**T – 23**

# *Center Manifold* Dari Sistem Persamaan Diferensial Biasa Nonlinear Yang Titik Ekuilibriumnya Mengalami Bifurkasi *Contoh Kasus Untuk Bifurkasi Hopf*

Rubono Setiawan
Prodi Pendidikan Matematika, F.KIP
Universitas Sebelas Maret ( UNS ), Surakarta
Jalan Ir. Sutami 36 A Kentingan Surakarta.
Email : rubono_4869@yahoo.co.id

**Abstrak**

Dalam menentukan kestabilan titik ekuilibrium sistem dinamik kontinu yang berbentuk sistem persamaan diferensial biasa, sering menjadi permasalahan apabila memunculkan nilai eigen non-hiperbolik atau nilai eigen dengan bagian real nol ( kasus titik ekuilibrium nonhiperbolik ) selain itu juga apabila memunculkan solusi periodik. Kriteria kestabilan dengan menggunakan nilai eigen tidak dapat digunakan dalam kasus – kasus tersebut, sehingga diperlukan metode lain untuk menentukan kestabilan dari titik ekuilibrium hiperbolik yaitu metode analisis *center manifold*. Dalam paper ini akan dijelaskan pengertian dari *center manifold* dari sistem persamaan diferensial biasa dan prosedur penentuannya. Kasus titik ekuilibrium hiperbolik sangat erat kaitannya dengan bifurkasi Pada banyak kasus model matematika berbentuk sistem persamaan diferensial berparamater sering memunculkan titik ekuilibrium nonhiperbolik yang mengalami bifurkasi pada nilai parameter tertentu. Dalam hal ini konsep *center manifold* juga digunakan untuk menganalisa bifurkasi dari titik ekuilibrium nonhiperbolik maupun solusi periodik.

***Kata Kunci*** *: Center Manifold*, Bifurkasi, Nonhiperbolik, Deret Taylor.

## 1. Pendahuluan

Dalam analisis kestabilan lokal titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial (berparameter), umumnya digunakan analisis nilai eigen yang didapat dari matriks *jacobian* hasil linearisasi yang dievaluasi di titik ekuilibriumnya. Metode tersebut hanya bisa dilakukan ketika nilai eigen yang didapat mempunyai bagian real yang tidak nol, sehingga titik ekuilibrium yang bersesuaian sering disebut titik ekuilibrium hiperbolik. Lebih lanjut lagi telah diketahui bahwa kriteria kestabilan lokal titik ekuilibrium tidak dapat disimpulkan apabila dari proses linearisasi tersebut didapat nilai eigen dengan bagian real yang nol dan dalam hal ini titik ekuilibrium yang bersesuaian disebut titik ekuilibrium nonhiperbolik. Dalam model matematika, banyak dijumpai kasus yang memunculkan nilai eigen dengan bagian real yang nol, tidak hanya itu, sering juga dijumpai solusi periodik, sehingga untuk menganalisa kestabilannya perlu digunakan metode dan kriteria yang lain. Dalam paper ini akan dijelaskan metode analisa kestabilan untuk titik ekuilibrium nonhiperbolik dengan menggunakan *center manifold*. Metode

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

*center manifold* termasuk kelompok metode untuk menyederhanakan sistem dinamik selain metode bentuk normal ( *normal form*). Dalam prakteknya kasus titik ekuilirbium nonhiperbolik dari sistem persamaan diferensial berparameter dengan kondisi – kondisi tertentu akan menyebabkan bifurkasi, dalam hal ini center manifold juga digunakan sebagai alat untuk mempelajari bifurkasi dari titik ekuilibrium dan juga solusi periodik.

## 2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penulisan paper ini adalah studi pustaka dan literatur yang terkait dengan sistem persamaan diferensial ( dinamik kontinu), teori kestabilan, teori – teori bifurkasi dan *center manifold*.

