

ANALISA KESTABILAN PERSAMAAN GERAK ROKET TIGA DIMENSI TIPE RXX-LAPAN

Subchan¹, Rifa'i, M²., Apriliani, E³.

^{1,2,3} Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
¹subchan@matematika.its.ac.id

Abstrak

Pada paper ini dibahas roket kendali dengan enam derajat kebebasan yang terdiri dari tiga gerak translasi dan tiga gerak rotasi. Persamaan gerak roket merupakan model persamaan nonlinear. Desain sistem kendali diawali dengan melakukan linierisasi. Selanjutnya hasil linierisasi dianalisa kestabilannya dengan menggunakan kestabilan Ruth-Hurwitz. Uji kestabilan sistem dilakukan dengan berbagai output serta mengambil data parameter terbang pada roket tipe RXX-LAPAN yang dianalisa dari beberapa kondisi kecepatan. Hasil dari penelitian diketahui bahwa sistem persamaan gerak roket pada kecepatan mach 0.2, mach 0.5, mach 1.0 dikatakan stabil. Sedangkan pada analisa kecepatan diatas mach 1.0 diketahui bahwa sistem persamaan gerak roket tidak stabil.

Kata kunci: kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, roket kendali

PENDAHULUAN

Rocket kendali merupakan wahana terbang yang dapat digunakan pada berbagai misi tertentu, misalnya untuk kepentingan ilmiah dan pertahanan keamanan suatu negara. Rocket kendali yang dibahas adalah roket RXX-LAPAN. Rocket ini didesain dengan menggunakan dua stage (fase), yaitu *boosting* dan *sustaining*. Fase *boosting* adalah fase yang dimulai sejak awal peluncuran roket sampai ketinggian tertentu. Setelah itu roket mengalami separasi (pemisahan) dan motor roket akan dinyalakan. Pada saat motor roket menyala fase inilah yang dinamakan fase *sustaining*. Dalam fase *sustaining*, roket akan dikendalikan untuk mencapai target atau sasaran tertentu (Fitria,2010). Pada roket kendali terdapat gaya dorong, sistem penargetan, dan sistem pengendalian. Sistem kendali roket dapat bekerja dengan baik, apabila semua subsistem mampu bersinergi secara maksimal. Sehingga mampu mencapai hasil yang diharapkan.

Secara umum, roket memiliki enam derajat kebebasan gerak (*six freedom of degree*) yang terdiri dari tiga gerak translasi dan tiga gerak rotasi. Sehingga memungkinkan roket bergerak tidak stabil. Untuk itu, diperlukan sistem gerak roket yang stabil. Sistem gerak roket merupakan persamaan *nonlinear* tiga dimensi yang rumit dan kompleks. Dalam analisa lebih lanjut diperlukan proses hampiran persamaan *nonlinear* dengan bentuk linear yaitu proses linearisasi persamaan gerak roket terdiri dari dua bagian, yaitu gerak longitudinal dan gerak *lateral-directional* (Nelson,R, 1998). Pada gerak longitudinal ini terdapat dua gerak translasi dan satu gerak rotasi. Sedangkan pada gerak *lateral directional* terdapat dua gerak rotasi dan satu gerak translasi. Gerakan roket ini

ditentukan oleh sirip (aktuator) yang berada pada *tail* (ekor roket), meliputi *elevator*, *rudder* dan *aileron*. Sirip-sirip inilah yang nantinya mengontrol pergerakan roket.

Pada paper ini dibahas tentang linearisasi persamaan nonlinear gerak roket serta analisa kestabilan sistem pada fase *sustaining* menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz. Kemudian dilakukan uji kestabilan dari sistem persamaan gerak roket. Parameter yang digunakan dalam uji kestabilan ini, adalah parameter roket RKK-LAPAN yang dianalisa pada kondisi kecepatan terbang yang bervariasi.

