 ISBN : 978-979-16353-8-7

A-3

BEBERAPA SIFAT TERKAIT SUBMODUL SEMIPRIMA

Dian Ariesta Yuwaningsih[1]

[1]Mahasiswa S2 Matematika UGM
dian.ariesta17@yahoo.com

Abstrak

Diberikan *R* merupakan ring dengan elemen satuan, *M* *R*-modul kanan, dan $S = End_R(M)$ merupakan ring endomorfisma modul. Submodul sejati invarian penuh *X* di *M* disebut submodul prima apabila untuk setiap ideal *I* di *S* dan submodul invarian penuh *U* di *M* dengan $I(U) \subseteq X$ berakibat $I(M) \subseteq X$ atau $U \subseteq X$. Suatu submodul *P* di *M* disebut submodul semiprima apabila *P* merupakan irisan dari submodul-submodul prima di *M*. Dalam tulisan ini akan dibahas mengenai beberapa sifat terkait submodul semiprima dengan mengacu pada definisi submodul prima di atas.

Kata kunci: submodul prima, submodul semiprima, submodul invarian penuh.

PENDAHULUAN

Pada teori ring, telah dikenal adanya konsep ideal prima. Kemudian dari ideal prima dapat diturunkan konsep terkait ideal semiprima. Begitu halnya dalam teori modul, tedapat konsep submodul prima yang merupakan generalisasi dari ideal prima pada suatu ring. Berdasarkan konsep submodul prima ini dapat diturunkan konsep submodul semiprima yang merupakan irisan dari submodul-submodul prima di dalam modul tersebut.

Konsep terkait submodul prima telah banyak dibahas dalam sejumlah paper dan jurnal. Salah satunya dibahas dalam [1] dan [2]. Dalam papernya, [1] mendefinisikan submodul prima dengan memandang modul *M* sebagai modul atas ring ring dengan elemen satuan *R*. Namun dalam papernya [2] submodul prima didefinisikan dengan memandang modul *M* sebagai modul atas ring endomorfisma $S = \mathrm{End}_R(M)$. Konsep yang diperkenalkan oleh [2] ini sebenarnya sama dengan konsep yang diperkenalkan oleh [1] hanya berbeda pada ring pembentukannya saja. Selain itu dalam [2] juga diperkenalkan konsep submodul semiprima yang merupakan irisan dari semua submodul prima.

Apabila diberikan ring *R* dengan elemen satuan, *M* merupakan modul kanan atas ring *R*, sera ring endomorfisma $S = \mathrm{End}_R(M)$, maka modul *M* otomatis juga dapat dipandang sebagai modul kiri atas ring endomorfisma *S*. Pada makalah ini, akan dibahas mengenai konsep submodul semiprima pada *M* dengan mengacu pada definisi submodul

 ISBN : 978-979-16353-8-7

semiprima yang didefinisikan oleh [2]. Akan dibahas juga beberapa sifat terkait submodul semiprima dan modul semiprima.

PEMBAHASAN

SUBMODUL PRIMA DAN SUBMODUL SEMIPRIMA

Pada bagian ini akan dibicarakan mengenai konsep submodul prima dari suatu *M R*-modul. Dalam keseluruhan isi makalah ini, yang dimaksud dengan *M R*-modul adalah *M* merupakan modul kanan atas ring *R* dengan elemen satuan 1_R dan yang dimaksud dengan $S = \mathrm{End}_R(M)$ merupakan ring endomorfisma modul.

Dalam paper ini, pendefinisian submodul prima dibatasi hanya untuk suatu submodul sejati yang invarian penuh di dalam *M R*-modul. Suatu submodul *X* di *M* disebut submodul invarian penuh (*fully invariant*) apabila untuk setiap $f \in S$ memenuhi $f(X) \subseteq X$. Dapat ditunjukkan bahwa himpunan dari semua submodul invarian penuh di *M* tertutup terhadap operasi penjumlahan dan irisan submodul. Berikut diberikan definisi dari submodul prima di *M R*-modul.