## 3. Pembahasan

### 3.1. Notasi dan Konsep – konsep Terkait

Berikut diberikan beberapa notasi dan konsep – konsep dasar yang terkait :

#### 3.1.1. Sistem Dinamik dan Titik Ekuilibrium

Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial ( sistem dinamik kontinu ) autonomos berikut :

$$\dot{x} = f(x)\,, \qquad x \in E \subset \mathbb{R}^n, \qquad (3.1.1)$$

dengan $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $f: E \to \mathbb{R}^n, E \subset \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$. Titik ekuilibrium dari Sistem ( 3.1.1) adalah suatu solusi $x = x_0$ yang memenuhi $f(x_0) = 0$. Proses linearisasi dengan menggunakan deret Taylor di sekitar titik ekuilirbium akan didapat sistem linear $\dot{x} = Ax$, dengan $A$ matriks $n \times n$. Dalam hal ini apabila semua nilai eigen dari A mempunyai bagian real yang tidak nol, maka titik ekuilibrium $x_0$ disebut titik ekuilibrium hiperbolik, sedangkan apabila terdapat nilai eigen dengan bagian real yang nol maka titik ekuilibrium $x_0$ disebut titik ekuilibrium hiperbolik. Dalam analisis kestabilan titik ekuilibrium dengan menggunakan nilai eigen dari matriks A, mensyaratkan bahwa $x_0$ haruslah titik ekuilibrium hiperbolik.

#### 3.1.2. Bifurkasi Hopf

Teori bifurkasi membicarakan tentang perubahan struktur orbit dari sistem dinamik seiring dengan perubahan nilai parameter. Diberikan sistem persamaan diferensial biasa dengan satu parameter berikut :

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$\dot{x} = f(x, \mu)\,, x \in \mathbb{R}^n\,, \mu \in \mathbb{R}, \qquad (3.1.2)$$

dengan $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ adalah fungsi *smooth* dan misalkan $x = x_0$ adalah titik ekuilibrium Sistem (3.1.2) untuk $\mu = \mu_0$. Verhulst (1990) memberikan definisi tentang nilai bifurkasi sebagai berikut :

**Definisi 3.1.2.1 ( Verhulst, 1990)** *Nilai parameter* $\mu = \mu_0$ *disebut nilai bifurkasi jika terdapat solusi non trivial pada Sistem* (3.1.2) *yang terdefinisi di dalam persekitaran* $(\boldsymbol{x_0}, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Terdapat banyak jenis bifurkasi, di dalam paper ini jenis bifurkasi yang digunakan adalah bifurkasi Hopf . Dalam aplikasinya bifurkasi Hopf lebih sering ditemukan dalam analisis kestabilan titik ekuilibrium nonhiperbolik dari suatu model matematika berbentuk persamaan diferensial. Berikut definisi dari bifurkasi Hopf :

**Definisi 3.1.2.2 (Kuznetsov, 1998)** *Bifurkasi yang terjadi berkaitan dengan adanya nilai eigen* $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, *disebut bifurkasi Hopf ( Andronov – Hopf ).*

Berikut diberikan contoh sistem dinamik autonomous yang titik ekuilibriumnya mengalami bifurkasi Hopf.

**Contoh 3.1.2.3**

Diberikan sistem autonomous berikut :

$$\begin{matrix} \dot{x} = y - x^4 - \mu x \\ \dot{y} = -x \end{matrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (3.1.3)$$

satu-satunya titik ekuilibrium dari Sistem (3.1.3) adalah (0,0), yang untuk $\mu = 0$ mempunyai nilai eigen $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Jika $\mu < 0$ maka (0,0) tidak stabil, sebaliknya jika $\mu > 0$ maka (0,0) stabil, sehingga (0,0) mengalami bifurkasi Hopf untuk $\mu = 0$. dan nilai bifurkasi $\mu = \mu_0 = 0$.

### 3.2. *Center Manifold* dari Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Dalam matematika terapan, sistem persamaan diferensial disebut juga sebagai sistem dinamik kontinu. *Center manifold* yang dibahas di dalam subbab ini adalah *center* *manifold* untuk sistem persamaan diferensial ( sistem dinamik kontinu ). Sebelum membahas lebih lanjut tentang *center manifold*, akan diberikan terlebih dahulu asumsi penting bahwa nilai parameter dari sistem dinamik kontinu yang dibahas dianggap bernilai tetap pada nilai bifurkasinya, dimana untuk nilai paramater tersebut terdapat titik ekuilibrium yang *nonhiperbolik*.