PEMBAHASAN

A. Geometri Roket RKK-LAPAN

RKK-LAPAN ini merupakan salah satu roket yang disiapkan untuk menjadi *guided missile* (peluru kendali). Roket RKK-LAPAN mempunyai empat *tail fin*, yang masing-masing terdiri dari dua *tail fin* vertikal dan horizontal yang berfungsi sebagai sirip kendali (Husnul, dkk, 2010). Sirip kendali roket ada tiga jenis, yaitu *elevator*, *rudder* dan *aileron*. Kontrol *elevator* merupakan kontrol yang mengatur gerakan naik turun hidung roket. *Tail* yang bekerja pada kontrol elevator adalah *tail fin* horizontal. Kontrol *rudder* merupakan kontrol yang dapat membelokkan hidung roket ke kanan dan ke kiri. *Tail* yang bekerja pada kontrol *rudder* adalah *tail fin* vertikal. Sedangkan kontrol *aileron* merupakan kontrol yang mengatur gerak *roll* (memutar) roket.

B. Model Persamaan Gerak Roket

Persamaan gerak roket merupakan model persamaan *nonlinear*. Jika diasumsikan roket sebagai benda tegar, maka roket mempunyai enam derajat kebebasan. Berdasarkan hukum kedua Newton, persamaan gerak roket dapat dibagi menjadi dua, yaitu persamaan gaya dan persamaan momen.

$$F = m \frac{d}{dt}(mV) \quad (1)$$

$$\tau = \frac{d}{dt}(H) \quad (2)$$

Kemudian dengan mentransformasi persamaan gaya dan momen dalam acuan koordinat sumbu bumi, persamaan gerak roket secara umum dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} F_x &= m(\dot{u} + qw - vr + \sin \theta) \\ F_y &= m(\dot{v} + ur - pw - g \cos \theta \sin \phi) \\ F_z &= m(\dot{w} + vp - uq - g \cos \theta \cos \phi) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} L &= I_{xx} \dot{p} - I_{xz} (\dot{r} + pq) + qr(I_{zz} - I_{yy}) \\ M &= I_{yy} \dot{q} + I_{xz} (p^2 - r^2) + pr(I_{xx} - I_{zz}) \\ N &= I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + pq(I_{yy} - I_{xx}) - I_{xz} qr \end{aligned} \quad (4)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3) dan (4) diperlukan persamaan kecepatan anguler yang ditransformasi dari koordinat sumbu bumi ke koordinat sumbu badan.

$$\begin{aligned}
 p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\
 q &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi \\
 r &= -\dot{\theta} \sin \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \varphi
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

C. Linearisasi

Persamaan *nonlinear* gerak roket termasuk persamaan yang rumit, sehingga perlu dilakukan penyederhanaan untuk kepentingan analisa. Dalam hal ini, persamaan *nonlinear* akan dilinearisasi menggunakan teori gangguan kecil dititik kesetimbangannya. Teori gangguan kecil ini mengasumsikan bahwa gerak roket terdiri dari pergeseran kecil dari kondisi terbang stabil. Dengan kata lain, semua variabel dari persamaan gerak roket diganti dengan nilai kesetimbangan ditambah dengan gangguan.

Ketika gangguan dari kondisi rata-rata dianggap sangat kecil, maka berlaku sebagai berikut :

- a. perkalian (*product*) antar gangguan dianggap nol.
- b. sinus dari sudut gangguan dianggap sama dengan sudut gangguan, sedangkan cosinus dari sudut gangguan dianggap sama dengan satu.

Sehingga persamaan (3)-(5) berubah menjadi :

