

Sistem Pembelajaran Aljabar Abstrak Menggunakan Software Gap

MAHARANI

Jurusan Matematika Universitas Jenderal Soedirman

Email : rani_faw@telkom.net

ABSTRAK

Aljabar abstrak merupakan mata kuliah yang isinya menekankan pada teori – teori dasar dan pembuktian teorema, meskipun ada juga sedikit aspek perhitungannya. Sebagian besar mahasiswa yang mengambil matakuliah ini merasa kurang berminat, hal ini terlihat dari keaktifan mereka di dalam kelas yang kurang, dan terlihat juga dari nilai akhir yang mereka peroleh yang tidak memuaskan para pengampu mata kuliah ini.

Kurangnya minat terhadap matakuliah aljabar abstrak dapat disebabkan oleh beberapa faktor, satu diantaranya adalah karena kurangnya software pendukung matakuliah tersebut. Software yang dimaksud merupakan suatu program komputer yang memuat fungsi – fungsi tertentu sehingga memudahkan suatu perhitungan.

Makalah ini membahas pengalaman penulis dalam memberikan pembelajaran aljabar abstrak menggunakan software GAP sebagai pendukung matakuliah ini. Walaupun hasil yang diperoleh belum tampak (karena penggunaan Software GAP baru diperkenalkan semester ini), namun rasa ketertarikan terhadap mata kuliah ini sudah kelihatan, hal ini ditandai dengan antusiasnya mahasiswa bertanya tentang materi yang diberikan. Mahasiswa merasa mempunyai pengalaman baru dalam mempelajari aljabar abstrak menggunakan software GAP. Software GAP menyediakan beberapa fungsi , operasi, dan struktur aljabar, sehingga mahasiswa dapat dengan mudah melakukan perhitungan yang melibatkan aljabar. Mahasiswa juga dapat membuat suatu algoritma komputer yang sederhana dalam GAP ini, satu algoritma saja dapat membuat mahasiswa memahami secara utuh dari suatu konsep baru. Mahasiswa dapat bereksplorasi terhadap konsep – konsep dasar grup dan ring. Sistem pembelajaran dengan menggunakan software GAP juga bermanfaat agar mahasiswa dapat bekerja secara berkelompok sehingga tercipta kelompok diskusi yang membuat suasana kelas menjadi hidup.

Kata kunci : sistem pembelajaran, software GAP, aljabar abstrak

1. PENDAHULUAN

1.1. LATAR BELAKANG

Aljabar abstrak merupakan mata kuliah yang isinya menekankan pada teori – teori dasar dan pembuktian teorema. Pada beberapa program studi Matematika di Indonesia, mata kuliah ini mempunyai peserta terbanyak dibandingkan dengan mata kuliah lainnya yang ditawarkan oleh program

studi. Hal ini disebabkan karena setiap tahun jumlah mahasiswa yang mengulang untuk matakuliah ini semakin banyak.

Banyaknya mahasiswa yang mengulang pada mata kuliah aljabar abstrak dapat disebabkan karena mahasiswa kurang berminat terhadap matakuliah ini. Kurangnya minat mahasiswa terhadap matakuliah ini dapat disebabkan oleh beberapa faktor, pertama isi dari matakuliah tersebut hanya konsep dasar dan pembuktian teorema, sehingga mahasiswa merasa kesulitan dalam memahami matakuliah tersebut. Kedua, pengampu matakuliah aljabar abstrak belum memberikan motivasi yang mendalam tentang munculnya suatu konsep dasar, misalkan pengampu hanya memberikan definisi grup dan contohnya, tanpa mengenalkan motivasi munculnya konsep grup tersebut, sehingga mahasiswa memahami konsep grup tidak secara mendalam. Ketiga, belum adanya suatu software yang mendukung matakuliah ini, sehingga mahasiswa merasa bahwa matakuliah ini hanya pengenalan konsep –konsep dasar dan pembuktian teorema.

Berbagai metode telah diupayakan oleh para pengampu matakuliah aljabar abstrak untuk menarik mahasiswa agar meminati matakuliah ini, sehingga hasil yang dicapai lebih optimal. Dalam beberapa makalah juga telah dibahas tentang pembelajaran matematika khususnya bidang aljabar, diantaranya tentang pembelajaran struktur aljabar dengan kooperative learning model , ditulis oleh Abdur Rahman As'ari (2003). Pembelajaran aljabar abstrak dengan bantuan komputer telah dibahas oleh Wanti Widjaja, 2003.

