Turunan-Turunan Dari Fungsi-Fungsi Analitik

Budiono
Prodi Statistika Terapan Fakultas MIPA
Universitas Gajayana Malang

ABSTRAK

Pada tulisan ini akan ditunjukkan bahwa bila fungsi f analitik pada suatu titik, maka semua turunan – turunan dari f pada titik tersebut ada dan analitik. Suatu fungsi dikatakan analitik pada suatu titik , bila turunan dari fungsi tersebut ada pada titik tersebut dan pada lingkungannya.

DERIVATIVES OF ANALYTIC FUNCTIONS

ABSTRACT

We are new ready to prove that if a function is analytic at a point, its derivations of all orders exist at that point and are themselves analytic there. A function f of the complex variable z is analytic at a point z_o if its derivative exists not only at z_o but also at each point z in some neighborhood of z_o .

PENDAHULUAN

Suatu fungsi kompleks f(z) dikatakan analitik pada z_0, bila turunan dari f ada pada z_0 dan juga pada lengkungan dari z_0. Jadi bila f analitik pada z_0, maka f analitik pada setiap titik dalam lengkungan tadi. Suatu fungsi dikatakan analitik pada daerah R, bila f analitik pada setiap titik dalam R, kadang kadang disebut holomorphic (Churchill,1984).

Bila z analitik pada daerah R, maka setiap titik z dalam R harus merupakan titik dalam dari domain definisi R, karena titik tadi mempunyai lingkungan. Jadi biasanya fungsi f terdefinisi pada suatu domain, sehingga bila suatu fungsi terdefinisi pada suatu cakram tertutup, $|z| \leq 1$ misalnya, maka yang dimaksud disini adalah bahwa f analitik pada suatu domain yang mengandung cakram tersebut (Snider, 2002).

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa bila fungsi f analitik pada suatu titik, maka semua turunan-turunan dari f pada titik

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema “ **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT “** yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

tersebut ada dan analitik. Misal f analitik dalam dan pada kontour C yang sederhana dan tertutup dan z titik didalam C. Misal S titik – titik pada C dan dengan menggunakan rumus integral cauchy didapat :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(s)\quad ds}{s-z} \text{........(1)}$$

Akan dibuktikan bahwa turunan dari f pada z ada dan bentuk integralnya:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(s)\quad ds}{(s-z)^2} \text{........(2)}$$

Disini (2) didapat dengan menggunakan integral dari (1) terhadap z. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\Pi i}\int_c \left(\frac{1}{s-z-\Delta z} - \frac{1}{s-z}\right)$$

$$\frac{f(s)}{\Delta z}ds$$

$$= \frac{1}{2\Pi i}\int_c \frac{f(s)ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)}$$

bila 0<|Δz|<d, d adalah jarak terdekat dari z pada titik s pada c. Untuk itu digunakan sifat f adalah kontinu pada c untuk menunjukkan bahwa nilai integral dikarenakan menuju ke

$$\frac{1}{2\Pi i}\int \frac{f(s)}{(s-z)^2}dz, \text{ bila } \Delta z \to 0$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$\int_c \left[\frac{1}{(s-z-\Delta z)(s-z)} - \frac{1}{(s-z)^2}\right] f(s)ds$$

$$= \Delta z \int \frac{f(s)ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}$$

Misalkan M adalah nilai maksimum dari |f(s)| pada c dan L panjang dari C. Karena |s-z|≥ d dan |s-z-Δz| ≥ |s-z|–|Δz|≥d–|Δz|,

$$\Delta z\int_c \frac{f(s)\,ds}{(s-z-\Delta z)(s-z)^2}| \le \frac{|\Delta z|ML}{(d-|\Delta z|d^2}$$ dapat

dan bentuk terakhir ini akan menuju 0, bila Δz →0. Jadi

$$\lim_{\Delta z\to o}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\Pi i}\int_c \frac{f(s)ds}{(s-z)^2}$$

dan (2) terbukti. Bila digunakan cara yang sama pada (2), maka didapat :

