinu.

$\therefore (X, M, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*.

Konsep himpunan terbatas (*bounded set*) dalam suatu ruang metrik telah dijelaskan dalam Bab II melalui Definisi 2.2.4, selanjutnya dalam konsep ruang metrik *fuzzy*, akan dijelaskan pengertian *F-bounded* melalui Definisi 3.1.5 di bawah ini.

Definisi 3.1.7 (Sapena, 2001)

Misalkan $(X, M, *)$ ruang metrik *fuzzy* dan A himpunan bagian tidak kosong dari X. Himpunan A disebut *F-bounded* jika terdapat $t > 0$ dan $0 < r < 1$ sehingga

$$M(x, y, t) > 1 - r, \qquad \forall x, y \in A.$$

Contoh 3.1.8

Diketahui ruang metrik *fuzzy* pada Contoh 3.1.4.

Misal $A = \{x\} \subset (0,1)$, maka A merupakan himpunan *F*-bounded karena untuk $t = 1$ dan $r = \frac{1}{2}$, maka $M(x, y, t) = 1 > \frac{1}{2}$.

B. Ruang Metrik *Fuzzy* yang diinduksi dari Ruang Metrik

Penulis telah menjelaskan sifat-sifat ruang metrik dalam Bab II. Selanjutnya pada bagian ini akan dijelaskan dan diberi contoh suatu teorema yang menyatakan bahwa setiap ruang metrik menginduksi suatu ruang metrik *fuzzy* dengan suatu fungsi keanggotaan dan norm-t kontinu tertentu.

Teorema 3.2.1 (Aphane, 2009)

Misal (X, d) adalah suatu ruang metrik. Didefinisikan norm-t kontinu $a * b = a \times b$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$.

Misalkan M adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times (0, \infty)$ dengan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$M(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)}$$

$\forall x, y \in X,\ t > 0$ dan $k, m, n \in \mathbb{N}$. Maka $(X, M, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*.

Bukti:

(i) Akan dibuktikan bahwa $M(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} > 0$.

Diketahui bahwa d merupakan metrik, sehingga $d(x, y) \geq 0$.

Karena $d(x, y) \geq 0$, $t > 0$ dan $k, m, n \in \mathbb{N}$ maka

$$M(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)} > 0.$$

(ii) Akan dibuktikan bahwa $M(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} = 1$ jika dan hanya jika $x = y$.

$(\Longrightarrow)$

$M(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} = 1$

$\Leftrightarrow kt^n = kt^n + md(x, y)$

$\Leftrightarrow md(x, y) = 0$

$\Leftrightarrow d(x, y) = 0$

$\Leftrightarrow x = y$

$(\Longleftarrow)$

$x = y$ maka $d(x, y) = 0$, sehingga

$M(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} = \frac{kt^n}{kt^n + 0} = 1$

(iii) Akan dibuktikan bahwa $M(x,y,t) = M(y,x,t)$.

Karena d merupakan metrik, maka $d(x,y) = d(y,x)$.

Sehingga diperoleh

$$M(x,y,t) = \frac{kt^n}{kt^n+md(x,y)} = \frac{kt^n}{kt^n+md(y,x)} = M(y,x,t).$$

(iv) Akan dibuktikan $M(x,y,t) * M(y,z,s) \leq M(x,z,t+s)$;

$\forall x,y,z \in X$ dan $t,s > 0$.

Karena d merupakan metrik, maka $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

$$\begin{aligned} M(x,y,t) * M(y,z,s) &= \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} * \frac{ks^n}{ks^n + md(y,z)} \\ &= \frac{(kt^n)(ks^n)}{(kt^n + md(x,y))(ks^n + md(y,z))} \end{aligned}$$

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ dan $m > 0$, sehingga

$md(x,z) \leq md(x,y) + md(y,z)$

$\Leftrightarrow k(t+s)^n + md(x,z) \leq k(t+s)^n + md(x,y) + md(y,z)$

$\Leftrightarrow (kt^n)(ks^n)\{k(t+s)^n + md(x,z)\}$

$\leq (kt^n)(ks^n)\{k(t+s)^n + md(x,y) + md(y,z)\}$

$= k(t+s)^n(kt^n)(ks^n) + (kt^n)(ks^n)md(x,y)$

$+ (kt^n)(ks^n)md(y,z)$

$\leq k(t+s)^n(kt^n)(ks^n) + (k(t+s)^n)(ks^n)md(x,y)$

$+ (kt^n)(k(s+t)^n)md(y,z)$

$= k(t+s)^n\{(kt^n)(ks^n) + (ks^n)md(x,y) + (kt^n)md(y,z)\}$

$$\leq k(t+s)^n\{(kt^n)(ks^n) + (ks^n)md(x,y) + (kt^n)md(y,z)$$

$$+ m^2 d(x,y)d(y,z)\}$$

$$= k(t+s)^n\big(kt^n + md(x,y)\big)\big((ks^n) + md(y,z)\big)$$

Sehingga

$$(kt^n)(ks^n)\{k(t+s)^n + md(x,z)\}$$

$$\leq k(t+s)^n\big(kt^n + md(x,y)\big)\big((ks^n) + md(y,z)\big).$$

$$\Leftrightarrow \frac{(kt^n)(ks^n)}{\big(kt^n + md(x,y)\big)\big((ks^n) + md(y,z)\big)} \leq \frac{k(t+s)^n}{k(t+s)^n + md(x,z)}$$

Akibatnya,

$$M(x,y,t) * M(y,z,s) = \frac{(kt^n)(ks^n)}{\big(kt^n + md(x,y)\big)\big((ks^n) + md(y,z)\big)}$$

$$\leq \frac{k(t+s)^n}{k(t+s)^n + md(x,z)} = M(x,z,t+s)$$

(v) Akan dibuktikan bahwa $M(x,y,\bullet): (0,\infty) \to [0,1]$ kontinu.

Diketahui $M(x,y,t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)}$.

Misalkan $f(t) = kt^n$ dan $g(t) = kt^n + md(x,y)$, maka $M(x,y,t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)} = \frac{f(t)}{g(t)}$.

$f(t) = kt^n > 0$ kontinu & $g(t) = kt^n + md(x,y) > 0$ kontinu, sehingga $\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{kt^n}{kt^n + md(x,y)}$ kontinu.

Maka $M(x,y,\bullet): (0,\infty) \to [0,1]$ adalah fungsi kontinu.

$\therefore$ $(X, M, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*.

Contoh 3.2.2

(X, d) adalah suatu ruang metrik dengan $X = \mathbb{R}$ dan metrik d yang didefinisikan dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in X$.

Didefinisikan norm-t kontinu $a * b = a \times b$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$ dan M adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times [0, \infty)$ dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$M(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)}$$

$\forall x, y \in X,\ t > 0$ dan $k, m, n \in \mathbb{N}$. Maka $(X, M, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*.

Definisi 3.2.3 (Sapena, 2001)

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik.

Didefinisikan norm-t kontinu $a * b = a \times b$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$ dan M himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times (0, \infty)$ dengan fungsi keanggotaan

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

maka $(X, M_d, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy* standar.

Selanjutnya $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ disebut metrik *fuzzy* standar yang diinduksi oleh metrik d.

Contoh 3.2.4

(X, d) adalah suatu ruang metrik dengan $X = \mathbb{R}$ dan metrik d yang didefinisikan dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in X$.

Didefinisikan norm-t kontinu $a * b = a \times b$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$.

M_d adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times [0, \infty)$ dengan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$$

untuk setiap $x, y \in X,\ \ t > 0$.

Maka $(X, M_d,*)$ adalah ruang metrik *fuzzy* standar yang diinduksi oleh metrik d.

Teorema 3.2.5 di bawah ini, menjelaskan bagaimana hubungan himpunan terbatas (*bounded*) dari suatu ruang metrik, dengan himpunan *F-bounded* dalam ruang metrik *fuzzy* yang diinduksi oleh metrik yang terkait.

Teorema 3.2.5 (Sapena 2001)

Misalkan $(X, M_d,*)$ ruang metrik *fuzzy* yang diinduksi oleh ruang metrik (X, d) dengan $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ untuk setiap , $y \in X, t > 0$, dan A himpunan bagian tidak kosong dari X. Maka A merupakan himpunan *F-bounded* di $(X, M_d,*)$ jika dan hanya jika A terbatas (*bounded*) di (X, d).