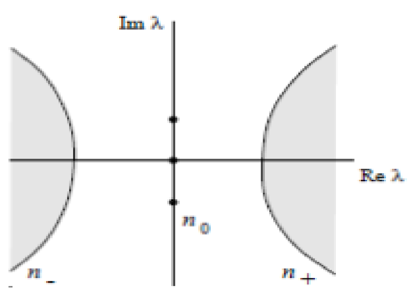
Misal diberikan sistem dinamik kontinu yang berbentuk sistem persamaan diferensial berikut :

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n \tag{3.2.1}$$

dengan *f* adalah fungsi yang cukup ( berhingga ) *smooth* ( $f \in C^k$ dengan $k \geq 2$, $k \leq n$, dalam hal ini $C^k$ adalah keluarga fungsi terdeferensiabel sampai *k* kali ) dan memenuhi $f(0) = 0$. Misalkan dengan proses linearisasi didapat nilai eigen dari matriks *jacobian* A yang dievaluasi di titik ekuilibrium $x_0 = 0$ adalah $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Kemudian Sistem (3.2.1) dapat ditulis sebagai :

$$\dot{x} = Ax + g(x), \tag{3.2.2}$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$ dan $A$ adalah matriks konstant berukuran $n \times n$ dan $g$ bernilai vektor anggota $C^k$ dan berlaku $g(x) = 0$. Diasumsikan bahwa $x_0 = 0$ adalah titik ekuilibrium nonhiperbolik dari Sistem (3.2.1) yang artinya bahwa terdapat nilai eigen dengan bagian real nol. Kemudian diasumsikan terdapat sejumlah $n_+$ nilai eigen dengan $R_e > 0$, sejumlah $n_0$ nilai eigen dengan $R_e = 0$ dan sejumlah $n_-$ nilai eigen dengan $R_e < 0$. Ketiga jenis nilai eigen tersebut dapat digambarkan sebagai berikut :




Gambar 3.1. (Kuznetsov, 1998) Kemungkinan Posisi Nilai Eigen

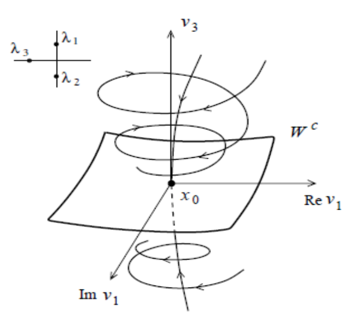
Misalkan $E^c$ adalah ruang eigen linear yang diperumum ( *Generalized Linear Eigen Space*) dari matriks *jacaobian* A dari Sistem (3.2.1) yang berhubungan dengan gabungan semua $n_0$ nilai eigen yang berada di sumbu imaginer. Kemudian misalkan juga

$\varphi^t$ adalah *flow* yang berhubungan dengan Sistem (3.2.1) maka didapat definisi dan teorema berikut :

**Definisi 3.2.1** *Diketahui Sistem ( 3.2.1) dengan titik ekuilibrium* $x = 0$. *Manifold invarian dari Sistem (3.2.1) yang berdimensi* $n_0$ *dan merupakan anggota* $C^k$ *yang terdefinisi secara lokal serta tangent terhadap* $E^c$ *di* $x = 0$ *disebut Center Manifold.*

**Teorema 3.2.1 (Kuznetsov, 1998)** *Terdapat manifold invarian* $W^c_{loc}(0)$ *berdimensi* $n_0$ *dari Sistem (3.2.1) yang terdefinisi secara lokal yang tangent terhadap* $E^c$ *di* $x = 0$. *Lebih lanjut terdapat persekitaran U dari* $x = 0$ *sedemikian sehingga jika* $\varphi^t x \in U$ *untuk semua* $t \geq 0$ *(* $t \leq 0$) *maka* $\varphi^t x \to W^c_{loc}(0)$ *untuk* $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$.

Menurut Kuznetsov, 1998 simbol ‘’ loc ‘’ untuk merepresentasikan sifat lokal dari center manifold sendiri. Sebagai contoh dalam kasus sistem persamaan diferensial yang mempunyai titik ekuilibrium nonhiperbolik yang mengalami bifurkasi Hopf, misalkan jika didapat 3 nilai eigen dengan $n_0 = 2, n_- = 1$, maka *center manifold* $W^c$ tangent terhadap bidang bidang yang dibangun oleh bagian real dan imaginer dari vektor eigen kompleks yang berhubungan dengan $\lambda_1 = i\omega_0, \omega_0 > 0$. Berikut diberikan ilustrasi dari kasus tersebut :




sov, 1998)

pada Bifurkasi Hopf

Dalam prakteknya, *center manifold* $W^c$ dalam suatu sistem dinamik tidak harus tunggal dengan kata lain bisa lebih dari 1. Menurut Teorema 3.2.1, *center manifold* $W^c_{loc}(0)$ dikatakan memiliki sifat penarik ( *attracting* ) jika semua orbit yang dimulai dalam region *U* dan akan tetap berada dalam region *U* untuk $t \to +\infty$ akan menuju