$$\begin{aligned}
 \Delta F_x &= m[\Delta \dot{u} + w_0 \Delta q + q_0 \Delta w - v_0 \Delta r - r_0 \Delta v + g \cos \theta_0 \Delta \theta] \\
 \Delta F_y &= m[\Delta \dot{v} + u_0 \Delta r + r_0 \Delta u - w_0 \Delta p - p_0 \Delta w - g \cos \theta_0 \cos \varphi_0 \Delta \varphi + g \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \Delta \theta] \\
 \Delta F_z &= m[\Delta \dot{w} + v_0 \Delta p + p_0 \Delta v - u_0 \Delta q - q_0 \Delta u + g \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \Delta \varphi + g \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \Delta \theta]
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta L &= I_{xx} \Delta \dot{p} - I_{xz} \Delta \dot{r} + (q_0 \Delta r + r_0 \Delta q)(I_{zz} - I_{yy}) - I_{xz} (p_0 \Delta q + q_0 \Delta p) \\
 \Delta M &= I_{yy} \Delta \dot{q} + (p_0 \Delta r + r_0 \Delta p)(I_{xx} - I_{zz}) + 2I_{xz} (p_0 \Delta p - r_0 \Delta r) \\
 \Delta N &= I_{zz} \Delta \dot{r} - I_{xz} \Delta \dot{p} + (p_0 \Delta q + q_0 \Delta p)(I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz} (q_0 \Delta r + r_0 \Delta q)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta p &= \Delta \dot{\phi} - \dot{\psi} \cos \theta_0 \Delta \theta - \Delta \dot{\psi} \sin \theta_0 \\
 \Delta q &= -\dot{\theta} \sin \phi_0 \Delta \phi + \Delta \dot{\theta} \cos \phi_0 + \Delta \dot{\psi} \cos \theta_0 \sin \phi_0 + \dot{\psi}_0 (\cos \theta_0 \cos \phi_0 \Delta \phi - \sin \theta_0 \sin \phi_0 \Delta \theta) \\
 \Delta r &= -\dot{\theta} \cos \phi_0 \Delta \phi - \Delta \dot{\theta} \sin \phi_0 + \Delta \dot{\psi} \cos \theta_0 \cos \phi_0 - \dot{\psi}_0 (\cos \theta_0 \sin \phi_0 \Delta \phi + \sin \theta_0 \cos \phi_0 \Delta \theta)
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Persamaan (6)-(7) merupakan persamaan gerak roket terlinearisasi dengan menghilangkan persamaan pada kondisi awal setimbang. Pada kasus tertentu perlu dipertimbangkan kondisi penerbangan sederhana, misalnya kondisi terbang lurus (Blacelock,J, 1990). Hal ini mengakibatkan

$$\dot{\psi}_0 = \psi_0 = v_0 = \phi_0 = p_0 = q_0 = r_0 = \dot{p}_0 = \dot{q}_0 = \dot{r}_0 = 0.$$

Sehingga persamaan (6)-(7) sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \Delta F_x &= m[\Delta \dot{u} + w_0 \Delta q + g \cos \theta_0 \Delta \theta] \\
 \Delta F_y &= m[\Delta \dot{v} + u_0 \Delta r - w_0 \Delta p - g \cos \theta_0 \Delta \phi] \\
 \Delta F_z &= m[\Delta \dot{w} - u_0 \Delta q + g \sin \theta_0 \Delta \theta]
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \Delta L &= I_{xx} \Delta \dot{p} - I_{xz} \Delta \dot{r} \\ \Delta M &= I_{yy} \Delta \dot{q} \\ \Delta N &= I_{zz} \Delta \dot{r} - I_{xz} \Delta \dot{p} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= \Delta \dot{\phi} - \Delta \dot{\psi} \sin \theta_0 \\ \Delta q &= I_{yy} \Delta \dot{q} \\ \Delta r &= \Delta \dot{\psi} \cos \theta_0 \end{aligned} \tag{11}$$

Persamaan (9) dan (10) merupakan persamaan gerak untuk perubahan kecil disekitar nilai kesetimbangannya atau disebut persamaan gangguan dari gaya dan momen.

Gangguan dalam analisa gerak roket sangat berpengaruh pada gaya dan momen roket. Gangguan-gangguan ini secara tidak langsung ditransformasi ke dalam bentuk fungsi gangguan sebagai berikut (Fitria,2010).