Bukti:

($\Longrightarrow$)

Misalkan A himpunan bagian tidak kosong dari X dan A merupakan himpunan *F-bounded* di ruang metrik *fuzzy* $(X, M_d,*)$,

maka terdapat $t > 0$ dan $0 < r < 1$ sehingga

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)} > 1 - r, \qquad \forall x, y \in A$$

$$\Leftrightarrow t > (t + d(x,y))(1 - r)$$

$$\Leftrightarrow t > t - tr + d(x,y) - rd(x,y)$$

$$\Leftrightarrow tr > d(x,y)(1 - r)$$

$$\Leftrightarrow \frac{tr}{(1 - r)} > d(x,y)$$

Misalkan $M = \frac{tr}{(1-r)}$, maka $d(x,y) < M,\ \forall x, y \in A$.

Jadi A merupakan himpunan terbatas di (X, d).

($\Leftarrow$)

Misalkan A himpunan bagian tidak kosong dari X dan A terbatas di (X, d), maka terdapat bilangan real positif M sehingga $d(x,y) \leq M,\ \ \forall x, y \in A$.

Sehingga $M_d(x,y,t) = \frac{t}{t+d(x,y)} \geq \frac{t}{t+M}$.

Misal $t' < t$, maka $\frac{t}{t+M} > \frac{t'}{t'+M}$, sehingga

$$M_d(x,y,t) = \frac{t}{t + d(x,y)} \geq \frac{t}{t + M} > \frac{t'}{t' + M}$$

Misal $1 - r = \frac{t'}{t'+M}$, maka $M_d(x,y,t) > \frac{t'}{t'+M} = 1 - r$.

Maka terdapat r, dengan $0 < r < 1$, sehingga

$M_d(x,y,t) > 1 - r$ untuk setiap $x, y \in A$ dan $t > 0$.

Jadi A himpunan *F-bounded* di $(X, M_d, *)$.

C. Topologi dan Ruang Metrik *Fuzzy*

Bagian ini menjelaskan pengertian bola terbuka, himpunan terbuka, dan bola tertutup di ruang metrik *fuzzy*. Selain itu, juga dikaji topologi yang diinduksi oleh metrik *fuzzy*.

1. Bola Terbuka, Bola Tertutup, dan Himpunan Terbuka di Ruang Metrik *Fuzzy*

Definisi 3.3.1 (V. Gregori, 2009)

Misalkan $(X, M,*)$ adalah ruang metrik *fuzzy*.

Bola terbuka $B_M(x, r, t)$ dengan pusat $x \in X$, jari-jari r dengan $0 < r < 1,\ t > 0$ didefinisikan sebagai

$$B_M(x, r, t) = \{y \in X :\ M(x, y, t) > 1 - r\}.$$

Contoh 3.3.2

Diketahui ruang metrik *fuzzy* pada Contoh 3.1.4. Bola terbuka $B_M(x, r, t)$ dengan pusat $0{,}5 \in X$ dan jari-jari 0,25 dengan $t = 1$ didefinisikan sebagai

$$B_M(0{,}5\ , 0{,}25, 1) = \{y \in X :\ M(0{,}5\ , y, 1) > 0.75\}$$

$$= \{y \in X : 0{,}5\ y > 0.75\} = \{y \in X : y > 0{,}15\}.$$

Teorema 2.2.8 dalam Bab II menjelaskan bahwa jika dua bola terbuka dengan pusat yang sama dalam suatu ruang metrik maka salah satunya merupakan himpunan bagian dari yang lain. Sedangkan Teorema 3.3.3 di bawah ini menjelaskan jika dua bola terbuka dengan pusat yang sama dalam suatu ruang metrik *fuzzy* maka salah satunya merupakan himpunan bagian dari yang lain.

Teorema 3.3.3 (Aphane, 2009)

Misalkan $B_M(x, r_1, t)$ dan $B_M(x, r_2, t)$ adalah dua bola terbuka dengan pusat yang sama yaitu $x \in X$ dan $t > 0$ dengan jari-jari masing-masing

$0 < r_1 < 1$ dan $0 < r_2 < 1$.

Maka $B_M(x, r_1, t) \subseteq B_M(x, r_2, t)$ atau $B_M(x, r_2, t) \subseteq B_M(x, r_1, t)$.

Bukti:

Diketahui bahwa $0 < r_1 < 1$ dan $0 < r_2 < 1$.

i) Jika $r_1 = r_2$, maka $B_M(x, r_1, t) = B_M(x, r_2, t)$, sehingga

$B_M(x, r_1, t) \subseteq B_M(x, r_2, t)$ dan $B_M(x, r_2, t) \subseteq B_M(x, r_1, t)$.

ii) Jika $r_1 \neq r_2$, maka tanpa mengurangi keumuman diasumsikan

$0 < r_1 < r_2 < 1$. Sehingga $1 - r_2 < 1 - r_1$.

Misal $a \in B_M(x, r_1, t)$, maka $M(x, a, t) > 1 - r_1$,

Akibatnya, $M(x, a, t) > 1 - r_2$.

Artinya $a \in B_M(x, r_2, t)$, sehingga $B_M(x, r_1, t) \subseteq B_M(x, r_2, t)$.

Selanjutnya dengan mengasumsikan $0 < r_2 < r_1 < 1$ dan langkah-langkah yang sama dapat dibuktikan bahwa $B_M(x, r_2, t) \subseteq B_M(x, r_1, t)$.

Keterangan: Pembuktian diambil dari Aphane (2009)

Definisi 3.3.4 (Hakan, 2007)

Misalkan $(X, M, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*.

Bola tertutup $B_M[x, r, t]$ dengan pusat $x \in X$, jari-jari r dengan $0 < r < 1, t > 0$ didefinisikan sebagai

$$B_M[x, r, t] = \{y \in X : M(x, y, t) \geq 1 - r\}.$$

Contoh 3.3.5

Diketahui ruang metrik *fuzzy* pada Contoh 3.1.4.

Bola terbuka $B_M[x, r, t]$ dengan pusat $0{,}5 \in X$ dan jari-jari 0,25 dengan $t = 1$ didefinisikan sebagai

$B_M[0{,}5\ ,0{,}25, 1] = \{y \in X :\ M(0{,}5\ , y, 1) \geq 0.75\}$

$$= \{y \in X : 0{,}5\ y \geq 0.75\} = \{y \in X : y \geq 0{,}15\}.$$

Konsep himpunan terbuka yang terdapat dalam ruang metrik juga terdapat dalam ruang metrik *fuzzy* yang dijelaskan melalui Definisi 3.3.6 dan Contoh 3.3.7 di bawah ini.

Definisi 3.3.6 (Aphane, 2009)

Misalkan $(X, M,*)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*.

Suatu himpunan bagian A dari X disebut terbuka jika untuk setiap $a \in A$, maka terdapat $0 < r < 1$ dan $t > 0$ sehingga $B_M(a, r, t) \subseteq A$.

Contoh 3.3.7

Misalkan (X, d) adalah suatu ruang metrik dengan metrik d adalah metrik diskret.

Didefinisikan norm-t kontinu $a * b = a \times b$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$.

Misalkan M_d adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times [0, \infty)$ dengan fungsi keanggotaan yang didefinisikan dengan

$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ untuk setiap $x, y \in X,\ t > 0$.

Maka $(X, M_d,*)$ adalah ruang metrik *fuzzy* standar yang diinduksi oleh metrik d.

Misalkan $A = \{x\} \subset X$, maka himpunan A terbuka karena

untuk setiap $a \in A$, terdapat $0 < r = \frac{1}{2} < 1$ dan $t = 1 > 0$ sehingga

$$B_M\left(a, \frac{1}{2}, 1\right) = \left\{y \in X : \ M(a, y, t) = \frac{1}{1 + d(a, y)} > \frac{1}{2}\right\} \subseteq A.$$

2. Topologi yang Diinduksi dari Metrik *Fuzzy*

Teorema 2.2.29 dalam Bab II menjelaskan bagaimana suatu metrik dapat menginduksi topologi metrik. Hal demikian juga terdapat dalam konsep ruang metrik *fuzzy* yang dijelaskan melalui Teorema 3.3.8 di bawah ini.