$$f''(z) = \frac{1}{\Pi i}\int_c \frac{f(s)ds}{(s-z)^3} \text{............(3)}$$

Lebih tepatnya bila 0<|Δz |<d

$$\frac{f^1(z+\Delta z)-f^1(z)}{\Delta z} =$$

$$\frac{1}{2\Pi i}\int_c \left[\frac{1}{(s-z-\Delta z)^2} - \frac{1}{(s-z)^2}\right]\frac{f(s)}{\Delta z}ds$$

$$= \frac{1}{2\Pi i}\int_c - \frac{2(s-z)-\Delta z}{(s-z-\Delta z)^2\,(s-z)^2} f(s)ds$$

dan karena f kontinu pada c, nilai dari integral

$$\int_c \left[\frac{2(s-z)-\Delta z}{(s-z-\Delta z)^2(s-z)^2} - \frac{2}{(s-z)^2}\right] f(s)ds$$

$$= \int_c \frac{3(s-z)\Delta z\; 2(\Delta z)^2}{(s-z-\Delta z)^2(s-z)^3} f(s)ds$$

akan menuju 0, bila Δz menuju 0

Persamaan (3) menunjukkan adanya turunan kedua dari f pada setiap titik z didalam c. Jadi bila f analitik pada suatu titik, maka f^1 juga analitik para titik tersebut. Misal w= f(z) = (1+z)(1-z)$^{-1}$, maka f'(z) = [(1-z)(1)-(1+z)(-1)](1-z)$^{-2}$ = 2(1-z)$^{-2}$, fungsi tersebut analitik dimana-mana kecuali di z=1, dimana turunan tersebut tidak ada ; yakni fungsi tersebut tidak analitik di z=1. Didalam aerodinamika dan mekanika fluida, fungsi U(x,y) dan V(x,y) didalam f(z)=U(x,y) + iV(x,y) , dimana f(z) analitik , berturut –turut dinamakan potensial kecepatan dan fungsi arus.

Fungsi analitik lain adalah fungsi harmonik .Suatu fungsi riil h(x,y) disebut harmonik pada domain pada bidang xy, bila pada setiap titik (x,y) pada domain tersebut h mempunyai turunan parsial yang kontinu untuk tingkat pertama dan kedua serta memenuhi persamaan deferensial parsial Laplace.

$H_{xx}(x,y) + h_{yy}(x,y) = 0$ ………. (1)

Bila f analitik pada D, maka turunan parsial yang pertamanya akan memenuhi persamaan Conechs Riemann :

$U_x=V_y$ $U_y = - V_x$ ……………. (2)

Bila kedua persamaan diturunkan terhadap variabel x, didapat :

$U_{xx}=V_{yx}$ $U_{yx}=-V_{xx}$ ………. (3)

Demikian pula penurunan terhadap variabel y memberikan

$U_{xy} = V_{yy}$ $U_{yy} = - V_{xy}$

Menurut teorema-teorema pada kalkulus lanjutan, bila turunan-turunan parsial kontinu, maka hal ini akan menjamin $U_{yx} = U_{xy}$ dan $V_{yx}=V_{xy}$. Jadi dari persamaan (3) dan (4) didapat :

$U_{xx}(x,y)+U_{yy}(x,y)=0$ dan

$V_{xx}(x,y) + V_{yy}(x,y) =0$

Jadi bila fungsi f(z)=U(x,y)+ i V(x,y) analitik pada domain D, fungsi-fungsi komponen U dan V adalah harmonik pada D (Kaplan, 1984)

TEOREMA- TEOREMA

Teorema A. (Churchill, 1984)

Bila fungsi f analitik pada suatu titik, maka semua turunan – turunannya untuk tiap tingkat adalah analitik pada titik tersebut.

Bukti :

Bila fungsi f(z) = u(x,y) + i v(x,y) adalah analitik pada titik z= (x,y), maka karena f′ analitik, maka f′ kontinu pada titik tersebut.

Kemudian karena $f'(z) = u_x (x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$

Maka didapat turunan-turunan parsial dari u dan v untuk tiap tingkat kontinu pada titik dimana f analitik.

$f''(z) = u_{xx} (x,y) + i v_{xx} (x,y) = v_{yx} (x,y) - iu_{yx} (x,y)$, dan seterusnya.