$$\begin{aligned} \Delta F_x &= f_1(\Delta u, \Delta w, \Delta \delta_e) \\ \Delta F_y &= f_2(\Delta v, \Delta p, \Delta r, \Delta \delta_r) \\ \Delta F_z &= f_3(\Delta u, \Delta w, \Delta \dot{w}, \Delta q, \Delta \delta_e) \\ \Delta L &= f_4(\Delta v, \Delta p, \Delta r, \Delta \delta_r, \Delta \delta_a) \\ \Delta M &= f_5(\Delta u, \Delta w, \Delta \dot{w}, \Delta q, \Delta \delta_e) \\ \Delta N &= f_6(\Delta v, \Delta p, \Delta r, \Delta \delta_r, \Delta \delta_a) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan ekspansi Deret Taylor maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \Delta F_x &= \frac{\partial F_x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial F_x}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial F_x}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e \\ \Delta F_y &= \frac{\partial F_y}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial F_y}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial F_y}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial F_y}{\partial \delta_r} \Delta \delta_r \\ \Delta F_z &= \frac{\partial F_z}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial F_z}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial F_z}{\partial \dot{w}} \Delta \dot{w} + \frac{\partial F_z}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial F_z}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e \\ \Delta L &= \frac{\partial L}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial L}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial L}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \Delta \delta_r + \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \Delta \delta_a \\ \Delta M &= \frac{\partial M}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial M}{\partial w} \Delta w + \frac{\partial M}{\partial \dot{w}} \Delta \dot{w} + \frac{\partial M}{\partial q} \Delta q + \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \Delta \delta_e \\ \Delta N &= \frac{\partial N}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial N}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial N}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial N}{\partial \delta_r} \Delta \delta_r + \frac{\partial N}{\partial \delta_a} \Delta \delta_a \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan differensial orde pertama gerak roket sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{u} &= F_{xu} + F_{xw} - g \cos \theta_0 \Delta \theta + F_{\delta_e} \Delta \delta_e \\ \Delta \dot{v} &= F_{yv} \Delta v + F_{yp} \Delta p + F_{yr} \Delta r - u_0 \Delta r + w_0 \Delta p + g \cos \theta_0 \Delta \phi + F_{y\delta_r} \Delta \delta_r \\ \Delta \dot{w} &= F_{zu} \Delta u + F_{zw} \Delta w + F_{z\dot{w}} \Delta \dot{w} + F_{zq} \Delta q + u_0 \Delta q - g \sin \theta_0 \Delta \theta + F_{z\delta_e} \Delta \delta_e \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{p} &= L_v \Delta v + L_p \Delta p + L_r \Delta r + \frac{I_{xz}}{I_{xx}} \Delta \dot{r} + L_{\delta_r} \Delta \delta_r + L_{\delta_a} \Delta \delta_a \\ \Delta \dot{q} &= M_u \Delta u + M_w \Delta w + M_{\dot{w}} \Delta \dot{w} + M_q \Delta q + M_{\delta_e} \Delta \delta_e \\ \Delta \dot{r} &= N_v \Delta v + N_p \Delta p + N_r \Delta r + \frac{I_{xz}}{I_{zz}} \Delta \dot{p} + N_{\delta_r} \Delta \delta_r + N_{\delta_a} \Delta \delta_a \end{aligned}$$

(13)

Kemudian, dari hasil data terbang aerodinamika, tidak semua parameter terbang berpengaruh signifikan. Parameter yang diabaikan adalah $F_{zq}, F_{zw}, F_{yp}, F_{yr}$ (Donald, M.D, 1990).

Dengan menggunakan sumbu kestabilan (keseimbangan) roket, w_0 dapat dianggap nol. Sedangkan θ_0 sama dengan sudut jalur terbang γ_0 jika sudut serang α_0 diasumsikan nol, Maka persamaan gerak roket menjadi berikut :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{u} &= F_{xu} \Delta u + F_{xv} \Delta w - g \Delta \theta + F_{x\delta_e} \Delta \delta_e \\ \Delta \dot{\beta} &= F_{y\beta} \Delta \beta + \Delta r - \frac{g \Delta \phi}{u_0} + \frac{F_{y\delta_r} \Delta \delta_r}{u_0} \\ \Delta \dot{w} &= F_{zu} \Delta u + F_{zw} \Delta w + u_0 \Delta q + F_{z\delta_e} \Delta \delta_e \\ \Delta \dot{p} &= L'_\beta \Delta \beta + L'_p \Delta p + L'_r \Delta r + L'_{\delta_r} \Delta \delta_r + L'_{\delta_a} \Delta \delta_a \\ \Delta \dot{q} &= (M_u + M_w F_{zu}) \Delta u + (M_w + M_w F_{zw}) \Delta w + (M_q + M_w u_0) \Delta q + (M_{\delta_e} + M_w F_{z\delta_e}) \Delta \delta_e \\ \Delta \dot{r} &= N'_\beta \Delta \beta + N'_p \Delta p + N'_r \Delta r + N'_{\delta_r} \Delta \delta_r + N'_{\delta_a} \Delta \delta_a \end{aligned} \tag{14}$$