Teorema 3.3.8 (Tirado, 2012)

Misalkan $(X, M, *)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Didefinisikan

$\tau_M = \{A \subset X : x \in A \iff \exists t > 0 \ \& \ \exists r, 0 < r < 1, sehingga \ B_M(x, r, t) \subseteq A\}$.

Maka τ_M adalah suatu topologi pada X.

Bukti:

(i) Jelas bahwa $\emptyset \in \tau_M$ dan $X \in \tau_M$.

(ii) Misalkan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i \in \tau_M$ dan $U = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Akan ditunjukkan bahwa $U \in \tau_M$.

Misalkan $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$, maka $a \in A_i$ untuk suatu $i \in I$.

Karena $A_i \in \tau_M$, maka terdapat

$t > 0 \ dan \ \ 0 < r < 1, sedemikian \ sehingga \ B_M(a, r, t) \subseteq A_i$.

Sehingga $B_M(a, r, t) \subseteq A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i = U$. Jadi $U \in \tau_M$.

(iii) Misalkan $A_1, A_2, A_3, \dots, A_i \in \tau_M$ dan $V = \bigcap_{i\in I} A_i$.

Akan ditunjukkan bahwa $V \in \tau_M$.

Misalkan $a \in \bigcap_{i\in I} A_i$, maka $a \in A_i$ untuk setiap $i \in I$.

Sehingga untuk setiap $i \in I$ terdapat

$t_i > 0\ dan\ \ 0 < r_i < 1, sedemikian\ sehingga\ B_M(a, r_i, t_i) \subseteq A_i$.

Misalkan $r = \min\{r_i,\ i \in I\}$ dan $t = \min\{t_i,\ i \in I\}$.

Sehingga $r < r_i$ dan $1 - r \geq 1 - r_i$ untuk setiap $i \in I$.

Akibatnya $B_M(a, r, t) \subseteq A_i$ untuk setiap $i \in I$.

Sehingga $B_M(a, r, t) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i = V$.

Jadi $V \in \tau_M$.

Jadi, terbukti bahwa τ_M adalah suatu topologi pada X.

Keterangan: Pembuktian diambil dari Aphane (2009)

Selanjutnya, kaitan antara topologi yang diinduksi oleh suatu metrik dan topologi yang diinduksi oleh metrik *fuzzy* standar akan dijelaskan melalui teorema 3.3.9 di bawah ini.

Teorema 3.3.9 (Tirado, 2012)

Misalkan (X, d) suatu ruang metrik dan $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ adalah metrik *fuzzy* standar pada X. Maka topologi τ_d yang diinduksi oleh metrik d dan topologi τ_{M_d} yang diinduksi oleh metrik *fuzzy* M_d adalah sama, yaitu $\tau_d = \tau_{M_d}$.

Bukti:

(i) Akan ditunjukkan bahwa menunjukkan bahwa $\tau_d \subseteq \tau_{M_d}$.

Misal $A \in \tau_d$, maka terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga

$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\} \subseteq A$, untuk setiap $x \in A$.

Misal $t' > t$, maka

$$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)} \geq \frac{t}{t + \varepsilon} > \frac{t'}{t' + \varepsilon}.$$

Misal $1 - r = \frac{t'}{t'+\varepsilon}$, maka $M_d(x, y, t) > 1 - r$.

Artinya, untuk setiap $x \in A$, terdapat r, dengan $0 < r < 1$ dan $t > 0$ sehingga $B_{M_d}(x, r, t) \subseteq A$. Akibatnya $A \in \tau_{M_d}$.

Hal ini menunjukkan bahwa $\tau_d \subseteq \tau_{M_d}$.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa menunjukkan bahwa $\tau_{M_d} \subseteq \tau_d$.

Misalkan $A \in \tau_{M_d}$, maka terdapat $0 < r < 1$ dan $t > 0$ sehingga $B_{M_d}(x, r, t) = \{y \in X : M_d(x, y, t) > 1 - r\} \subseteq A$ untuk setiap $x \in A$.

$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)} > 1 - r$

$\Leftrightarrow t > (1 - r)t + (1 - r)d(x, y)$

$\Leftrightarrow d(x, y) < \frac{rt}{1-r}$

Misalkan $\varepsilon = \frac{rt}{1-r}$, maka $d(x, y) < \varepsilon$.

Artinya, untuk setiap $x \in A$, terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $B_d(x, \varepsilon) \subseteq A$.

Akibatnya $A \in \tau_d$. Hal ini menunjukkan bahwa $\tau_{M_d} \subseteq \tau_d$.

Karena $\tau_d \subseteq \tau_{M_d}$ dan $\tau_{M_d} \subseteq \tau_d$ maka $\tau_d = \tau_{M_d}$.

Keterangan: Pembuktian diambil dari Aphane (2009)

3. Hubungan Ruang Metrik *Fuzzy* dan Ruang Hausdorff

Definisi 2.2.29 menjelaskan pengertian ruang Hausdorff, sedangkan Teorema 2.2.30 menjelaskan bahwa setiap ruang metrik merupakan ruang Hausdorff. Selanjutnya, Teorema 3.3.10 di bawah ini menjelaskan bahwa setiap ruang metrik *fuzzy* juga merupakan ruang Hausdorff.

Teorema 3.3.10 (Hakan, 2007)

Setiap ruang metrik *fuzzy* merupakan ruang Hausdorff.

Bukti:

Misalkan $(X, M,*)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy* dan $x, y \in X$ dengan $x \neq y$.

Maka $0 < M(x, y, t) < 1$. Misalkan $M(x, y, t) = r$, untuk suatu $r \in (0,1)$.

Untuk setiap r_0 dengan $r < r_0 < 1$, terdapat r_1 sehingga $r_1 * r_1 \geq r_0$.

Selanjutnya diketahui dua bola terbuka $B_M(x, 1 - r_1, \frac{t}{2})$ dan $B_M(y, 1 - r_1, \frac{t}{2})$.

Andaikan terdapat $z \in B_M\left(x, 1 - r_1, \frac{t}{2}\right) \cap B_M\left(y, 1 - r_1, \frac{t}{2}\right)$,

maka $M\left(x, z, \frac{t}{2}\right) > r_1$ dan $M\left(z, y, \frac{t}{2}\right) > r_1$.

Berdasarkan definisi ruang metrik *fuzzy*, jelas bahwa

$M(x, y, t) \geq M\left(x, z, \frac{t}{2}\right) * M\left(z, y, \frac{t}{2}\right)$.

Sehingga $r = M(x, y, t) \geq M\left(x, z, \frac{t}{2}\right) * M\left(z, y, \frac{t}{2}\right) > r_1 * r_1 \geq r_0 > r$.

Akibatnya terjadi kontradiksi, sehingga tidak terdapat

$z \in B_M\left(x, 1 - r_1, \frac{t}{2}\right) \cap B_M\left(y, 1 - r_1, \frac{t}{2}\right)$ atau

$B_M\left(x, 1 - r_1, \frac{t}{2}\right) \cap B_M\left(y, 1 - r_1, \frac{t}{2}\right) = \emptyset$.

Jadi $(X, M,*)$ merupakan ruang Hausdorff.

Keterangan: Langkah-langkah pembuktian diambil dari Aphane (2009)

D. Kekonvergenan dan Kelengkapan di Ruang Metrik *Fuzzy*

Kekonvergenan dan kelengkapan di ruang metrik telah dijelaskan oleh penulis dalam Bab II. Selanjutnya, kekonvergenan dan kelengkapan di ruang metrik *fuzzy* akan dijelaskan dalam Sub-bab D ini.

Bagian awal Sub-bab D membahas pengertian, contoh dan teorema yang berlaku terkait barisan konvergen, barisan Cauchy dan kelengkapan ruang metrik *fuzzy* secara umum. Selanjutnya akan dijelaskan pengertian, contoh dan teorema yang berlaku terkait barisan konvergen, barisan Cauchy dan kelengkapan ruang metrik *fuzzy* yang lebih khusus yang diperkenalkan oleh V. Gregori, A. Lopez-Crevillen, S. Morillas, A. Sapena pada tahun 2009 melalui hasil penelitiannya yang berjudul *On convergence in fuzzy metric spaces*.