Wanti membahas khusus pembelajaran teori grup dengan eksplorasi matriks – matriks dengan bantuan template Excel.

Metode pembelajaran aljabar abstrak yang dilengkapi dengan software pendukung belum banyak dilakukan. Pada makalah ini, penulis mencoba menyajikan satu metode pembelajaran matakuliah aljabar abstrak yang dilengkapi dengan software GAP sebagai pendukung matakuliah tersebut, sehingga diharapkan mahasiswa memperoleh pengalaman baru dalam mempelajari matakuliah tersebut dan mahasiswa lebih memahami tentang konsep – konsep dasar yang diberikan.

2. RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang di atas dapat ditarik suatu rumusan masalah dalam makalah ini yaitu :

1. Bagaimana software GAP dapat menjelaskan konsep – konsep dasar yang ada pada matakuliah aljabar abstrak
2. Bagaimana sistem pembelajaran matakuliah aljabar abstrak menggunakan software GAP

3. PEMBAHASAN

Matakuliah aljabar abstrak merupakan salah satu matakuliah yang kurang diminati oleh mahasiswa, faktor – faktor penyebabnya telah dijelaskan pada bab pendahuluan, salah satunya adalah belum banyak software yang mendukung matakuliah ini, sehingga mahasiswa merasa bahwa matakuliah ini hanya mengandung pengenalan konsep dasar dan pembuktian teorema.

Pada bab ini akan dibahas tentang software GAP yang merupakan pendukung mata kuliah aljabar abstrak, sehingga dengan adanya GAP ini dapat membantu mahasiswa agar lebih memahami suatu konsep dasar yang diberikan.

3.1. GAP

Software GAP merupakan suatu software yang memuat fungsi, operasi, dan struktur aljabar. Penggunaan software dalam bidang matematika dapat membuat mahasiswa lebih memahami suatu materi. Ada beberapa keuntungan menggunakan software GAP, yaitu :

1. dapat berfungsi sebagai kalkulator

GAP dapat digunakan untuk melakukan perhitungan seperti fungsi kalkulator dan mengurangi perhitungan tangan yang berulang, sehingga mahasiswa dapat menghemat waktu dan dapat mengerjakan yang lainnya.

2. dapat memberikan contoh–contoh secara cepat berkaitan dengan teori grup dan ring

GAP menyediakan fungsi, operasi, dan struktur aljabar yang dapat digunakan untuk memberikan contoh – contoh yang sangat besar dan kompleks. Misalkan, mahasiswa dapat memberikan semua elemen dari grup berorde 14 beserta sifat – sifatnya menggunakan GAP.

3. sebagai sarana untuk mahasiswa dalam membuat suatu algoritma komputer sederhana

Dengan membuat satu algoritma saja dapat membuat mahasiswa memahami satu konsep baru lebih mendalam, misalkan mahasiswa disuruh membuat algoritma untuk mencari semua elemen nilpoten dalam suatu grup.

4. sebagai sarana untuk mahasiswa bekerja secara berkelompok.

GAP adalah sebagai pendukung sistem pembelajaran aljabar abstrak yang dilakukan secara tradisional, yaitu cara pengajaran yang fokus utamanya adalah menggunakan konsep – konsep dasar aljabar abstrak, belajar tentang bagaimana pembuktian teorema-teorema aljabar abstrak dan memahami struktur aljabar abstrak. Program master GAP dapat di-download dari website dengan alamat :

<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap>

(Gallian, 2006).

3.2. PERINTAH-PERINTAH DASAR GAP

Beberapa perintah dasar dalam software GAP yaitu :

1. untuk keluar dari GAP, ketik quit ;
2. untuk menyimpan satu file, ketik LogTo("filename") ;
3. untuk berhenti menyimpan pekerjaan pada file tersebut, ketik LogTo () ;
4. ketik <ctl>-p untuk menampilkan perintah sebelumnya
5. Jika terdapat suatu kesalahan yang disebabkan oleh GAP dan masuk dalam loop (dan memberikan prompt brk>), maka ketik <ctl>-D atau quit; untuk keluar dari loop.
6. ketik ? diikuti oleh satu nama subyek untuk memperoleh informasi mengenai subyek tersebut.