dengan : $\Delta \dot{\theta} = \Delta q$

$$\Delta \dot{\phi} = \Delta p$$

D. Matriks State Space

Persamaan (14) dapat dibentuk menjadi matriks *state space* yang dibagi menjadi dua bagian, yaitu persamaan longitudinal dan persamaan *lateral-directional*. Adapun matriks *state space*-nya adalah sebagai berikut :

a. Matriks state space persamaan longitudinal

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{u} \\ \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xu} & F_{xv} & 0 & -g \\ F_{zu} & F_{zw} & u_0 & 0 \\ \tilde{M}_u & \tilde{M}_w & \tilde{M}_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \\ \Delta q \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{x\delta_e} \\ F_{z\delta_e} \\ (M_{\delta_e} + M_w F_{z\delta_e}) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_e \end{bmatrix}$$

dengan : $\tilde{M}_u = (M_u + M_w F_{zu})$

$$\tilde{M}_w = (M_w + M_w F_{zw})$$

$$\tilde{M}_q = (M_q + M_w u_0)$$

Dari matriks state space diatas, terlihat bahwa variabel keadaannya terdiri dari kecepatan linear u dan w , laju sudut angguk q , dan sudut angguk θ . Masukan (kendali) dari sistem tersebut adalah defleksi sirip elevator δ_e . Sedangkan hasil yang diharapkan adalah sebagai berikut :

Tabel 1. Hasil persamaan longitudinal

No	Output	Matriks Output
1.	Δu	$[1 \ 0 \ 0 \ 0]$
2.	Δw	$[0 \ 1 \ 0 \ 0]$
3.	Δq	$[0 \ 0 \ 1 \ 0]$

4.	$\Delta\theta$	$[0 \ 0 \ 0 \ 1]$
----	----------------	-------------------

b. Matriks state space persamaan lateral-directional

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\beta} \\ \Delta\dot{p} \\ \Delta\dot{r} \\ \Delta\dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{yv} & 0 & 1 & -g \\ L'_\beta & L'_p & L'_r & u_0 \\ N'_\beta & N'_p & N'_r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{y\delta_r} & 0 \\ u_0 & L'_{\delta_a} \\ L'_{\delta_r} & N'_{\delta_a} \\ N'_{\delta_r} & N'_{\delta_a} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_r \\ \Delta\delta_a \end{bmatrix}$$

dengan : $L'_v = (\frac{I_{xz}}{I_{xx}} N_v + L_v)$ $N'_v = (\frac{I_{xz}}{I_{zz}} L_v + N_v)$

$L'_p = (\frac{I_{xz}}{I_{xx}} N_p + L_p)$ $N'_p = (\frac{I_{xz}}{I_{zz}} L_p + N_p)$

$L'_r = (\frac{I_{xz}}{I_{xx}} N_r + L_r)$ $N'_r = (\frac{I_{xz}}{I_{zz}} L_r + N_r)$

$L'_{\delta_a} = (\frac{I_{xz}}{I_{xx}} N_{\delta_a} + L_{\delta_a})$ $N'_{\delta_a} = (\frac{I_{xz}}{I_{zz}} L_{\delta_a} + N_{\delta_a})$

$L'_{\delta_r} = (\frac{I_{xz}}{I_{xx}} N_{\delta_r} + L_{\delta_r})$ $N'_{\delta_r} = (\frac{I_{xz}}{I_{zz}} L_{\delta_r} + N_{\delta_r})$

$L'_\beta = L'_v u_0$ $N'_\beta = N'_v u_0$

Pada matriks state space di atas, terlihat bahwa yang menjadi variabel state adalah *sideslip angles* β , laju sudut yaw p , laju sudut roll r , serta sudut yaw ϕ . Input dari sistem tersebut adalah defleksi sirip *rudder* δ_r dan *aileron* δ_a . Sedangkan hasil yang diharapkan adalah sebagai berikut :

Tabel 2. Output persamaan lateral-directional

No	Output	Matriks Output
1.	$\Delta\beta$	$[1 \ 0 \ 0 \ 0]$
2.	Δp	$[0 \ 1 \ 0 \ 0]$
3.	Δr	$[0 \ 0 \ 1 \ 0]$
4.	$\Delta\phi$	$[0 \ 0 \ 0 \ 1]$

E. Analisa Kestabilan Persamaan Gerak Roket

Hal pertama yang harus dilakukan untuk menganalisa kestabilan suatu sistem adalah mencari nilai eigen λ pada masing-masing persamaan gerak roket.