1. Barisan Konvergen di Ruang Metrik *Fuzzy*

Definisi 3.4.1 (V. Gregori, 2009)

Misalkan $(X, M, *)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Maka suatu barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $t > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$M(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Suatu barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik $(X, M, *)$ konvergen ke $x \in X$ ditulis dengan $x_n \to x$ atau $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = 1,\ \forall t > 0$.

Contoh 3.4.2

Misalkan diketahui ruang metrik *fuzzy* $(X, M_d, *)$ dengan

$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $t > 0$ dan

norm-t kontinu $a * b = a \times b$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$.

Misal $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dengan metrik yang didefinisikan dengan $d(x, y) = |x - y|$.

Maka barisan $\{x_n\} = \frac{1}{n+1}$ konvergen ke $0 \in X$ di ruang metrik (X, d).

Sehingga $\lim_{n\to\infty} d(x_n, 0) = 0$.

Akibatnya untuk setiap $t > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, 0, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + d(x_n, 0)} = \frac{\lim_{n\to\infty} t}{\lim_{n\to\infty} t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, 0)} = \frac{t}{t + 0} = 1$$

Jadi barisan $\{x_n\}$ konvergen ke 0 di ruang metrik *fuzzy* $(X, M_d, *)$.

Teorema 3.4.3 di bawah ini, menjelaskan bagaimana kaitan antara kekonvergenan suatu barisan di suatu ruang metrik dan di ruang metrik *fuzzy* yang diinduksi oleh metrik tersebut.

Teorema 3.4.3 (M. Ashar, dkk., 2012)

Misal $\{x_n\}$ adalah suatu barisan di ruang metrik (X, d), maka barisan $\{x_n\}$ adalah barisan konvergen di (X, d) jika dan hanya jika $\{x_n\}$ barisan konvergen di $(X, M_d, *)$ dengan $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}, \forall x, y \in X, t > 0$.

Bukti:

($\Longrightarrow$)

Misal $\{x_n\}$ adalah suatu barisan konvergen ke $x \in X$ di ruang metrik (X, d), maka $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Sehingga,

$$\lim_{n\to\infty} M_d(x_n, x, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + d(x_n, x)} = \frac{\lim_{n\to\infty} t}{\lim_{n\to\infty} t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x)} = \frac{t}{t + 0} = 1$$

Akibatnya, barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$ di $(X, M_d, *)$.

($\Longleftarrow$)

Misal $\{x_n\}$ barisan yang konvergen ke $x \in X$ di $(X, M_d, *)$ dengan

$M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$, maka $\lim_{n\to\infty} M_d(x_n, x, t) = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + d(x_n, x)} = \frac{\lim_{n\to\infty} t}{\lim_{n\to\infty} t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x)} = \frac{t}{t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

Akibatnya barisan $\{x_n\}$ adalah barisan yang konvergen ke $x \in X$ di (X, d).

2. Barisan Cauchy di Ruang Metrik *Fuzzy*

Definisi 3.4.4 di bawah ini akan menjelaskan pengertian barisan Cauchy dalam suatu ruang metrik *fuzzy*.

Definisi 3.4.4 (Sapena, 2001)

Suatu barisan $\{x_n\}$ di suatu ruang metrik *fuzzy* $(X, M, *)$ merupakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon \in (0,1)$, $t > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Contoh 3.4.5

Misalkan diketahui ruang metrik *fuzzy* $(X, M_d, *)$ dengan $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$,

$d(x, y) = |x - y|$, $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $t > 0$, dan

norm-t kontinu $a * b = a \times b$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$.

Maka barisan $\{x_n\} = \frac{1}{n}$ merupakan barisan Cauchy di ruang metrik (X, d), sebab

untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$.

Jika $n, m \geq n_0$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}$.

Sehingga untuk setiap $n, m \geq n_0$

$$d(x_n, x_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$

Artinya $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$.

Akibatnya,

$$\lim_{n\to\infty} M_d(x_n, x_m, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + d(x_n, x_m)} = \frac{\lim_{n\to\infty} t}{\lim_{n\to\infty} t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m)}$$

$$= \frac{t}{t+0} = 1, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Jadi barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di ruang metrik *fuzzy* $(X, M_d, *)$.

Teorema 3.4.6 di bawah ini, menjelaskan bagaimana kaitan antara suatu barisan Cauchy di suatu ruang metrik dan di ruang metrik *fuzzy* yang diinduksi oleh metrik tersebut.

Teorema 3.4.6 (Sapena, 2001)

Misal $\{x_n\}$ adalah suatu barisan di ruang metrik (X, d), maka barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy di (X, d) jika dan hanya jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy di $(X, M_d, *)$ dengan $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}, \forall x, y \in X, t > 0$.

Bukti:

$(\Longrightarrow)$

Misal $\{x_n\}$ adalah suatu barisan Cauchy di ruang metrik (X, d), maka

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0 \quad \forall n, m \geq n_0$$

Sehingga,

$$\lim_{n\to\infty} M_d(x_n, x_m, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + d(x_n, x_m)} = \frac{\lim_{n\to\infty} t}{\lim_{n\to\infty} t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m)} = \frac{t}{t+0} = 1$$

Akibatnya, barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy di $(X, M_d, *)$.

$(\Longleftarrow)$

Misal $\{x_n\}$ barisan Cauchy di $(X, M_d, *)$ dengan $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$, maka

$$\lim_{n\to\infty} M_d(x_n, x, t) = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + d(x_n, x_m)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lim_{n\to\infty} t}{\lim_{n\to\infty} t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m)} = \frac{t}{t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

Akibatnya barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy di (X, d).

3. Hubungan Barisan Konvergen dan Barisan Cauchy di Ruang Metrik *Fuzzy*

Teorema 2.3.7 menjelaskan bahwa barisan $\{x_n\}$ yang konvergen dalam suatu ruang metrik (X, d) merupakan barisan Cauchy. Sifat tersebut juga berlaku dalam ruang metrik *fuzzy*, yang akan dijelaskan melalui Teorema 3.4.7 di bawah ini.

Teorema 3.4.7 (M. Ashar, dkk., 2012)

Misalkan $(X, M,*)$ suatu ruang metrik *fuzzy*.

Jika barisan $\{x_n\} \subset X$ adalah barisan konvergen di $(X, M,*)$ maka $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di $(X, M,*)$.

Bukti:

Misalkan $\{x_n\}$ barisan konvergen ke x, maka untuk setiap $t > 0$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x_n, x, \frac{t}{2}\right) = 1.$$

Akibatnya, untuk setiap $p \in \mathbb{N}$ dan $t > 0$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x_{n+p}, x, \frac{t}{2}\right) = 1$$

Selanjutnya diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x_{n+p}, x_n, t\right) \geq \lim_{n\to\infty} M\left(x_{n+p}, x, \frac{t}{2}\right) * \lim_{n\to\infty} M\left(x_n, x, \frac{t}{2}\right) = 1 * 1 = 1.$$

Karena $M\left(x_{n+p}, x_n, t\right) \leq 1$, akibatnya $\lim_{n\to\infty} M\left(x_{n+p}, x_n, t\right) \leq 1$,

sehingga diperoleh $\lim_{n\to\infty} M\left(x_{n+p}, x_n, t\right) = 1$.

Jadi $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy.

4. Ruang Metrik *Fuzzy* Lengkap

Konsep ruang metrik lengkap yang dibahas dalam ruang metrik juga terdapat dalam ruang metrik *fuzzy* yang dijelaskan melalui Definisi 3.4.8 di bawah ini.

Definisi 3.4.8 (V. Gregori, dkk. 2009)

Suatu ruang metrik *fuzzy* disebut lengkap jika untuk setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ maka $\{x_n\}$ merupakan barisan konvergen di ruang metrik *fuzzy*.

Contoh 3.4.9 (M. Ashar, dkk., 2012)

$(X, M_d, *)$ dengan $X = \mathbb{R}$, $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $t > 0$ dan norm-t kontinu $a * b = a \times b$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$ merupakan suatu ruang metrik *fuzzy* lengkap.