Bila $f^{(0)}(z)$ adalah f(z) dan 0! = 1, maka dapat digunakan induksi matematika untuk membuktikan rumus

$$f^{(n)}(z) = \frac{n}{2\eta i}! \int_c \frac{f(s)\,\mathrm{ds}}{(\mathrm{s}-\mathrm{z})^{\mathrm{n}=1}}, (\mathrm{n} = 0,1,2,.(4)\mathrm{B}$$

ila n = 0, maka didapat rumus Integral Conechs. Bila rumus benar untuk, bilangan bulat tidak negatif n=m, maka dapat dilanjutkan untuk n=m +1 seperti pada saat (2) bentuk menjadi (3) dan seterusnya.

Teorema B.

Misal C adalah kontour sederhana yang tertutup dan C_j (j=1,2,…n) adalah sejumlah hingga kontour-kontour sederhana tertutup didalam C, sehingga daerah-daerah didalam C_j masing-masing tidak mempunyai titik-titik yang sama. Misal R daerah tertentu yang terdiri dari titik-titik dalam C. C_j – B adalah batas dari R yang terdiri dari C dan setiap Contour C_j, sehingga titik dalam R terletak disebelah kiri R. Bila f analitik pada R, maka $\int_c f(z)\,\mathrm{dz} = 0$ ………. (5)

Bukti :

Misal path poligonal L_1 terdiri dari sejumlah berhingga segmen garis yang dihubungkan ujung-ujungnya yang menghubungkan kontour C dengan kontour dalam C_1. Selain itu misal path poligonal L_2 menghubungkan C_1 dengan C_2 dan seterusnya terbukti L_{n+1} yang menghubungkan C_n dengan C, maka dapat dibentuk dua kontour tertutup yang sederhana Γ_1, Γ_2 yang masing-masing mengandung path poligonal L_j serta potongan-potongan dari C dan C_j serta masing-masing berorientasi sehingga titik-titik dalam Γ_1 dan Γ_2 berada disebelah kiri. Karena integral pada L_j dilakukan dua kali dalam arah berlawanan, maka jika dijumlahkan sama dengan 0.

Teorema C. (Churchill, 1984)

Bila f analitik dan tidak konstan pada domain, maka $|f(z)|$ tidak mempunyai nilai maksimum dalam domain tersebut. Jadi tidak ada z_0 dalam domain tersebut $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, z dalam domain……(6)

Bukti :

Untuk membuktikan ini diperlukan dalil bantu yang berbunyi : Bila f tidak konstan pada domain D, maka fungsi tersebut tidak konstan pada lingkungan $|z-z_0| < \in$ dalam D.

Jika f konstan pada $|z-z_0| < \in$ atau bila fungsi f analitik dan tidak konstan pada lingkungan dari z_0, maka ada paling sedikit 1 titik dalam lingkungan z

$\ni |f(z)| > |f(z_0)|$ ………….. (7)

Misalkan $|f(z)|$ mempunyai nilai maksimum pada titik z_0 dalam D, maka $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ untuk setiap z dalam lingkungan $|z-z_0| < \varepsilon$ yang termasuk dalam D. Tetap hal ini bertentangan dengan (7), karena f analitik dan tidak konstan dalam lingkungan tersebut. Jadi terbukti.Bila fungsi f analitik pada tiap titik dalam suatu daerah yang tertutup dan terbatas, maka f kontunu pada R. Bila modulus $|f(z)|$ mempunyai nilai maksimum dalam R, maka ada bilangan $M \geq 0$ sehingga $f(z) \leq M$, untuk setiap z anggota R. Tetapi bila f kontinu pada daerah R yang tertutup dan terbatas serta f analitik dalam R dan bukan kontanta, maka modulus $|f(z)|$ mencapai nilai maksimumnya pada batas-batas R dan bukan pada titik dalamnya.

DAFTAR PUSTAKA

Churchill. R.V., Brohen, J.W., 1984 Complex Variables and Applications, Mc Graw – Hill, Japan, 111–118.