a. Kestabilan pada gerak longitudinal

Matriks A dari gerak longitudinal adalah

$$A = \begin{bmatrix} F_{xu} & F_{xw} & 0 & -g \\ F_{zu} & F_{zw} & u_0 & 0 \\ \tilde{M}_u & \tilde{M}_w & \tilde{M}_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan rumus $\det(\lambda I - A) = 0$ diperoleh persamaan karakteristik berikut :

$$\lambda^4 + \lambda^3(-\tilde{M}_q - F_{zw} - F_{xu}) + \lambda^2(\tilde{M}_q F_{zw} - \tilde{M}_w u_0 + F_{xu} \tilde{M}_q + F_{xu} F_{zw} - F_{xw} F_{zu}) - \lambda(F_{xu} F_{zw} \tilde{M}_q - F_{xu} \tilde{M}_w u_0 - F_{xw} F_{zu} \tilde{M}_q + \tilde{M}_u F_{xw} u_0 - g \tilde{M}_u) + g(F_{zu} \tilde{M}_w - F_{zw} \tilde{M}_u) = 0$$

atau dibentuk menjadi persamaan polinomial orde 4 sebagai berikut :

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$$

dengan : $a_0 = 1$

$$a_1 = (-\tilde{M}_q - F_{zw} - F_{xu})$$

$$a_2 = (\tilde{M}_q F_{zw} - \tilde{M}_w u_0 + F_{xu} \tilde{M}_q + F_{xu} F_{zw} - F_{xw} F_{zu})$$

$$a_3 = -(F_{xu} F_{zw} \tilde{M}_q - F_{xu} \tilde{M}_w u_0 - F_{xw} F_{zu} \tilde{M}_q + \tilde{M}_u F_{xw} u_0 - g \tilde{M}_u)$$

$$a_4 = g(F_{zu} \tilde{M}_w - F_{zw} \tilde{M}_u)$$

Selanjutnya untuk mendapatkan akar-akar karakteristik (nilai eigen λ) digunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz.

Tabel 3. Routh-Hurwitz pada gerak longitudinal

λ^4	a_0	a_2	a_4
λ^3	a_1	a_3	0
λ^2	b_1	b_2	0
λ^1	b_3	0	0
λ^0	b_4	0	0

dengan: $b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = a_4$

$$b_3 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1}, \quad b_4 = b_2 = a_4$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz sistem dikatakan stabil, jika semua suku-suku pada kolom pertama bernilai sama yaitu positif atau negatif semua. Sehingga, sistem pada persamaan gerak longitudinal dikatakan stabil menurut kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, apabila memenuhi :

- $(\tilde{M}_q + F_{zw} + F_{xu}) < 0$
- $(\tilde{M}_q^2 - F_{zw} F_{zu})(F_{xu} + F_{zw}) + (F_{xu}^2 - \tilde{M}_w u_0)(F_{zw} + \tilde{M}_q) < \tilde{M}_u (F_{xw} u_0 - g) - F_{zw}^2 [(\tilde{M}_q + F_{xu}) + \frac{2F_{xu} \tilde{M}_q}{F_{zw}}]$
- $F_{zu} \tilde{M}_w > F_{zw} \tilde{M}_u$
- $[(F_{zw}(\tilde{M}_q + F_{xu}) - \tilde{M}_w u_0 + F_{xu} \tilde{M}_q - F_{xw} F_{zu})][F_{xu} (F_{zw} \tilde{M}_q - \tilde{M}_w u_0) + F_{xw} (-F_{zu} \tilde{M}_q + \tilde{M}_u u_0) - g \tilde{M}_u]$

$$\langle g(F_{zw} \tilde{M}_w - F_{zw} \tilde{M}_u)(\tilde{M}_q + F_{zw} + F_{xu}) + \frac{[F_{xu}(F_{zw} \tilde{M}_q - \tilde{M}_w u_0) + F_{xw}(-F_{zu} \tilde{M}_q + \tilde{M}_u u_0) - g \tilde{M}_u]^2}{\tilde{M}_q + F_{zw} + F_{xu}} \rangle$$