$W^c(0)$, sebaliknya untuk $t \to -\infty$, *Center Manifold* $W_{loc}^c(0)$ dikatakan memiliki sifat penolak ( *repelling* ). *Center manifold* $W^c$ mempunyai kelicinan berhingga ( *finite smoothness* ) yang sama dengan *f*, dengan kata lain jika $f \in C^k$ maka $W^c$ juga $C^k - manifold$ dalam suatu persekitaran *U* dari titik ekuilibrium $x_0$ .

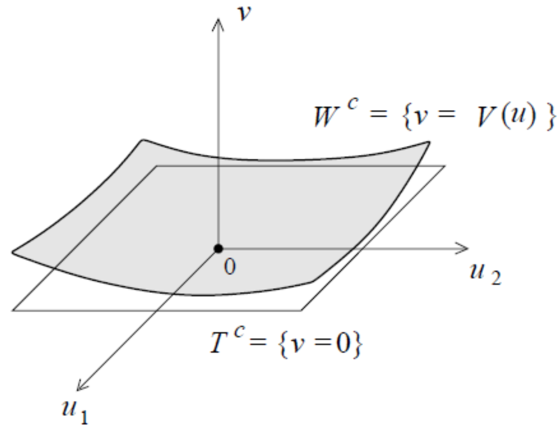
Dalam salah satu metode untuk menentukan *center manifold*, suatu sistem dinamik harus diubah kedalam bentuk *eigenbasis*. Sistem (3.2.1) apabila diubah kedalam bentuk *eigenbasis*nya akan didapat bentuk :

$$\dot{u} = Bu + g(u, v), \qquad (3.2.4)$$
$$\dot{v} = Cu + h(u, v)$$

dengan $u \in \mathbb{R}^{n_0}, v \in \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$, kemudian *B* adalah matriks berukuran $(n_0 \times n_0)$ dari semua $n_0$ nilai eigen yang berada pada sumbu imaginer, sedangkan *C* adalah matriks berukuran $(n_+ + n_-) \times (n_+ + n_-)$ dari semua nilai eigen selain nilai eigen yang berada pada sumbu imaginer. Fungsi *g* dan *h* mempunyai deret Taylor yang dimulai paling tidak dari suku kuadrat. *Center manifold* $W^c$ dari Sistem (3.2.4) secara lokal dapat digambarkan sebagai *graph* dari fungsi smooth :

$$W^c = \{(u, v): v = V(u)\}$$

Dalam hal ini $V: \mathbb{R}^{n_0} \to \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$ adalah suatu polinomial dalam *u,* dan karena sifat *tangent* dari $W^c$ maka $V(u) = O(\|u\|^2)$.




Gambar 3.3. ( Kuznetsov, 1998)

*Center Manifold* $W^c$ sebagai graph dari fungsi *u = V(u)*

Langkah awal untuk mencari *center manifold* adalah dengan mengubah Sistem (3.2.1) dalam bentuk *eigenbasis* (3.2.4) menggunakan proses reduksi dengan menggunakan ekspansi Taylor. Berikut akan diberikan teorema yang menjamin bahwa bentuk yang didapat dari proses reduksi tersebut mempunyai ekuivalensi secara topologis disekitar titik ekuilibrium ( dalam paper ini diasumsikan titik 0 ).