Beberapa contoh penggunaan perintah GAP :

```
gap> ?multiplication
```

Selanjutnya GAP menjelaskan bagaimana perintah dalam perhitungan dasar aritmetika, contohnya : ' $\langle a \rangle * \langle b \rangle$ ' yaitu menotasikan perkalian antara elemen-elemen $\langle a \rangle$ dan elemen-elemen $\langle b \rangle$.

```
gap> LogTo("assignment-1");  
gap> (5 + 3) * 9;
```

72

Untuk mengecek kesamaan dua buah nilai digunakan tanda =, contohnya :

```
gap> 6=9;  
false
```

Contoh perintah untuk memberikan suatu nilai pada suatu variabel :

```
gap> a := (10 + 7) * (9 - 6);  
51  
gap> a;  
51  
gap> a * (a-1);  
2250  
gap> a:=14;;  
gap> a * (a-1);  
182
```

3.3. GAP DALAM BILANGAN MODULO

GAP dapat membentuk bilangan modulo, sebagai contoh :

```
gap> 23 mod 6;  
5  
gap> 5 mod 6 + 11 mod 6;  
10  
gap> 10 mod 6;  
4
```

3.4. GAP DALAM FUNGSI

Di dalam program GAP, ada keleluasaan untuk membuat fungsi, menggunakan operator \rightarrow (tanda minus dan lebih besar dari tanpa spasi).

Dalam contoh berikut dibuat fungsi square yang mengolah input bilangan menjadi nilai kuadratnya.

```
gap> square:=x -> x^2;
function( x ) ... end
```

Setelah fungsi tersebut dibuat, maka bisa digunakan dengan cara :

```
gap> square(2);
4
gap> square(5);
25
```

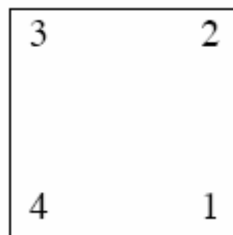
3.5. PENGANTAR GRUP

Grup dihedral , dinotasikan D_n , adalah grup dengan orde $2n$. Perintah dalam GAP ditulis :

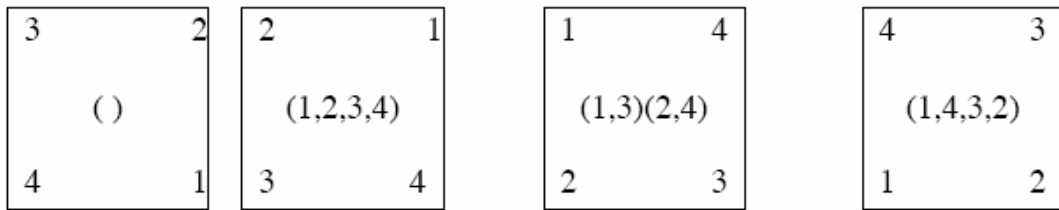
```
gap> d4:= DihedralGroup(IsPermGroup,8);
Group([ (1,2,3,4), (2,4) ])
gap> Elements(d4);
[ (), (2,4), (1,2)(3,4), (1,2,3,4), (1,3), (1,3)(2,4), (1,4,3,2), (1,4)(2,3) ]
```

Perintah “Elements” menampilkan elemen-elemen d4. Perintah “Size” menampilkan jumlah elemen d4 yang juga merupakan orde d4

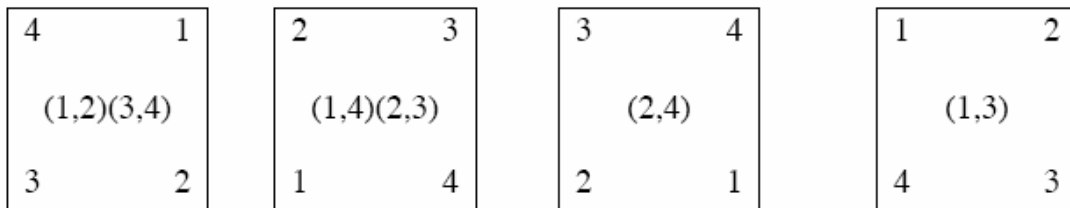
```
gap> Size(d4);
8
```



Gambar Dihedral Awal



Gambar Identitas, d4 diputar 90°, d4 diputar 180°, d4 diputar 270°.