Penjelasan:

Contoh 2.3.10 menjelaskan bahwa $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ merupakan ruang metrik lengkap. Artinya, setiap barisan Cauchy di $(\mathbb{R}, d)$ merupakan barisan konvergen.

$(X, M_d, *)$ merupakan ruang metrik *fuzzy* yang diinduksi oleh ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$. Teorema 3.4.3 menjelaskan bahwa barisan $\{x_n\}$ konvergen di (X, d) jika dan hanya jika $\{x_n\}$ barisan konvergen di $(X, M_d, *)$. Teorema 3.4.6 menjelaskan bahwa barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di (X, d) jika dan hanya jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy di $(X, M_d, *)$.

Berdasarkan kedua teorema tersebut selanjutnya dapat disimpulkan bahwa apabila $\{x_n\}$ barisan Cauchy di $(X, M_d, *)$ maka $\{x_n\}$ barisan konvergen di $(X, M_d, *)$. Sehingga $(X, M_d, *)$ merupakan ruang metrik *fuzzy* lengkap.

5. Barisan p −konvergen, Barisan p −Cauchy, dan Ruang Metrik *Fuzzy* p −lengkap

V. Gregori, A. Lopez-Crevillen, S. Morillas, A. Sapena pada tahun 2009 memperkenalkan pengembangan konsep kekonvergenan dan kelengkapan di ruang metrik *fuzzy* melalui hasil penelitiannya yang berjudul *On convergence in fuzzy metric spaces*. Pengembangan tersebut dilakukan dengan mengubah syarat barisan konvergen dan barisan Cauchy yang semula untuk setiap $t > 0$ menjadi untuk suatu $t_0 > 0$. Sehingga kemudian muncul istilah barisan p −konvergen, barisan p −Cauchy, dan ruang metrik *fuzzy* p −lengkap yang akan dijelaskan pengertian dan sifat-sifatnya melalui definisi dan teorema berikut.

Definisi 3.4.10 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misalkan $(X, M, *)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Suatu barisan $\{x_n\}$ di X disebut konvergen titik (*point convergent*) ke $x_0 \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan suatu $t_0 > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $M(x_n, x_0, t_0) > 1 - \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$.

Sehingga, misalkan $(X, M, *)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Suatu barisan $\{x_n\}$ di X yang konvergen titik (*point convergent*) ke $x_0 \in X$ untuk suatu $t_0 > 0$ ditulis dengan $\{x_n\}$ p −konvergen ke x_0 untuk $t_0 > 0$

Contoh 3.4.11 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misal $\{x_n\} \subset (0,1)$ barisan yang monoton naik konvergen ke 1 di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dan $X = \{x_n\} \cup \{1\}$.

Misal M adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times \mathbb{R}^+$ dengan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$M(x, x, t) = 1$ untuk setiap $x \in X$, $t > 0$;

$M(x_n, x_m, t) = \min\{x_n, x_m\}$ untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$, $t > 0$; dan

$M(x_n, 1, t) = M(1, x_n, t) = \min\{x_n, t\}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$.

Maka $(X, M, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*, dengan $a * b = \min\{a, b\}$.

Barisan $\{x_n\}$ tidak konvergen di ruang metrik *fuzzy* $(X, M, *)$, sebab $\lim_{n\to\infty} M\left(x_n, 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Namun, barisan $\{x_n\}$ p −konvergen ke 1, sebab $\lim_{n\to\infty} M(x_n, 1, t) = 1$.

Teorema 3.4.12 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misalkan $(X, M, *)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Suatu barisan $\{x_n\}$ di X merupakan barisan p −konvergen jika terdapat $x_0 \in X$ dan $t_0 > 0$ sehingga $\{x_n\}$ berada di $B_M(x_0, r, t_0)$ untuk setiap $r \in (0,1)$.

Bukti:

Misalkan $x_0 \in X$ dan $t_0 > 0$ sehingga $\{x_n\}$ berada di $B_M(x_0, r, t_0)$, $\forall r \in (0,1)$.

Maka $M(x_0, x_n, t_0) > 1 - r$, sehingga $M(x_n, x_0, t_0) > 1 - r$.

Akibatnya barisan $\{x_n\}$ p −konvergen ke x_0 untuk suatu $t_0 > 0$.

Berdasarkan definisi kekonvergenan di ruang metrik *fuzzy*, maka jelas bahwa $\{x_n\}$ di X konvergen ke x_0 jika dan hanya jika $\{x_n\}$ p −konvergen ke x_0 untuk setiap $t > 0$. Selain itu, jika $\{x_n\}$ di X p −konvergen ke x_0 dan $\{x_n\}$ merupakan barisan konvergen, maka $\{x_n\}$ konvergen ke x_0.

Definisi 3.4.13 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misal $(X, M,*)$ suatu ruang metrik *fuzzy*. Barisan $\{x_n\}$ di X disebut p −Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan suatu $t_0 > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$M(x_n, x_m, t_0) > 1 - \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Sehingga, misalkan $(X, M,*)$ ruang metrik *fuzzy*. Barisan $\{x_n\}$ di X yang p −Cauchy untuk suatu $t_0 > 0$ ditulis dengan $\{x_n\}$ p −Cauchy untuk $t_0 > 0$ atau $\{x_n\}$ p −Cauchy.

Contoh 3.4.14 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misalkan $\{x_n\} \subset (0,1)$ barisan yang monoton naik konvergen ke 1 di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dan $X = \{x_n\} \cup \{1\}$.

Misalkan M adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times \mathbb{R}^+$ dengan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$M(x, x, t) = 1$ untuk setiap $x \in X$, $t > 0$;

$M(x_n, x_m, t) = \min\{x_n, x_m\}$ untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$, $t > 0$; dan

$M(x_n, 1, t) = M(1, x_n, t) = \min\{x_n, t\}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$.

Maka $(X, M,*)$ adalah ruang metrik *fuzzy*, dengan $a * b = \min\{a, b\}$.

Barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan p −Cauchy, sebab $\lim\limits_{n\to\infty} M(x_n, x_m, t) = 1$.

Berdasarkan definisi barisan Cauchy di ruang metrik *fuzzy*, maka jelas bahwa suatu barisan $\{x_n\}$ di X merupakan barisan Cauchy jika dan hanya jika barisan $\{x_n\}$ p −Cauchy untuk setiap $t > 0$.

Setelah pengertian barisan p −konvergen dan barisan p −Cauchy dijelaskan, maka selanjutnya akan dijelaskan pengertian ruang metrik *fuzzy* p −lengkap melalui Definisi 3.4.15 di bawah ini.

Definisi 3.4.15 (V. Gregori, dkk. 2009)

Suatu ruang metrik *fuzzy* $(X, M,*)$ disebut ruang metrik *fuzzy* p −lengkap jika setiap barisan p −Cauchy di X merupakan barisan p −konvergen pada suatu titik di X.

Contoh 3.4.16 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misal $\{x_n\} \subset (0,1)$ barisan yang monoton naik konvergen ke 1 di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dan $X = \{x_n\} \cup \{1\}$.

Misalkan M adalah himpunan *fuzzy* pada $X \times X \times \mathbb{R}^n$ dengan fungsi keanggotaan yang didefinisikan sebagai berikut:

$M(x, x, t) = 1$ untuk setiap $x \in X$, $t > 0$;

$M(x_n, x_m, t) = \min\{x_n, x_m\}$ untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$, $t > 0$; dan

$M(x_n, 1, t) = M(1, x_n, t) = \min\{x_n, t\}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$.

Maka $(X, M,*)$ adalah ruang metrik *fuzzy*, dengan $a * b = \min\{a, b\}$.

Karena $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x_m, t) = 1$ untuk setiap $t > 0$, maka jelas bahwa $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Namun karena $\{x_n\}$ tidak konvergen, akibatnya $(X, M,*)$ bukan ruang metrik *fuzzy* lengkap.

Namun akan ditunjukkan bahwa $(X, M,*)$ merupakan ruang metrik *fuzzy* p −lengkap.

Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan p −Cauchy di X.

Maka $\{x_n\}$ merupakan barisan yang konvergen ke 1.