**Teorema 3.2.2 (Kusnetsov, 1998)** *Sistem (3.2.4) ekuivalen secara topologis lokal disekitar titik ekuilibrium terhadap sistem*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Bu + g(u, V(u)) \\ \dot{v} &= Cv \end{aligned} \qquad (3.2.5)$$

Menurut Kuznetsov, 1998, persamaan pertama dari Sistem (3.2.5) adalah restriksi ( *restriction* ) dari Sistem (3.2.4) ke *center manifold* – nya. Dinamika ketakstabil secara struktur dari Sistem (3.2.4) sangat ditentukan oleh restriksi ini, karena persamaan kedua dari Sistem ( 3.2.5) berbentuk linear yang mempunyai solusi yang turun / naik secara ekponensial. Dinamika *center manifold* tidak hanya ditentukan oleh suku linear, tetapi juga dari suku nonlinear dari Sistem (3.2.4). Jika terdapat lebih dari satu *center manifold* maka gabungan dari semua Sistem (3.2.5) dengan $V$ yang berbeda juga ekuivalen secara topologis lokal. Kemudian persamaan kedua dari Sistem (3.2.5) dapat diganti dengan sistem persamaan yang disebut dengan sistem *standard saddle*

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -v \\ \dot{w} &= w \end{aligned}$$

dengan$(v, w) \in \mathbb{R}^{n_-} \times \mathbb{R}^{n_+}$. Jadi dalam proses reduksi didapat suatu hasil yang penting yaitu Sistem (3.2.1) yang telah ditransformasi menjadi bentuk *eigenbasis* (3.2.4) akan ekuivalen secara topologis lokal di sekitar titik ekuilibriumnya terhadap suspensi dari restriksi (*restriction*) Sistem (3.2.4) ke *center manifold* - nya dengan menggunakan sistem *standard saddle*.

### 3.4. Penentuan dan Perhitungan dari *Center Manifold*

Dalam menentukan *center manifold* terdapat dua metode yang dapat digunakan yaitu metode pendekatan kuadratik dan metode proyeksi ( nilai eigen ). Dalam paper ini hanya akan dibahas tentang metode pendekatan kuadratik. Sebagai dasar dari penjelasan berikut adalah penjelasan yang ada dalam buku yang ditulis oleh Kuznetsov (1998).

**Metode Pendekatan Kuadratik ( Reduksi )**

Dalam metode ini diasumsikan bahwa bentuk Sistem (3.2.1) dapat dibawa kedalam bentuk *eigenbasis* ( 3.2.4 ). Seperti yang telah ketahui bahwa dalam kasus bifurkasi Hopf memunculkan nilai eigen kompleks murni ( bagian real nol yaitu $\lambda_{1,2} = \pm iw$). Kemudian dengan tanpa mengurangi keumuman analisa berikut untuk $n_0 = 2$, Sistem (3.2.1) dapat ditulis dalam bentuk *eigenbasis*-nya yaitu :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1(u_1,u_2,v) \\ G_2(u_1,u_2,v) \end{pmatrix},$$

(3.4.1)

$$\dot{v} = Cv + H_1(u_1,u_2,v)$$

dengan $u = (u_1,u_2)^T \in \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}^{n-2}$. Kemudian bila Sistem (3.4.1) ditulis dalam bentuk kompleks dengan menggunakan $z = u_1 + iu_2$ maka didapat sistem sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\omega_0 z + G(z,\bar{z},v) \\ \dot{v} &= Cv + H(z,\bar{z},v) \end{aligned} \qquad (3.2.5)$$

G dan H adalah fungsi bernilai real yang smooth dari z dan $\bar{z}$, sehingga $G, H \in \mathbb{C}^1$ dan $V \in \mathbb{R}^{n-2}$. Dalam hal ini dapat dipandang bahwa z merupakan koordinat baru dalam ruang eigen kritis $T^c = \{v = 0\}$ dari Sistem (3.4.1). Center Manifold $W^c$ mempunyai representasi :

$$v = V(z,\bar{z}) = \tfrac{1}{2} w_{20} z^2 + w_{11} z\bar{z} + \tfrac{1}{2} w_{02} \bar{z}^2 + O(|z|^3),$$

(3.2.6)

Dengan suku – suku yang tidak diketahui $w_{ij} \in \mathbb{C}^{n-2}$. Karena V haruslah bernilai real , $w_{11}$ is real dan nilai $w_{20} = \overline{w}_{20}$. Kemudian Sistem (3.2.5) apabila ditulis lebih detail menggunakan deret Taylor, maka didapat :

$$\begin{cases} \dot{z} = i\omega_0 z + \dfrac{1}{2} G_{20} z^2 + G_{11} z\bar{z} + \dfrac{1}{2} G_{02} \bar{z}^2 + \dfrac{1}{2} G_{21} z^2 \bar{z} + \langle G_{10}, v\rangle z + \langle G_{01}, v\rangle \bar{z} + \cdots \\ \dot{v} = Cv + \dfrac{1}{2} H_{20} z^2 + H_{11} z\bar{z} + \dfrac{1}{2} H_{02} \bar{z}^2 + \cdots \end{cases} \qquad (3.2.7)$$