Definisi 2.1. [2] Diberikan *M R*-modul dan submodul sejati yang invarian penuh *X* di *M*. Submodul *X* disebut submodul prima di *M* apabila untuk setiap ideal *I* di *S* dan submodul invarian penuh *U* di *M* dengan $I(U) \subseteq X$ maka berakibat $I(M) \subseteq X$ atau $U \subseteq X$.

Suatu *M R*-modul disebut modul prima apabila 0 merupakan submodul prima di *M*.. Selanjutnya, berikut diberikan suatu teorema yang menyatakan beberapa ekuivalensi terkait definisi dari submodul prima.

Teorema 2.2. [2] Diberikan *M* R-modul dan submodul sejati yang invarian penuh *X* di *M*. Pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen:

a) X merupakan submodul prima di *M*.

b) Untuk setiap ideal kanan *I* di *S* dan submodul *U* di *M* dengan $I(U) \subseteq X$ maka berakibat $I(M) \subseteq X$ atau $U \subseteq X$.

c) Untuk setiap $\varphi \in S$ dan submodul invarian penuh *U* di *M* dengan $\varphi(U) \subseteq X$ maka berakibat $\varphi(M) \subseteq X$ atau $U \subseteq X$.

d) Untuk setiap $\varphi \in S$ dan $m \in M$ dengan $\varphi(S(m)) \subseteq X$ maka berakibat $\varphi(M) \subseteq X$ atau $m \in X$.

Selanjutnya, suatu submodul prima *X* di *M* disebut submodul prima minimal apabila tidak ada submodul prima lain di *M* yang termuat di dalam submodul *X*. Berikut diberikan salah satu sifat terkait submodul prima minimal.

Proposisi 2.3. [2] Jika *P* merupakan submodul prima di *M R*-modul, maka *P* memuat submodul prima minimal di *M*.

Sebelum masuk ke pembahasan selanjutnya, diketahui bahwa suatu *M R*-modul merupakan modul *self-generator* apabila modul *M* membangun setiap submodulnya. Berikut diberikan suatu sifat terkait modul *self-generator*.

Proposisi 2.4. [6] Diberikan *M R*-modul dan ring endomorfisma $S = \mathrm{End}_R(M)$. Modul *M* merupakan modul *self-generator* jika dan hanya jika untuk setiap submodul *U* di *M* memenuhi sifat $U = Hom_R(M,U)(M)$.

Suatu M R-modul merupakan modul *quasi-projective* apabila untuk setiap epimorfisma $f : M \longrightarrow N$ dan homomorfisma $g : M \longrightarrow N$, tedapat homomorfisma $H : M \longrightarrow M$ sedemikian hingga memenuhi $g = f \circ h$. Berikut diberikan suatu sifat terkait dengan modul *quasi-projective*.

Proposisi 2.5. [5] Diberikan M R-modul dan ring endomorfisma $S = \mathrm{End}_R\left(M\right)$. Jika M merupakan modul *quasi-projective*, dibangun secara hingga, dan N merupakan submodul di M, maka untuk setiap $I \subseteq Hom_R\left(M, N\right)$ memenuhi $I = Hom_R\left(M, MI\right)$.

Selanjutnya, didefinisikan himpunan $I_X \subseteq S$ dengan $I_X = \left\{ f \in S \mid f\left(M\right) \subseteq X \right\}$. Berikut diberikan suatu lemma yang menyatakan syarat perlu himpunan I_X menjadi suatu ideal di S.

Lemma 2.6. [2] Diberikan M R-modul dan $S = End\left(M_R\right)$. Apabila X merupakan submodul invarian penuh di M, maka $I_X = \left\{ f \in S \mid f\left(M\right) \subseteq X \right\}$ merupakan ideal di S.

Dalam pembentukan ideal I_X diperlukan submodul invarian penuh X di M. Apabila X merupakan submodul prima, ternyata I_X membentuk ideal prima di S. Hal ini dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 2.7. [2] Diberikan M R-modul, ring endomorfisma $S = End\left(M_R\right)$, dan submodul invarian penuh X di M.

a) Jika X merupakan submodul prima di M, maka I_X merupakan ideal prima di S.
b) Jika M merupakan modul *self-generator* dan I_X merupakan ideal prima di S, maka X merupakan submodul prima di M.