Selanjutnya $\lim_{n\to\infty} M(x_n, 1,1) = \lim_{n\to\infty} x_n = 1$, sehingga $\{x_n\}$ p −konvergen ke 1. Jadi $(X, M,*)$ adalah ruang metrik *fuzzy* p −lengkap.

BAB IV

KEKONVERGENAN DAN KELENGKAPAN DI RUANG METRIK *FUZZY*

Kekonvergenan dan kelengkapan di ruang metrik biasa telah dijelaskan dalam Bab II. Selanjutnya, kekonvergenan dan kelengkapan di ruang metrik *fuzzy* akan dijelaskan oleh penulis dalam Bab IV. Bagian awal Bab IV membahas pengertian, contoh dan teorema yang berlaku terkait barisan konvergen, barisan Cauchy dan kelengkapan ruang metrik *fuzzy* secara umum. Selanjutnya membahas pengertian, contoh dan teorema yang berlaku terkait barisan konvergen, barisan Cauchy dan kelengkapan ruang metrik *fuzzy* yang lebih khusus yang diperkenalkan oleh V. Gregori, A. Lopez-Crevillen, S. Morillas, A. Sapena pada tahun 2009 melalui hasil penelitiannya yang berjudul *On convergence in fuzzy metric spaces*.

Definisi 4.1.1 (Aphane, 2009)

Misalkan $(X, M,*)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Maka suatu barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $t > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$M(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Suatu barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik $(X, M,*)$ konvergen ke $x \in X$ ditulis dengan $x_n \to x$ atau $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = 1,\ \forall t > 0$.

Contoh 4.1.2 (Aphane, 2009)

$(X, M,*)$ dengan $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $t > 0$ dan norm-t kontinu $a * b = a \times b$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Misal $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dengan metrik yang didefinisikan dengan $d(x, y) = |x - y|$. Maka barisan $\{x_n\} = \frac{1}{n}$ konvergen ke $0 \in X$. Sehingga $\lim_{n\to\infty} d(x_n, 0) = 0$. Akibatnya untuk setiap $t > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, 0, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + d(x_n, 0)} = \frac{\lim_{n\to\infty} t}{\lim_{n\to\infty} t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, 0)} = \frac{t}{t + 0} = 1$$

Jadi barisan $\{x_n\}$ konvergen ke 0.

Teorema 4.1.3 (Aphane, 2009)

Misalkan $(X, M,*)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Suatu barisan $\{x_n\}$ di X konvergen ke x jika dan hanya jika untuk setiap $t > 0$ dan $\varepsilon \in (0,1)$, $\{x_n\}$ berada di $B_M(x, \varepsilon, t)$.

Bukti:

($\Longrightarrow$)

Misal suatu barisan $\{x_n\}$ di X konvergen ke x, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $t > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$M(x_n, x, t) = M(x, x_n, t) > 1 - \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Akibatnya $x_n \in B_M(x, \varepsilon, t), \forall n \geq n_0$.

($\Longleftarrow$)

Misal $\{x_n\}$ berada di $B_M(x, \varepsilon, t)$ untuk setiap $t > 0$ dan $\varepsilon \in (0,1)$, maka

$$M(x, x_n, t) > 1 - \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

Sehingga $M(x, x_n, t) = M(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$.

Akibatnya barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x.

Jadi, terbukti bahwa suatu barisan $\{x_n\}$ di X konvergen ke x jika dan hanya jika untuk setiap $t > 0$ dan $\varepsilon \in (0,1)$, $\{x_n\}$ berada di $B_M(x, \varepsilon, t)$.

Teorema 4.1.4 di bawah ini, menjelaskan bagaimana kaitan antara kekonvergenan suatu barisan di suatu ruang metrik biasa dan di ruang metrik *fuzzy* yang diinduksi oleh metrik tersebut.

Teorema 4.1.4 (Aphane, 2009)

Misal $\{x_n\}$ adalah suatu barisan di ruang metrik (X, d), maka barisan $\{x_n\}$ adalah barisan konvergen di (X, d) jika dan hanya jika $\{x_n\}$ barisan konvergen di $(X, M_d, *)$ dengan $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x,y)}$.

Bukti:

($\Longrightarrow$)

Misal $\{x_n\}$ adalah suatu barisan konvergen ke $x \in X$ di ruang metrik (X, d), maka $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$. Sehingga,

$$\lim_{n \to \infty} M_d(x_n, x, t) = \lim_{n \to \infty} \frac{t}{t + d(x_n, x)} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} t}{\lim\limits_{n \to \infty} t + \lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x)} = \frac{t}{t + 0} = 1$$

Akibatnya, barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in X$ di $(X, M_d, *)$.

($\Longleftarrow$)

Misal $\{x_n\}$ barisan yang konvergen ke $x \in X$ di $(X, M_d, *)$ dengan $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$, maka $\lim_{n\to\infty} M_d(x_n, x, t) = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + d(x_n, x)} = \frac{\lim_{n\to\infty} t}{\lim_{n\to\infty} t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x)} = \frac{t}{t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

Akibatnya barisan $\{x_n\}$ adalah barisan yang konvergen ke $x \in X$ di (X, d).

Definisi 4.1.5 di bawah ini akan menjelaskan pengertian barisan Cauchy dalam suatu ruang metrik *fuzzy*.

Definisi 4.1.5 (V. Gregori, 2009)

Suatu barisan $\{x_n\}$ di suatu ruang metrik *fuzzy* $(X, M, *)$ merupakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon \in (0,1)$, $t > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Contoh 4.1.6

$(X, M, *)$ dengan $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $t > 0$ dan norm-t kontinu $a * b = ab$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*.

Misal $X = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dengan metrik yang didefinisikan dengan $d(x, y) = |x - y|$.

Maka barisan $\{x_n\} = \frac{1}{n}$ merupakan barisan Cauchy sebab untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$.

Jika $n, m \geq n_0$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ dan $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}$. Sehingga untuk setiap $n, m \geq n_0$

$$d(x_n, x_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$

Atau $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$.

Akibatnya,

$$\lim_{n\to\infty} M_d(x_n, x_m, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + d(x_n, x_m)} = \frac{\lim_{n\to\infty} t}{\lim_{n\to\infty} t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m)} = \frac{t}{t+0}$$

$$= 1, \ \ \forall n, m \geq n_0$$

Jadi barisan $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy.

Teorema 4.1.7 di bawah ini, menjelaskan bagaimana kaitan antara suatu barisan Cauchy di suatu ruang metrik biasa dan di ruang metrik *fuzzy* yang diinduksi oleh metrik tersebut.

Teorema 4.1.7 (V. Gregori, 2009)

Misal $\{x_n\}$ adalah suatu barisan di ruang metrik (X, d), maka barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy di (X, d) jika dan hanya jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy di $(X, M_d, *)$ dengan $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$.

Bukti:

$(\Longrightarrow)$

Misal $\{x_n\}$ adalah suatu barisan Cauchy di ruang metrik (X, d), maka $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0 \quad \forall n, m \geq n_0$.

$$\lim_{n\to\infty} M_d(x_n, x_m, t) = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + d(x_n, x_m)} = \frac{\lim_{n\to\infty} t}{\lim_{n\to\infty} t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m)} = \frac{t}{t+0}$$

$$= 1$$

Akibatnya, barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy di $(X, M_d, *)$.

$(\Longleftarrow)$

Misal $\{x_n\}$ barisan Cauchy di $(X, M_d, *)$ dengan $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$, maka

$\lim_{n\to\infty} M_d(x_n, x, t) = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + d(x_n, x_m)} = \frac{\lim_{n\to\infty} t}{\lim_{n\to\infty} t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m)} = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{t + d(x_n, x_m)}$$

$$= \frac{t}{t + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

Akibatnya barisan $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy di (X, d).

Teorema 2.3.7 menjelaskan bahwa barisan $\{x_n\}$ yang konvergen dalam suatu ruang metrik (X, d) merupakan barisan Cauchy. Selanjutnya sifat tersebut juga berlaku dalam ruang metrik *fuzzy*, yang akan dijelaskan melalui Teorema 4.1.8 di bawah ini.

Teorema 4.1.8 (Aphane, 2009)

Misalkan $(X, M, *)$ suatu ruang metrik *fuzzy* dan barisan $\{x_n\} \subset X$. Jika barisan $\{x_n\}$ konvergen di $(X, M, *)$ maka $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy di $(X, M, *)$.