Gambar Refleksi Horizontal, Vertikal, dan Diagonal

3.6. GRUP

Misalkan $U(n)$ adalah himpunan semua bilangan bulat positif yang kurang dari n dan relatif prim ke n . Di bawah operasi perkalian modulo n , himpunan $U(n)$ membentuk grup. GAP dapat menampilkan semua elemennya melalui suatu fungsi berikut :

```

ulist:= function(n)
local s,i,o;
o:= One(Integers mod n);
s:= n-> Filtered([1..n-1], i -> Gcd(i,n) = 1);
return s(n)*o;
end;

```

Selanjutnya, dengan perintah :

```
gap> Read("ulist");
```

```
gap> ulist(100);
[ ZmodnZObj( 1, 100 ), ZmodnZObj( 3, 100 ), ZmodnZObj( 7, 100 ),
  ZmodnZObj( 9, 100 ), ZmodnZObj( 11, 100 ), ZmodnZObj( 13, 100 ),
  ZmodnZObj( 17, 100 ), ZmodnZObj( 19, 100 ), ZmodnZObj( 21, 100 ),
  ZmodnZObj( 23, 100 ), ZmodnZObj( 27, 100 ), ZmodnZObj( 29, 100 ),
  ZmodnZObj( 31, 100 ), ZmodnZObj( 33, 100 ), ZmodnZObj( 37, 100 ),
  ZmodnZObj( 39, 100 ), ZmodnZObj( 41, 100 ), ZmodnZObj( 43, 100 ),
  ZmodnZObj( 47, 100 ), ZmodnZObj( 49, 100 ), ZmodnZObj( 51, 100 ),
  ZmodnZObj( 53, 100 ), ZmodnZObj( 57, 100 ), ZmodnZObj( 59, 100 ),
  ZmodnZObj( 61, 100 ), ZmodnZObj( 63, 100 ), ZmodnZObj( 67, 100 ),
  ZmodnZObj( 69, 100 ), ZmodnZObj( 71, 100 ), ZmodnZObj( 73, 100 ),
  ZmodnZObj( 77, 100 ), ZmodnZObj( 79, 100 ), ZmodnZObj( 81, 100 ),
  ZmodnZObj( 83, 100 ), ZmodnZObj( 87, 100 ), ZmodnZObj( 89, 100 ),
  ZmodnZObj( 91, 100 ), ZmodnZObj( 93, 100 ), ZmodnZObj( 97, 100 ),
  ZmodnZObj( 99, 100 ) ]
```

Maka GAP dapat menampilkan elemen – elemen dari $U(100)$. $ZmodnZObj(3, 100)$ berarti elemen 3 mod 100.

3.7. GAP dalam GRUP BERHINGGA dan SUBGRUP

Sub grup dari grup berhingga dehidral dapat ditampilkan dengan perintah – perintah sebagai berikut :

```
gap> G:= DihedralGroup(IsPermGroup, 16);
Group([ (1,2,3,4,5,6,7,8), (2,8)(3,7)(4,6) ])
gap> Elements(G);
[ (), (2,8)(3,7)(4,6), (1,2)(3,8)(4,7)(5,6), (1,2,3,4,5,6,7,8), (1,3)(4,8)(5,7),
  (1,3,5,7)(2,4,6,8), (1,4)(2,3)(5,8)(6,7), (1,4,7,2,5,8,3,6), (1,5)(2,4)(6,8),
  (1,5)(2,6)(3,7)(4,8), (1,6)(2,5)(3,4)(7,8), (1,6,3,8,5,2,7,4), (1,7)(2,6)(3,5),
  (1,7,5,3)(2,8,6,4), (1,8,7,6,5,4,3,2), (1,8)(2,7)(3,6)(4,5) ]

gap> a:= G.1;
(1,2,3,4,5,6,7,8)
gap> b:= G.2;
(2,8)(3,7)(4,6)
gap> H:= Subgroup(G, [a]);
Group([ (1,2,3,4,5,6,7,8) ])
gap> Elements(H);
[ (), (1,2,3,4,5,6,7,8), (1,3,5,7)(2,4,6,8), (1,4,7,2,5,8,3,6),
  (1,5)(2,6)(3,7)(4,8), (1,6,3,8,5,2,7,4), (1,7,5,3)(2,8,6,4),
  (1,8,7,6,5,4,3,2) ]
```