Dapat ditunjukkan bahwa irisan dari submodul-submodul prima di M R-modul tidak membentuk submodul prima. Hal inilah yang melatarbelakangi pendefinisian submodul semiprima. Berikut diberikan definisi dari submodul semiprima di M R-modul.

Definisi 2.8. [2] Diberikan M R-modul dan submodul sejati yang invarian penuh X di M. Submodul X disebut submodul semiprima di M apabila X merupakan irisan dari submodul-submodul prima di M.

Seperti halnya pendefinisian modul prima, M R-modul disebut modul semiprima apabila 0 merupakan submodul semiprima di M. Selanjutnya, berikut diberikan beberapa contoh dari submodul semiprima.

Contoh 2.9. Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}-$modul. Diketahui bahwa $p_1\mathbb{Z}, p_2\mathbb{Z}, ..., p_k\mathbb{Z}$ dengan $p_1, p_2, ..., p_k$ merupakan bilangan-bilangan prima di $\mathbb{Z}$. Dapat ditunjukan bahwa $p_1\mathbb{Z}, p_2\mathbb{Z}, ..., p_k\mathbb{Z}$ masing-masing merupakan submodul prima di $\mathbb{Z}$. Submodul $\left(p_1 p_2 ... p_k\right)\mathbb{Z}$ merupakan submodul semiprima di M karena $\left(p_1 p_2 ... p_k\right)\mathbb{Z}$ merupakan irisan dari submodul-submodul prima $p_1\mathbb{Z}, p_2\mathbb{Z}, ..., p_k\mathbb{Z}$.

BEBERAPA SIFAT SUBMODUL SEMIPRIMA

Pada bagian ini akan dibahas mengenai beberapa sifat terkait submodul semiprima. Telah diketahui dari bagian sebelumnya bahwa submodul sejati yang invarian penuh X di M disebut submodul semiprima apabila X merupakan irisan dari submodul-submodul prima di M. Lebih lanjut, modul M merupakan modul semiprima apabila submodul 0

 ISBN : 978-979-16353-8-7

merupakan submodul semiprima di *M*. Dapat dibuktikan bahwa jika ring *R* dipandang sebagai *R*-modul maka berlaku sifat *R* merupakan ring semiprima jika dan hanya jika *R* *R*-modul merupakan modul semiprima.

Sebelum masuk ke pembahasan selanjutnya, diberikan suatu sifat yang nantinya digunakan dalam pembuktian beberapa sifat submodul semiprima.

Sifat 3.1. Diberikan modul *self-generator M*. Jika *P* merupakan ideal di *S* maka berlaku $I_{P(M)} = P$ dengan $I_{P(M)} = \{ f \in S \mid f(M) \subseteq P(M) \}$.

Bukti. Karena *M* merupakan modul *self-generator* maka berdasarkan Proposisi 2.4 diperoleh $P(M) = Hom(M, P(M))M$, sehingga diperoleh $P = Hom(M, P(M))$. Diambil sebarang $f \in P$. Karena $P = Hom(M, P(M))$ maka $f(M) \subseteq P(M)$, sehingga diperoleh $f \in I_{P(M)}$. Selanjutnya, diambil sebarang $g \in I_{P(M)}$ maka diperoleh $g(M) \subseteq P(M)$. Dengan demikian, diperoleh $g \in Hom(M, P(M)) = P$. Jadi terbukti bahwa $I_{P(M)} = P$. ∎

Selanjutnya, akan diberikan suatu teorema yang menjelaskan hubungan antara modul semiprima dengan ring endomorfisma *S*. Namun, sebelumnya berikut diberikan terlebih dahulu suatu lemma yang akan digunakan dalam pembuktian teorema tersebut.

Lemma 3.2. [2] Diberikan *M R*-modul, $\{P_i \mid i \in I\}$ yaitu himpunan submodul-submodul invarian penuh di *M*, dan $P_0 = \bigcap_{i \in I} P_i$. Jika $I_i = \{ f \in S \mid f(M) \subseteq P_i \}$ untuk $i = 0$ atau $i \in I$, maka diperoleh $\bigcap_{i \in I} I_i = I_0$.