Bukti:

Misalkan $\{x_n\}$ barisan konvergen ke x, maka untuk setiap $t > 0$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x_n, x, \frac{t}{2}\right) = 1.$$

Akibatnya, untuk setiap $p \in \mathbb{N}$ dan $t > 0$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} M\left(x_{n+p}, x, \frac{t}{2}\right) = 1$$

Selanjutnya diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} M(x_{n+p}, x_n, t) \geq \lim_{n\to\infty} M\left(x_{n+p}, x, \frac{t}{2}\right) * \lim_{n\to\infty} M\left(x_n, x, \frac{t}{2}\right) = 1 * 1 = 1.$$

Karena $M(x_{n+p}, x_n, t) \leq 1$, akibatnya $\lim_{n\to\infty} M(x_{n+p}, x_n, t) \leq 1$, sehingga diperoleh $\lim_{n\to\infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$.

Jadi $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy.

Konsep ruang metrik lengkap yang dibahas dalam ruang metrik biasa juga terdapat dalam ruang metrik *fuzzy* yang dijelaskan melalui Definisi 4.1.9 di bawah ini.

Definisi 4.1.9 (Aphane, 2009)

Ruang metrik *fuzzy* dengan setiap barisan Cauchy konvergen disebut ruang metrik *fuzzy* lengkap.

Contoh 4.1.10 (M. Ashar, dkk., 2012)

Ruang metrik *fuzzy* $(X, M_d, *)$ dengan $X = \mathbb{R}$ dan $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $t > 0$ dan norm-t kontinu $a * b = a \times b$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy* lengkap.

V. Gregori, A. Lopez-Crevillen, S. Morillas, A. Sapena pada tahun 2009 memperkenalkan pengembangan konsep kekonvergenan dan kelengkapan di ruang metrik *fuzzy* melalui hasil penelitiannya yang berjudul *On convergence in fuzzy metric spaces*. Pengembangan tersebut dilakukan dengan mengubah syarat barisan konvergen dan barisan Cauchy yang semula untuk setiap $t > 0$ menjadi untuk suatu $t_0 > 0$. Sehingga kemudian muncul istilah barisan p −konvergen, barisan p −Cauchy, dan ruang metrik *fuzzy* p −lengkap yang akan dijelaskan pengertian dan sifat-sifatnya oleh penulis melalui definisi dan teorema berikut.

Definisi 4.2.1 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misalkan $(X, M,*)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Suatu barisan $\{x_n\}$ di X disebut konvergen titik (*point convergent*) ke $x_0 \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan suatu $t_0 > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $M(x_n, x_0, t_0) > 1 - \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$.

Sehingga, misalkan $(X, M,*)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Suatu barisan $\{x_n\}$ di X yang konvergen titik (*point convergent*) ke $x_0 \in X$ untuk suatu $t > 0$ ditulis dengan $\{x_n\}$ p −konvergen ke x_0 untuk $t_0 > 0$ atau $\{x_n\}$ p −konvergen.

Contoh 4.2.2 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misal $X = \{x_n\} \subset (0,1]$ barisan yang monoton naik konvergen ke 1. Didefinisikan fungsi $M(x, x, t) = 1$ untuk setiap $x \in X$, $t > 0$, $M(x_n, x_m, t) = \min\{x_n, x_m\}$ untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, dan $M(1, x_n, t) = \min\{x_n, t\}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$.

Maka $(X, M, *)$ adalah ruang metrik *fuzzy*, dengan $a * b = \min\{a, b\}$. Barisan $\{x_n\}$ p $-$konvergen ke 1, sebab $\lim_{n\to\infty} M(x_n, 1, t) = 1$.

Teorema 4.2.3 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misalkan $(X, M, *)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Suatu barisan $\{x_n\}$ di X p $-$konvergen jika terdapat $x_0 \in X$ dan $t_0 > 0$ sehingga $\{x_n\}$ berada di $B_M(x_0, r, t_0)$ untuk setiap $r \in (0,1)$.

Bukti:

Misalkan $x_0 \in X$ dan $t_0 > 0$ sehingga $\{x_n\}$ berada di $B_M(x_0, r, t_0)$ untuk setiap $r \in (0,1)$.

Maka $M(x_0, x_n, t_0) > 1 - r$, sehingga $M(x_n, x_0, t_0) > 1 - r$.

Akibatnya barisan $\{x_n\}$ di p $-$konvergen ke x_0 untuk suatu $t_0 > 0$.

Teorema 4.2.4 di bawah ini menjelaskan kaitan antara definisi barisan konvergen secara umum dan definisi barisan p $-$konvergen dalam suatu ruang metrik *fuzzy*.

Teorema 4.2.4 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misalkan $(X, M, *)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Suatu barisan $\{x_n\}$ di X konvergen ke x_0 jika dan hanya jika $\{x_n\}$ p $-$konvergen ke x_0 untuk setiap $t > 0$.

Bukti:

Jelas berdasarkan definisi kekonvergenan di ruang metrik *fuzzy*.

Teorema 4.2.5 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misalkan $(X, M,*)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Jika suatu barisan $\{x_n\}$ di X p −konvergen ke x_0 dan $\{x_n\}$ adalah barisan konvergen, maka $\{x_n\}$ konvergen ke x_0.

Bukti: Jelas berdasarkan definisi kekonvergenan di ruang metrik *fuzzy*.

Selanjutnya, akan dijelaskan pengertian ruang metrik *fuzzy principal*. Namun, definisi ruang metrik *fuzzy principal* memerlukan pengertian *local base* maka terlebih dahulu akan dijelaskan pengertian *local base* melalui Definisi 4.2.6 di bawah ini.

Definisi 4.2.6 (S. Stephen, 2010)

Misalkan X adalah suatu topologi dan $p \in X$. Suatu *local base* dari topologi X pada $p \in X$ adalah koleksi himpunan terbuka dari X, ditulis dengan $\mathcal{B}(p)$, yang memenuhi syarat berikut:

Untuk setiap himpunan terbuka $U \subseteq X$ dengan $p \in U$ terdapat $V \in \mathcal{B}(p)$ sehingga $p \in V$ dan $V \subseteq U$.

Contoh 4.2.7 (S. Stephen, 2010)

Misalkan (X, d) ruang metrik. Maka setiap bola terbuka dengan pusat $p \in X$ membentuk *local base* dari topologi X pada p.

Definisi 4.2.8 (V. Gregori, dkk. 2009)

Suatu ruang metrik *fuzzy* $(X, M,*)$ disebut *principal* jika $\{B_M(x, r, t) : r \in (0,1)\}$ adalah *local base* pada $x \in X$ untuk setiap $t > 0$.

Contoh 4.2.9 (V. Gregori, dkk. 2009)

$(X, M_d, *)$ dengan $M_d(x, y, t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $t > 0$ dan norm-t kontinu $a * b = a \times b$ untuk setiap $a, b \in [0,1]$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy* yang *principal*.

Teorema 4.2.10 (V. Gregori, dkk. 2009)

Suatu ruang metrik *fuzzy* $(X, M, *)$ *principal* jika dan hanya jika setiap barisan yang p −konvergen merupakan barisan konvergen.

Bukti:

$(\Rightarrow)$

Misalkan $(X, M, *)$ *principal* dan $\{x_n\}$ adalah barisan yang p −konvergen ke x_0 untuk suatu $t > 0$. Karena $(X, M, *)$ *principal* maka $\left\{B_M\left(x_0, \frac{1}{n}, t_0\right) : r \in (0,1)\right\}$ adalah *local base* pada x_0. Sehingga dapat ditentukan $m \in \mathbb{N}$ sehingga $B_M\left(x_0, \frac{1}{m}, t_0\right) \subset B_M(x_0, \varepsilon, t_0)$.

Karena $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x_0, t_0) = 1$, maka dapat ditentukan $\delta \in (0,1)$, dengan $\delta < \frac{1}{m}$, dan $n_1 \in \mathbb{N}$ sehingga $x_n \in B_M(x_0, \delta, t_0)$ untuk setiap $n \geq n_1$. Akibatnya $x_n \in B_M(x_0, \varepsilon, t)$ untuk setiap $n \geq n_1$. Sehingga $M(x_n, x_0, t) > 1 - \varepsilon$ untuk setiap $n \geq n_1$, dan $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x_0, t) = 1$. Pernyataan di atas berlaku $\forall t > 0$ sehingga $\{x_n\}$ konvergen ke x_0.