3.8. GAP dalam ISOMORPHIS

Isomorphisme merupakan pemetaan $f : G \rightarrow G'$ yang mengawetkan operasi dan merupakan pemetaan satu – satu dan pemetaan pada, dengan G dan G' adalah grup. (Adkins, 1992). Automorpisme adalah suatu isomorphisme dari grup G ke dirinya sendiri. Sebagai contoh, diberikan grup cyclic berhingga G orde n yang dibangun oleh x . Jadi, $G = \{e, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$. Didefinisikan pemetaan $f_k : G \rightarrow G$ dengan $f_k(x^i) = x^{ik}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. (Contoh : $f_2(x^3) = x^6$). Dapat dibuktikan f_k adalah homomorpisme. Masalahnya adalah apakah f_k automorphisme ? Karena cyclic adalah grup berhingga dan f_k pemetaan dari G ke G lagi, maka untuk menunjukkan f_k automorpisme adalah cukup ditunjukkan f_k adalah pemetaan pada, karena pemetaan satu – satunya sudah dijamin oleh pemetaan pada tersebut. Berikut perintah – perintah untuk hal tersebut :

```
gap> G:= CyclicGroup(IsPermGroup, 8);
Group([ (1,2,3,4,5,6,7,8) ])
gap> Elements(G);
[ (), (1,2,3,4,5,6,7,8), (1,3,5,7)(2,4,6,8), (1,4,7,2,5,8,3,6),
(1,5)(2,6)(3,7)(4,8), (1,6,3,8,5,2,7,4), (1,7,5,3)(2,8,6,4), (1,8,7,6,5,4,3,2) ]
gap> a:= G.1;
(1,2,3,4,5,6,7,8)

gap> f:= x -> x^2;
function( x ) ... end
gap> H:= Subgroup(G,[f(a)]);
Group([ (1,3,5,7)(2,4,6,8) ])
gap> Elements(H);
[ (), (1,3,5,7)(2,4,6,8), (1,5)(2,6)(3,7)(4,8), (1,7,5,3)(2,8,6,4) ]
gap> Size(H);
4
```

Perintah ketiga di atas yaitu a adalah generator dari grup cyclic orde 8. Perintah keempat mendefinisikan fungsi f yaitu $f(x) = x^2$. H adalah image dari f . Karena H adalah sub grup sejati dari G maka f bukan automorphisme.

Selanjutnya, perintah berikut menunjukkan f automorphisme, karena $H = G$.

```

gap> f:= x -> x^3;
function( x ) ... end
gap> H:= Subgroup(G,[f(a)]);
Group([ (1,4,7,2,5,8,3,6) ])
gap> Size(H);
8

```

3.9. TEOREMA COSET dan LAGRANGE

Misal G adalah grup permutasi dari himpunan S . Untuk setiap $s \in S$, orbit dari s adalah himpunan yang didefinisikan oleh $\{g(s)/ g \in G\}$. (Adkins, 1992)

Perintah $\text{Orbit}(G, s)$ dalam GAP menyajikan orbit – orbit s dibawah grup G .

```

gap> G:=SymmetricGroup(8);
Sym([ 1 .. 8 ])
gap> a:= (1,2,3)(4,5,6);
gap> b:= (7,8);
gap> H:=Subgroup(G,[a,b]);
Group([ (1,2,3)(4,5,6), (7,8) ])
gap> Elements(H);
[ (), (7,8), (1,2,3)(4,5,6), (1,2,3)(4,5,6)(7,8), (1,3,2)(4,6,5),
(1,3,2)(4,6,5)(7,8) ]
gap> Orbit(H,1);
[ 1, 3, 2 ]
gap> Orbit(H,7);
[ 7, 8 ]

```

3.10. HOMOMORPISMA GRUP

Perintah : $\text{GroupHomomorphismByImages}(G, H, [\text{daftar dari generator } G], [\text{daftar dari image generator – generator tersebut}])$ dalam GAP akan memberikan spesifikasi tentang homomorphisme.

```

gap> S3:= SymmetricGroup(3);
Sym([1..3])
gap> f1:= GroupHomomorphismByImages(S3,S3, [(1,2,3),(1,3)], [(1,3,2),(1,2)]);
[(1,2,3), (1,3)] -> [(1,3,2), (1,2)]

```

Fungsi $f1 : S3 \rightarrow S3$ adalah homomorphisme yang memetakan $(1, 2, 3)$ ke $(1, 2, 3)$ dan memetakan $(1, 3)$ ke $(1, 2)$.