Teorema 3.3. [2] Jika *M* merupakan modul semiprima maka ring *S* merupakan ring semiprima.

Bukti. Misalkan $J = \{P_i \mid i \in I\}$ yaitu himpunan submodul-submodul prima di M. Karena M merupakan modul semiprima maka diperoleh $0 = \bigcap_{i \in I} P_i$. Karena untuk setiap $i \in I$ diketahui bahwa P_i merupakan submodul prima, maka berdasarkan Teorema 2.7 diperoleh I_i merupakan ideal prima di *S* untuk setiap $i \in I$. Dengan mengambil $P_0 = 0$ maka berdasarkan Lemma 3.2 diperoleh $\bigcap_{i \in I} I_i = I_0 = 0$. Dengan demikian, terbukti bahwa S merupakan ring semiprima. ∎

Diperhatikan bahwa konvers dari Teorema 3.3 belum tentu berlaku. Apabila diketahui *S* merupakan ring semiprima, maka diperlukan suatu syarat tambahan agar modul *M* membentuk modul semiprima. Hal ini dijelaskan dalam proposisi berikut ini.

Proposisi 3.4. [3] Diberikan *M R*-modul merupakan modul *quasi-projective* yang dibangun secara hingga dan merupakan modul *self-generator*. Jika *S* merupakan ring semiprima maka *M* merupakan modul semiprima.

Bukti. Diambil sebarang ideal *I* di *S* dan dibentuk $X = I(M)$. Karena *M* merupakan modul *self-generator* maka diperoleh $I = I_X$. Karena *M* merupakan modul *quasi-projective* dan dibangun secara hingga maka berdasarkan Proposisi 2.5 diperoleh $I = Hom_R(M, I(M))$. Pertama ditunjukkan bahwa *X* merupakan submodul prima di *M*. Diambil sebarang $\varphi \in S$ dan submodul invarian penuh *U* di *M* dengan $\varphi(U) \subseteq X$ tetapi

$\varphi(M)\not\subset X$. Karena M modul *self-generator* maka $U=\sum_{f\in\Omega} f(M)$ untuk suatu $\Omega\subseteq S$. Karena U submodul invarian penuh di M maka diperoleh $U=S(U)=\sum_{f\in\Omega} Sf(M)$, sehingga diperoleh $\varphi(U)=\sum_{f\in\Omega}\varphi Sf(M)$. Karena $\varphi(U)\subseteq X$ maka $\varphi Sf(M)\subseteq X$ untuk setiap $f\in\Omega$. Andaikan terdapat $f\in\Omega$ sehingga $f(M)\not\subset X$, berarti $f\notin I$ dan $\varphi\notin I$. Karena I merupakan ideal prima di S maka berakibat $\varphi Sf\not\subset I$ sehingga diperoleh $\varphi Sf(M)\not\subset X$. Terjadi kontradiksi, sehingga diperoleh $f(M)\subseteq X$ untuk setiap $f\in\Omega$ sehingga terbukti bahwa $U\subseteq X$. Dengan demikian, terbukti bahwa X merupakan submodul prima di M. Selanjutnya, karena X merupakan submodul prima maka berdasarkan Teorema 2.7 diperoleh I_X merupakan ideal prima di S. Misalkan dibentuk himpunan $\Im=\{X_i \mid X_i \text{ submodul prima di } M,\forall i\in\lambda\}$, maka diperoleh $I_{\bigcap_{X_i\in\Im} X_i}=\bigcap_{X_i\in\Im} I_{X_i}$ dan jelas bahwa $I_0=0$. Diketahui S merupakan ring semiprima, berarti $0\subseteq S$ merupakan irisan dari semua ideal prima I di S. Untuk setiap I, dibentuk $X=I(M)$. Karena $I=I_X$ maka diperoleh $0=\bigcap_{X\in\Im} I_X$ sehingga diperoleh $I_{\bigcap_{X_i\in\Im} X_i}=0$. Karena M merupakan modul *self-generator* maka diperoleh $\bigcap_{X_i\in\Im} X_i=0$. Dengan demikian, terbukti bahwa M merupakan modul semiprima. □

Berikut diberikan suatu proposisi yang merupakan syarat cukup agar himpunan I_X merupakan ideal semiprima di S.