($\Leftarrow$)

Misalkan $(X, M,*)$ tidak *principal*, maka dapat ditentukan $x_0 \in X$ dan $t > 0$ sehinggan $\left\{B_M\left(x_0, \frac{1}{n}, t_0\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ bukan *local base* pada x_0. Maka dapat ditentukan $t > 0$ dan $r \in (0,1)$ sehingga $B_M\left(x_0, \frac{1}{n}, t_0\right) \nsubseteq B_M(x_0, r, t)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya menggunakan induksi, dibentuk suatu barisan $\{x_n\}$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dipilih $x_n \in B_M\left(x_0, \frac{1}{n}, t_0\right) \backslash B_M(x_0, r, t)$. Selanjutnya untuk $\varepsilon \in (0,1)$, dipilih $n_1 \in \mathbb{N}$ dengan $\frac{1}{n_1} < \varepsilon$. Sehingga untuk $m \geq n$ diperoleh $M(x_n, x_0, t_0) > 1 - \frac{1}{m} > 1 - \frac{1}{n_1} > 1 - \varepsilon$ dan karena pemiliha ε secara sebarang maka $\{x_n\}$ adalah barisan p −konvergen ke x_0. Sehingga dengan kata lain, mengkonstruksi $x_n \in X \backslash B_M(x_0, r, t)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ mengakibatkan $\{x_n\}$ tidak konvergen ke x_0. Sehingga berdasarkan Teorema 4.1.17, $\{x_n\}$ tidak konvergen.

Definisi 4.2.11 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misal $(X, M,*)$ suatu ruang metrik *fuzzy*. Suatu barisan $\{x_n\}$ di X disebut p −Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan suatu $t_0 > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga,

$$M(x_n, x_m, t_0) > 1 - \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0.$$

Sehingga, misalkan $(X, M,*)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Suatu barisan $\{x_n\}$ di X yang p −Cauchy untuk suatu $t_0 > 0$ ditulis dengan $\{x_n\}$ p −Cauchy untuk $t_0 > 0$ atau $\{x_n\}$ p −Cauchy.

Contoh 4.2.12 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misalkan $\{x_n\}$ barisan yang monoton naik konvergen ke 1 dan $X = \{x_n\} \cup \{1\}$. Didefinisikan fungsi $M(x, x, t) = 1$ untuk setiap $x \in X$ dan $t > 0$, $M(x_n, x_m, t) = \min\{x_n, x_m\}$ untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, dan $M(1, x_n, t) = \min\{x_n, t\}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Maka $(X, M,*)$ adalah ruang metrik *fuzzy*, dengan $a * b = \min\{a, b\}$. Barisan $\{x_n\}$ p −Cauchy, sebab $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x_m, t) = 1$.

Teorema 4.2.13 di bawah ini menjelaskan kaitan antara definisi barisan Cauchy secara umum dan definisi barisan p −Cauchy dalam suatu ruang metrik *fuzzy*.

Teorema 4.2.13 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misalkan $(X, M,*)$ adalah suatu ruang metrik *fuzzy*. Suatu barisan $\{x_n\}$ di X merupakan barisan Cauchy jika dan hanya jika $\{x_n\}$ p −Cauchy untuk setiap $t > 0$.

Bukti:

Jelas berdasarkan definisi barisan Cauchy di ruang metrik *fuzzy*.

Pengertian barisan p −konvergen dan barisan p −Cauchy telah dijelaskan, maka selanjutnya akan dijelaskan pengertian ruang metrik *fuzzy* p −lengkap melalui Definisi 4.2.11 di bawah ini.

Definisi 4.2.14 (V. Gregori, dkk. 2009)

Suatu ruang metrik *fuzzy* $(X, M,*)$ disebut p −lengkap jika setiap barisan p −Cauchy di X merupakan barisan p −konvergen pada suatu titik di X.

Contoh 4.2.15 (V. Gregori, dkk. 2009)

Misalkan $\{x_n\}$ barisan yang monoton naik konvergen ke 1 dan $X = \{x_n\} \cup \{1\}$. Didefinisikan fungsi $M(x, x, t) = 1$ untuk setiap $x \in X$ dan $t > 0$, $M(x_n, x_m, t) = \min\{x_n, x_m\}$ untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, dan $M(1, x_n, t) = \min\{x_n, t\}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Maka $(X, M,*)$ adalah ruang metrik *fuzzy*, dengan $a * b = \min\{a, b\}$. Karena $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x_m, t) = 1$ untuk setiap $t > 0$, maka $\{x_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Namun karena $\{x_n\}$ tidak konvergen, akibatnya $(X, M,*)$ bukan ruang metrik *fuzzy* lengkap.

Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan p −Cauchy di X. Maka $\{x_n\}$ merupakan barisan yang konvergen ke 1. Selanjtnya $\lim_{n\to\infty} M(x_n, 1,1) = \lim_{n\to\infty} x_n = 1$ 1, sehingga $\{x_n\}$ p −konvergen ke 1. Jadi $(X, M,*)$ adalah ruang metrik *fuzzy* p −lengkap.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat penulis ambil setelah mengkaji ruang metrik *fuzzy* dan sifat-sifatnya adalah sebagai berikut.

1. Pengertian ruang metrik *fuzzy* dijelaskan oleh penulis mengacu pada definisi yang diperkenalkan oleh George dan Veeramani yaitu dengan bantuan norm-t kontinu.
2. Beberapa sifat yang dipelajari dalam ruang metrik *fuzzy* memiliki berbagai kaitan dengan ruang metrik, contohnya adalah sebagai berikut:
   a. Setiap dua bola terbuka dengan pusat yang sama dalam suatu ruang metrik, salah satunya merupakan himpunan bagian dari yang lain. Sifat tersebut juga berlaku dalam ruang metrik *fuzzy*.
   b. Setiap ruang metrik menginduksi ruang metrik *fuzzy* dengan suatu fungsi keanggotaan dan norm-t kontinu tertentu.
   c. Setiap himpunan di ruang metrik terbatas (*bounded*) jika dan hanya jika himpunan tersebut *F-bounded* di ruang metrik *fuzzy* yang diinduksi.
   d. Suatu metrik dapat menginduksi topologi metrik. Hal demikian juga terdapat dalam konsep ruang metrik *fuzzy*.
   e. Topologi metrik yang diinduksi oleh suatu metrik d sama dengan topologi metrik *fuzzy* yang diinduksi oleh metrik *fuzzy* M_d.

f. Setiap ruang metrik merupakan ruang Hausdorff. Hal tersebut juga berlaku untuk ruang metrik *fuzzy*.

3. Beberap sifat yang dijelaskan dan dikaji dalam ekonvergenan dan kelengkapan di ruang metrik *fuzzy* adalah sebagai berikut.

   a. Setiap barisan yang konvergen di suatu ruang metrik merupakan barisan konvergen di ruang metrik *fuzzy* yang diinduksi oleh metrik tersebut.

   b. Setiap barisan Cauchy di suatu ruang metrik merupakan barisan Cauchy di ruang metrik *fuzzy* yang diinduksi oleh metrik tersebut.

   c. Seperti dalam ruang metrik, setiap barisan yang konvergen dalam suatu ruang metrik *fuzzy* merupakan barisan Cauchy.

4. Konsep kekonvergenan dan kelengkapan di ruang metrik *fuzzy* yang dikembangkan oleh V. Gregori, dkk dalam *On convergence in fuzzy metric spaces* dilakukan dengan mengubah syarat barisan konvergen dan barisan Cauchy. Sehingga kemudian didefinisikan barisan $p-$konvergen, barisan $p-$Cauchy, dan ruang metrik *fuzzy* $p-$lengkap.

B. SARAN

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mempelajari beberapa konsep dalam ruang metrik *fuzzy* yang belum dibahas oleh penulis, antara lain adalah pemetaan di ruang metrik *fuzzy*, serta kekompakan dan kekontinuan di ruang metrik *fuzzy*.