dimana $G_{20}, G_{11}, G_{02}, G_{21} \in \mathbb{C}^1$; $G_{01}, G_{10}, H_{ij} \in \mathbb{C}^{n-2}$; $H_{11}$ bernilai real dan $H_{20} = \overline{H}_{02}$. Dalam hal ini hasil kali skalar yang digunakan adalah $\langle G, v\rangle = \sum_{i=1}^{n-2} \overline{G}_\iota v_i$. Dalam hal fungsi G dan H dari Sistem (3.2.5) didapat :

$$G_{ij} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} G(z,\bar{z},0)\Big|_{z=0}, i+j \geq 2 \qquad (3.2.8)$$

$$H_{ij} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} H(z,\bar{z},0)\Big|_{z=0}, i+j = 2 \qquad (3.2.9)$$

$$\bar{G}_{10,i} = \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial z} G(z,\bar{z},v)\Big|_{z=0,v=0}, i = 1,2,\dots,n-2, \qquad (3.2.10)$$

$$\bar{G}_{01,i} = \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial \bar{z}} G(z,\bar{z},v)\Big|_{z=0,v=0}, i = 1,2,\dots,n-2, \qquad (3.2.11)$$

dengan mensubtitusikan Persamaan (3.2.6) ke dalam Persamaan (3.2.7), maka pada tingkat kuadratik, akan didapat hubungan kesamaan sebagai berikut :

$$(2i\omega_0 E - C)^{-1}\omega_{20} = H_{20,}$$
$$-C\omega_{11} = H_{11,}$$
$$(-2i\omega_0 E - C)\omega_{02} = H_{02}$$

Dengan demikian didapat :

$$\omega_{20} = (2i\omega_0 E - C)^{-1} H_{20,}$$
$$\omega_{11} = -C^{-1} H_{11}$$
$$\omega_{02} = (-2i\omega_0 E - C)^{-1} H_{02}$$

Dengan E adalah matriks identitas dan matriks $(2i\omega_0 E - C), C, (-2i\omega_0 E - C)$ adalah matriks invertible. Karena 0 dan $\pm 2i\omega_0$ bukanlah nilai eigen dari dari C. Kemudian pembatasan (restriction) Sistem (3.2.5) ke Center Manifoldnya sampai dengan suku kubik ( kuadratik) dapat ditulis sebagai :

$$\dot{z} = i\omega_0 + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2$$
$$+ \frac{1}{2}(G_{21} - 2\langle G_{10}, C^{-1}H_{11}\rangle + \langle G_{01}, (2i\omega_0 E - C)^{-1}H_{20}\rangle) + z^2\bar{z} + \cdots,$$

dengan hanya suku kubik yang diperlukan untuk analisis bifurkasi Hopf yang ditampilkan.

## 3. Kesimpulan

Dalam analisis kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial biasa ( nonlinear ) seringkali memunculkan titik ekuilibrium yang mempunyai nilai eigen yang mempunyai bagian real nol atau biasa disebut titik ekuilibrium nonhiperbolik. Ketika titik ekuiliibrium tersebut muncul, analisis kestabilan lokal dengan menggunakan nilai eigen tidak bisa digunakan. Dalam prakteknya pada sistem persamaan diferensial terutama yang memuat parameter,pada titik ekuilibrium nonhiperbolik tersebut sering terjadi bifurkasi. Dalam menganalisa kestabilan bifurkasi dari titk ekuilibrium nonhiperbolik dapat digunakan metode analisis Center Manifold.

## Daftar Rujukan

Khalil, H.A., Nonlinear Systems, Third Edition, Prentice – Hall, Inc.,Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2002.

Kuznetsov, Y.A., *Element of Applied Bifurcation Theory*, Second Edition, Applied Mathematical Sciences, vol 112, Springer – Verlag, New York, USA, 1998.

Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics Vol 7, Springer – Verlag, New York, USA, 1991.

Thorpe, J.A.,Elementary Topics in Differential Geometry, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer – Verlag, New – York, USA, 1991.

Verhulst, F.,*Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg, Germany, 1990.

Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New – York, 1990.