Proposisi 3.5. [4] Diberikan M R-modul. Jika X merupakan submodul semiprima di M, maka I_X merupakan ideal semiprima di S.

Selanjutnya, berikut diberikan suatu proposisi yang merupakan syarat cukup suatu submodul di M merupakan submodul semiprima.

Proposisi 3.6. [4] Diberikan M R-modul. Jika M merupakan modul *self-generator* dan P merupakan ideal semiprima di S, maka $X:=P(M)$ merupakan submodul semiprima di M dan $I_X=P$.

Bukti. Misalkan $X=P(M)$. Karena M merupakan modul *self-generator* maka $P=I_{P(M)}=I_X$. Karena P merupakan ideal semiprima di S maka diperoleh $P=\bigcap_{i\in\lambda} K_i$ dengan K_i merupakan ideal prima di S untuk setiap $i\in\lambda$. Karena M merupakan modul *self-generator* maka diperoleh $I_X=Hom_R(M,I_X(M))=Hom_R\left(M,\left(\bigcap_{i\in\lambda}K_i\right)(M)\right)$. Di sisi lain diperoleh $\bigcap_{i\in\lambda}K_i=\bigcap_{i\in\lambda}Hom_R(M,K_i(M))=Hom_R\left(M,\bigcap_{i\in\lambda}K_i(M)\right)$. Jadi diperoleh $\left(\bigcap_{i\in\lambda}K_i\right)(M)=\bigcap_{i\in\lambda}K_i(M)$ sehingga $X=\bigcap_{i\in\lambda}K_i(M)$. Karena K merupakan ideal prima di

 ISBN : 978-979-16353-8-7

S dan M merupakan modul *self-generator* maka jelas bahwa $K_i(M)$ merupakan submodul prima di M untuk setiap $i \in \lambda$. Dengan demikian, terbukti bahwa X merupakan submodul semiprima di M. □

Apabila modul M merupakan modul *self-generator*, ternyata pendefinisian submodul semiprima dapat dilakukan dengan cara lain. Hal ini diberikan dalam proposisi berikut ini.

Proposisi 3.7. [4] Diberikan M R-modul *self-generator* dan submodul invarian penuh X di M. Submodul X merupakan submodul semiprima jika dan hanya jika untuk setiap $f \in S$ dengan $fSf(M) \subseteq X$ maka berakibat $f(M) \subseteq X$.

Bukti. $(\Rightarrow)$. Diketahui X merupakan submodul semiprima, maka $X = \bigcap_{P \in \Im} P$ untuk suatu keluarga himpunan $\Im$ dari submodul-submodul prima di M. Diambil sebarang $f \in S$ dengan $fSf(M) \subseteq X$, maka berakibat $fSf(M) \subseteq P$ untuk setiap $P \in \Im$. Karena fS merupakan ideal kanan di S dan P merupakan submodul prima maka berakibat $f(M) \subseteq P$ untuk setiap $P \in \Im$. Dengan demikian, terbukti bahwa $f(M) \subseteq X$.

$(\Leftarrow)$. Akan ditunjukkan bahwa X merupakan submodul semiprima. Berdasarkan Proposisi 3.6 berarti cukup ditunjukkan bahwa I_X merupakan ideal semiprima di S. Diambil sebarang $f \in S$ dengan $fSf \subseteq I_X$. Dri definisi I_X, maka diperoleh $fSf(M) \subseteq X$. Berdasarkan yang diketahui, maka diperoleh $f(M) \subseteq X$. Jadi diperoleh $f \in I_X$, sehingga terbukti bahwa I_X merupakan ideal semiprima di S. Dengan demikian, terbukti bahwa X merupakan submodul semiprima di M. □

Seperti halnya dalam pendefinisian submodul prima, dalam pendefinisian submodul semiprima juga terdapat suatu teorema ekuivalensi.