Koplan, W., 1984, Advanced Calculus, 3d ed, Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

Krezyg..J.G., 1971, Problem in Complex Variable Theory, american Elservier Publishing Company, Inc., New York.

Saff,E.,Snider, A.D, 2002, Fundamentals of Complex Analysis, Third Edition, Prentice Hall.

Fully Prime and Fully Coprime Modules

Indah Emilia Wijayanti[1], *Robert Wisbauer*[2]

Abstract

In this work we study fully prime and fully coprime modules by defining product and coproduct of fully invariant submodules in a module and characterize them. Moreover we look over the relation between fully prime (fully coprime modules) and another definition of primeness (co-primeness) such as prime and endo-prime (coprime and endo-coprime) modules. The primeness of the endomorphism ring is also of interest.

Key Words : fully prime modules, fully coprime modules.

We recall a notion of product of fully invariant submodules of a module M studied by Raggi, Ríos, Rincón, Fernández-Alonso and Signoret [?]. Such a product is defined in Bican et.al. [?] for every pair of submodules $K, L \subset M$ (not necessary fully-invariant). That product is used to define "prime module" and the condition is more restrictive than the one we consider here.

We dualize this product by define coproduct of fully invariant submodules of a module M. Notice that such a coproduct is considered in Bican et.al. [?] for any pair of submodules $K, L \subset M$ (not necessary fully invariant) and then a definition of "coprime modules" is derived from this coproduct.

We give some notions which are important in our investigation. M is called *(fi-)retractable* if for any non-zero (fully invariant) submodule K of M and $S = \mathrm{End}_R(M)$, $\mathrm{Hom}_R(M, K) \neq 0$. Dually, M is called *(fi-)coretractable* if for any proper (fully invariant) submodule K of M, $\pi_K \diamond \mathrm{Hom}_R(M/K, M) \neq 0$, where $\pi_K : M \to M/K$ the canonical projection.

1 Fully prime modules

A module M is called *fully prime* if for any non-zero fully invariant submodule K of M, M is K-cogenerated.

Some characterizations are given in Proposition 2.3 of [?] and we have similar characterizations here.

1.1 Fully prime modules. *The following are equivalent for an R-module M :* [Primbic1]

(a) *M is a fully prime module.*

(b) $\mathrm{Rej}(M, K) = 0$ *for any non-zero fully-invariant submodule $K \subset M$.*

(c) $K *_M L \neq 0$ *for any non-zero fully-invariant submodules $K, L \subset M$.*

[1]Jurusan Matematika FMIPA UGM

[2]Mathematisches Institut der Heinrich Heine Universität Düesseldorf, Germany

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema " **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT "** yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

(d) $\mathrm{Rej}(-, M) = \mathrm{Rej}(-, K)$ *for any non-zero fully-invariant submodule K of M, i.e., any M-cogenerated module is also K-cogenerated.*

Proof. (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (d) are obvious by the definition of cogenerating.

(b) $\Longrightarrow$ (c) For any nonzero fully-invariant submodules $K, L \subset M$ we assume that $K\mathrm{Hom}_R(M, L) = 0$. Then $0 \neq K \subset \mathrm{Rej}(M, L)$.

(c) $\Longrightarrow$ (b) Assume $\mathrm{Rej}(M, K) = U \neq 0$ for some non-zero fully-invariant submodule $K \subset M$. Then $U\mathrm{Hom}_R(M, K) = U *_M K = 0$. □

For any fully invariant submodules K, L of M, consider the product

$$K *_M L := K\mathrm{Hom}_R(M, L).$$

Based on the $*_M$-product we define fully prime submodules. A fully invariant submodule N of M is *fully prime* in M if for any fully invariant submodules K, L of M, the relation $K *_M L \subseteq N$ implies $K \subseteq N$ or $L \subseteq N$. Thus the module M is fully prime if the zero submodule is fully prime in M.

Proposition 18 of [?] provides a relationship between a fully prime submodule N of M and the factor module M/N. As a special case, consider R as a left R-module and let I, J be ideals of R. Then $I *_R J = IJ$. Since every ideal of R is a fully invariant R-submodule, we get :

1.2 Proposition. *The following are equivalent for a two-sided ideal I :*

(a) *R/I is a prime ring.*

(b) *I is a fully prime submodule in R.*

(c) *I is a prime ideal.*

In general prime modules need not be fully prime. For the following relationship we adopt the proof of [?], Proposition 13.2.