b. kestabilan pada gerak lateral-directional

Matriks A dari gerak *lateral-directional* adalah

$$A = \begin{bmatrix} F_{yv} & 0 & 1 & -\frac{g}{u_0} \\ L'_\beta & L'_p & L'_r & 0 \\ N'_\beta & N'_p & N'_r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut :

$$\lambda^4 - \lambda^3(N'_r + L'_p + F_{yv}) + \lambda^2(L'_p N'_r - L'_r N'_p + F_{yv} N'_r + F_{yv} L'_p - N'_\beta) + \lambda(F_{yv} L'_p N'_r - F_{yv} L'_r N'_p + L'_\beta N'_p - L'_p N'_\beta - \frac{g}{u_0} L'_\beta) + \frac{g}{u_0}(L'_r N'_\beta - L'_\beta N'_r) = 0$$

Dengan menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz seperti dijelaskan pada bagian sebelumnya, sistem persamaan gerak *lateral-directional* dikatakan stabil apabila memenuhi :

1. $(N'_r + L'_p + F_{yv}) < 0$
2. $(L'_p{}^2 - N'_\beta)(N'_r + F_{yv}) + (F_{yv}{}^2 - N'_p N'_r)(N'_r + L'_p) < L'_\beta(N'_p - \frac{g}{u_0}) + N'_r{}^2[(L'_p + F_{yv}) + \frac{2L'_p F_{yv}}{N'_r}]$
3. $L'_r N'_\beta > L'_\beta N'_r$
4. $[L'_p(N'_r + F_{yv}) - L'_r N'_p + F_{yv} N'_r - N'_\beta][F_{yv}(L'_p N'_r - L'_r N'_p) + L'_\beta(N'_p - \frac{g}{u_0}) - L'_p N'_\beta] < \frac{g}{u_0}(L'_r N'_\beta - L'_\beta N'_r)(N'_r + L'_p + F_{yv}) + \frac{[F_{yv}(L'_p N'_r - L'_r N'_p) + L'_\beta(N'_p - \frac{g}{u_0}) - L'_p N'_\beta]^2}{(N'_r + L'_p + F_{yv})}$

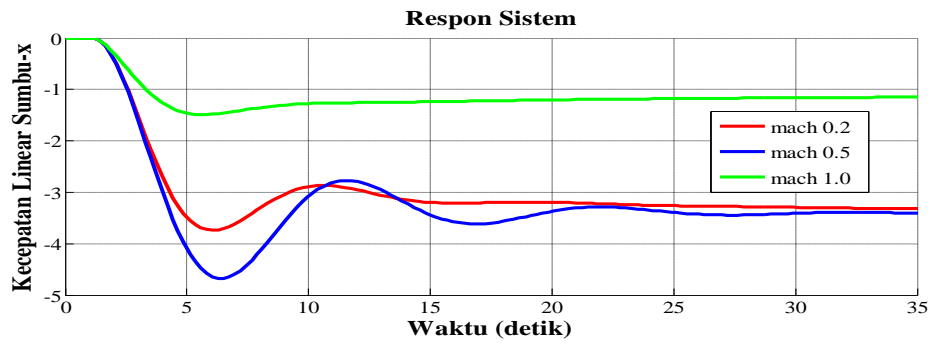
F. Uji Kestabilan Sistem

Uji kestabilan menitikberatkan pada uji titik terbang yang ditentukan. Titik yang dimaksud disini adalah kecepatan roket untuk tipe roket RXX-200 LAPAN.

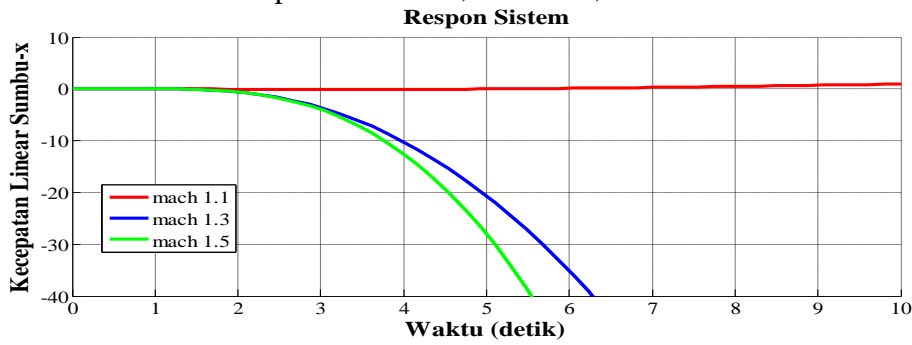
Kecepatan yang dianalisa antara lain pada mach 0.2, mach 0.5, mach 1.0, mach 1.1 mach 1.3, mach 1.5.