Teorema 3.8. [4] Diberikan M R-modul *self-generator* dan submodul invarian penuh X di M. Pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen:

1. X merupakan submodul semiprima di M.
2. Jika J merupakan ideal di S dengan $J^2(M) \subseteq X$ maka berakibat $J(M) \subseteq X$.
3. Jika J merupakan ideal di S dengan $J(M) \supsetneq X$ maka berakibat $J^2(M) \not\subset X$.
4. Jika J merupakan ideal kanan di S dengan $J^2(M) \subseteq X$ maka berakibat $J(M) \subseteq X$.
5. Jika J merupakan ideal kiri di S dengan $J^2(M) \subseteq X$ maka berakibat $J(M) \subseteq X$.

Bukti. $(1) \Rightarrow (4)$. Diketahui X merupakan submodul semiprima di M, maka $X = \bigcap_{P \in \Im} P$ untuk suatu keluarga himpunan $\Im$ dari submodul-submodul prima di M. Karena diketahui J merupakan ideal kanan di S dengan $J^2(M) \subseteq X$, maka diperoleh $J^2(M) \subseteq P$ untuk setiap $P \in \Im$. Karena P merupakan submodul prima di M maka berakibat $J(M) \subseteq P$ untuk setiap $P \in \Im$. Akibatnya, terbukti bahwa $J(M) \subseteq X$.

$(4) \Rightarrow (3)$. Jelas.

$(3)\Rightarrow(2)$. Diambil sebarang ideal *J* di *S* dengan $J^2(M)\subseteq X$. Andaikan $J(M)\not\subset X$ maka $J(M)+X\supsetneq X$. Diperhatikan bahwa:

$$(J+I_X)^2(M)=(J^2+JI_X+I_XJ+I_X^2)(M)=J^2(M)+JI_X(M)+I_XJ(M)+I_X^2(M).$$

Karena $JI_X(M)\subseteq JX\subseteq X$, $I_XJ(M)\subseteq I_X(M)\subseteq X$, dan $I_X^2(M)\subseteq I_X(M)\subseteq X$, maka diperoleh $(J+I_X)^2(M)\subseteq X$. Kontradiksi dengan (3). Dengan demikian, terbukti bahwa $J(M)\subseteq X$.

$(2)\Rightarrow(1)$. Diambil sebarang $f\in S$ dengan $fSf(M)\subseteq X$. Karena *X* submodul invarian penuh maka diperoleh $SfSf(M)\subseteq X$. Diperhatikan bahwa:

$$(SfS)^2(M)=(SfSfS)(M)\subseteq(SfSf)(M)\subseteq X.$$

Berdasarkan yang diketahui, maka diperoleh $(SfS)(M)\subseteq X$. Akibatnya, diperoleh $f(M)\subseteq X$. Terbukti bahwa *X* merupakan submodul semiprima di *M*.

$(1)\Rightarrow(5)$. Diketahui *X* merupakan submodul semiprima di *M*, berarti $X=\bigcap_{i\in\lambda}P_i$ dengan P_i submodul prima di *M* untuk setiap $i\in\lambda$. Misalkan *J* merupakan ideal kiri di *S* dengan $J^2(M)\subseteq X$, maka diperoleh $J^2(M)\subseteq P_i$ untuk setiap $i\in\lambda$. Akibatnya, diperoleh $J^2(M)=J(J(M))=JS(J(M))\subseteq P_i$ untuk setiap $i\in\lambda$. Karena P_i merupakan submodul prima di *M* maka diperoleh $J(M)\subseteq P_i$ untuk setiap $i\in\lambda$. Dengan demikian, terbukti bahwa $J(M)\subseteq X$.

$(5)\Rightarrow(3)$. Jelas. □

Akibat 3.9. [4] Diberikan *M R*-modul *self-generator* dan submodul semiprima *X* di *M*. Jika *J* merupakan ideal kanan (kiri) di *S* sedemikian hingga memenuhi $J^n(M)\subseteq X$ untuk suatu bilangan bulat posistif *n*, maka berakibat $J(M)\subseteq X$.