Perintahnya :

```
gap> Image(f1, (2,3));  
(2,3)  
gap> Image(f1,(1,2));  
(1,3)
```

Menyatakan $f_1(2, 3) = (2, 3)$ dan $f_1(1, 2) = (1, 3)$.

Selanjutnya,

```
gap> Size(Image(f1));  
6  
gap> Kernel(f1);  
[()]
```

Yang menyatakan bahwa f_1 automorphisme.

```
gap> f2:= GroupHomomorphismByImages(S3,S3, [(1,2,3),(1,3)], [(),(1,2)]);  
[(1,2,3), (1,3)] → [ ( ), (1,2) ]  
Size(Image(f2));  
2  
gap> H:=Image(f2);  
Group([ ( ), (1,2) ])  
gap> Image(f2, (2,3));  
(1,2)  
gap> Kernel(f2);  
Group([(1,2,3)]);
```

Jika didefinisikan suatu pemetaan yang bukan homomorphisme, maka GAP akan menampilkan output fail.

```
gap> f3:= GroupHomomorphismByImages(S3,S3, [(1,2,3),(1,3)], [(1,3),(1,2)]);  
fail
```

f_3 memetakan $(1, 2, 3)$ ke $(1, 3)$, jadi f_3 bukan homomorphisme.

3.11. Pembelajaran menggunakan software GAP

Pembelajaran aljabar abstrak di dalam kelas oleh penulis baru dilaksanakan pada semester ini. Biasanya penulis menyisipkan penggunaan

software GAP disela – sela pembahasan tentang suatu konsep dasar teori grup. Misalkan tentang homomorphisme grup, setelah membahas definisi dan memberikan contoh dari pemetaan yang homomorphisme, penulis menggunakan GAP dalam menjelaskan definisi dan contoh tersebut. Meskipun belum diadakan suatu survey tentang rasa ketertarikan mahasiswa terhadap penggunaan software ini, namun dapat terlihat dari keaktifan mereka dalam tanya jawab dengan penulis. Selain itu, penulis juga membuat kelompok – kelompok kecil untuk mendiskusikan tentang suatu materi dan mendiskusikan hasil dari perhitungan menggunakan software GAP.

4. PENUTUP

Berdasarkan uraian di atas, dapat ditarik suatu kesimpulan bahwa pembelajaran menggunakan software GAP dapat membantu mahasiswa dalam memahami suatu konsep dasar grup maupun ring, karena langsung ke contoh penggunaannya. Juga, mata kuliah ini menjadi matakuliah yang menarik karena mahasiswa dapat bereksplorasi tentang suatu pemahaman teori dengan membuat suatu algoritma komputer sendiri.

Adapun survey terhadap hasil pembelajaran ini belum dilakukan, karena penggunaan pembelajaran ini baru dilakukan pada semester ini. Penggunaan software GAP dalam pembelajaran aljabar abstrak belum dilakukan secara maksimal, baru sebatas pengenalan disela – sela perkuliahan aljabar abstrak. Penulis sarankan untuk menggunakan jam khusus dalam penggunaan software GAP di luar perkuliahan aljabar abstrak, sehingga hasil yang diperoleh menjadi optimal.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, *Algebra An Approach via Module Theory*, Springer-Verlag, 1992

As'ari Abdur Rahman, *Pembelajaran Struktur Aljabar Dengan Cooperative Learning Model Jigsaw*, Seminar Nasional Aljabar dan Pengajarannya UGM, 2003

Gallian, Joseph A, *Abstract Algebra with GAP*, Houghton Mifflin Company, 2006

Widjaja, Wanti, *Peran Eksplori Dalam Pengajaran dan Pembelajaran Grup*, Seminar Nasional Aljabar dan Pengajarannya, UGM, 2003