Berikut ini adalah contoh grafik simulasi yang menggambarkan suatu kestabilan atau ketidakstabilan.

➤ Gerak longitudinal dengan output kecepatan linear sumbu-x

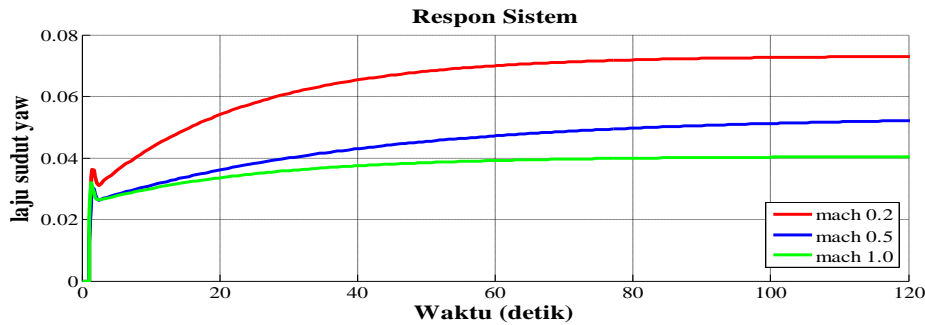


Gambar 1. Grafik kecepatan linear sumbu-x pada mach 0.2, mach 0.5, mach 1.0

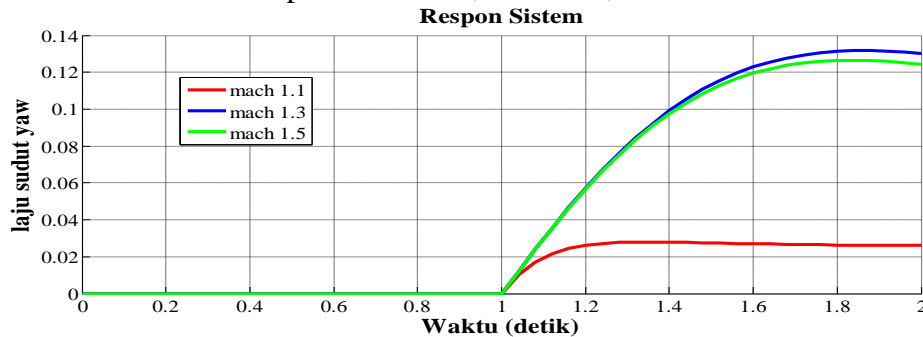


Gambar 2. Grafik kecepatan linear sumbu-x pada mach 1.1, mach 1.3, mach 1.5

- Gerak lateral-directional dengan output laju sudut yaw serta pengaruh defleksi aileron



Gambar 3. Grafik laju sudut yaw pengaruh defleksi aileron pada mach 0.2, mach 0.5, mach 1.0



Gambar 4. Grafik laju sudut yaw pengaruh defleksi aileron pada mach 1.1, mach 1.3, mach 1.5

KESIMPULAN

Dari hasil analisa dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa, sistem persamaan gerak roket yang dianalisa pada kecepatan mach 0.2, mach 0.5, mach 1.0 sistem dikatakan stabil. Sedangkan pada kecepatan diatas mach 1.0 sistem dikatakan tidak stabil.

DAFTAR PUSTAKA

- Blackelock, J. (1990). *Automatic Control of Aircraft and Missiles*, USA : Yellow springs.
- Donald, M.D. (1990). *Automatic Flight Control System*, New York : Pretince Hall Internasional (UK).
- Fitria, D. (2010). *Desain dan Implementasi Pengontrol PI Optimal Pada Gerak Longitudinal Roket RXX-200 LAPAN*, Bandung : Tugas Akhir S1 Departemen Teknik Fisika ITB.
- Husnul, A.dkk. (2010). *Structure and Mechanic DIV*, Bogor : LAPAN
- Nelson, R. (1998). *Flight Stability And Automatic Control*, USA : MCGraw-Hill.