Bukti. Pembuktian dilakukan dengan menggunakan induksi matematika pada *n*. Untuk kasus *n*=1, jelas bahwa pernyataan benar. Selanjutnya, diasumsikan bahwa pernyataan benar untuk *n-1*, yaitu jika $J^{n-1}(M)\subseteq X$ maka berakibat $J(M)\subseteq X$. Akan ditunjukkan bahwa pernyataan benar untuk *n*. Diketahui bahwa $J^n(M)\subseteq X$, akan ditunjukkan bahwa $J(M)\subseteq X$. Karena $n\geq 2$ maka $2n-2\geq n$, sehingga diperoleh $(J^{n-1})^2(M)=(J^{2n-2})(M)\subseteq J^n(M)\subseteq X$. Dengan demikian, diperoleh $J^{n-1}(M)\subseteq X$. Berdasarkan asumsi, maka terbukti bahwa $J(M)\subseteq X$. □

Selanjutnya, karena setiap submodul prima di *M* memuat submodul prima minimal maka berikut diberikan suatu sifat yang menyatakan bahwa submodul semiprima merupakan irisan dari submodul-submodul prima minimal.

Proposisi 4.10. Diberikan *M R*-modul dan submodul semiprima *P* di *M*. Submodul semiprima *P* merupakan irisan dari submodul-submodul prima minimal di *M*.

Bukti. Misalkan dibentuk himpunan $\Re = \{P_i \mid P_i \text{ submodul prima di } M\}$ dan himpunan $\Im = \{K_i \mid K_i \text{ submodul prima minimal di } M \text{ dengan } K_i \subseteq P_i, \forall P_i \in \Re\}$. Diketahui bahwa P merupakan submodul semiprima berarti $P = \bigcap_{P_i \in \Re} P_i$. Karena setiap submodul prima di M memuat submodul prima minimal maka jelas bahwa $\bigcap_{K_i \in \Im} K_i \subseteq \bigcap_{P_i \in \Re} P_i = P$. Selanjutnya, diambil sebarang $a \notin \bigcap_{K_i \in \Im} K_i$ maka terdapat $K_j \in \Im$ sehingga $a \notin K_j$. Berarti terdapat $P_j \in \Re$ sehingga $a \notin P_j$. Akibatnya, diperoleh $a \notin \bigcap_{P_i \in \Re} P_i$ sehingga terbukti bahwa $P = \bigcap_{P_i \in \Re} P_i \subseteq \bigcap_{K_i \in \Im} K_i$. Dengan demikian terbukti bahwa $P = \bigcap_{K_i \in \Im} K_i$. □

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil di atas diketahui bahwa suatu submodul sejati invarian penuh X di M R-modul merupakan submodul prima di M apabila untuk setiap ideal I di S dan submodul invarian penuh U di M dengan $I(U) \subseteq X$ maka berakibat $I(M) \subseteq X$ atau $U \subseteq X$. Submodul semiprima merupakan irisan dari submodul-submodul prima di M. Dengan mengacu pada definisi submodul prima di atas dapat disimpulkan bahwa konsep dan sifat-sifat ideal semiprima pada suatu ring dapat digeneralisasi menjadi konsep terkait submodul semiprima beserta dengan sifat-sifatnya.

DAFTAR PUSTAKA

Dauns, J., Prime Modules, Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 298 (1978) 156-181.

Sanh, N.V., Vu, N.A., Asawasamrit, S., Ahmed, K.F.U., dan Thao, L.P., Primeness in Module Category, Asian-European Journal of Mathematics, 3(1) (2010) 145-154.

Sanh., N.V., dan Asawasamrit, S., S., Ahmed, K.F.U., dan Thao, L.P., On Prime and Semiprime Goldie Modules, Asian-European Journal of Mathematics, 4(2) (2011) 321-334.

Sanh, N.V., Ahmed, K.F.U., dan Thao, L.P., On Semiprime Modules with Chain Conditions, Asian-European Journal of Mathematics.

Wisbauer, R., 1991, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Tokyo.

Wisbauer, R., 1996, *Modules and Algebras: Bimodule Structure and Group Actions on Lagebras*, Addison Wesley Longman, United States of America.