1.3 Proposition. *For an R-module M with $(*fi)$, the following are equivalent :*

(a) *M is prime and fi-retractable.*

(b) *M is fully prime.*

Notice that for any ring R, $\mathrm{End}_R(R) \simeq R$ and as a left R-module, R satisfies $(*fi)$ and is fi-retractable. If $M = R$, Proposition ?? yields

1.4 Corollary. *For the ring R the following assertions are equivalent :*

(a) *R is a prime ring.*

(b) *${}_RR$ is a prime module.*

(c) *${}_RR$ is a fully prime module.*

1.5 Proposition. *Let M be a module with $\mathrm{Soc}(M) \neq 0$. If M is fully prime, then*

(i) *M is cogenerated by a simple module.*

(ii) *$\overline{R} := R/\mathrm{Ann}_R(M)$ is a left primitive ring.*

Proof. (i) Let K be a simple submodule of M. Then $\mathrm{Tr}(K, M)$ is a fully invariant submodule and hence M is $\mathrm{Tr}(K, M)$-cogenerated. $\mathrm{Tr}(K, M)$ is K-cogenerated, and hence M is K-cogenerated.

(ii) $\overline{R}$ is cogenerated by M and hence by the simple module K (from (i)). □

2 Fully coprime modules

A module M is called *fully coprime* if for any proper fully invariant submodule K of M, M is M/K-generated. An inner coproduct of fully invariant submodules of M can be defined in the following way. For any fully invariant submodules $K, L \subset M$, put

$$\begin{aligned} K :_M L &:= \bigcap\{(L)f^{-1} \mid f \in \mathrm{End}_R(M), K \subseteq \mathrm{Ker} f\} \\ &= \mathrm{Ker}\ \pi_K \diamond \mathrm{Hom}_R(M/K, M) \diamond \pi_L, \end{aligned}$$

where $\pi_K : M \to M/K$ and $\pi_L : M \to M/L$ denote the canonical projections. $K :_M L$ is also a fully invariant submodule. Notice that such a coproduct is considered in Bican et.al. [?] for any pair of submodules $K, L \subset M$ (not necessary fully invariant) and then a definition of "coprime modules" is derived from this coproduct.

We characterize fully coprime modules in the proposition below. This is similar to Proposition 4.3 of [?] but here we consider proper fully invariant submodules.

2.1 Fully coprime modules. *The following are equivalent for an R-module M :*

(a) *M is a fully coprime module.*

(b) *If $K :_M L = M$, then $K = M$ or $L = M$, for any fully invariant submodules K, L of M.*

(c) *$K :_M L \neq M$ for any proper fully invariant submodules K, L of M;*

(d) *$\mathrm{Tr}(M/K, -) = \mathrm{Tr}(M, -)$ for any proper fully invariant submodules K of M, i.e. any M-generated module is also M/K-generated.*

Proof. (a) $\Longleftrightarrow$ (d) and (b) $\Longleftrightarrow$ (c) are trivial.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Let $K \subset M$ be a proper fully invariant submodule such that

$$N = \mathrm{Tr}(M/K, M) = (M)\ \pi_K \diamond \mathrm{Hom}_R(M/K, M) \neq M.$$

Then $0 = (M)\ \pi_K \diamond \mathrm{Hom}_R(M/K, M) \diamond \pi_N$ and $K :_M N = M$.

(d) $\Longrightarrow$ (c) Let K, L be any proper fully invariant submodules of M and assume $(M)\ \pi_K \diamond \mathrm{Hom}_R(M/K, M) \diamond \pi_L = 0$. Then

$$M = \mathrm{Tr}(M, M) = \mathrm{Tr}(M/K, M) \subset L. \quad \square$$

2.2 Fully coprime rings. *For the ring R the following are equivalent :*

(a) *${}_RR$ is coprime.*

(b) *${}_RR$ is fully coprime.*

(c) *R is a simple ring.*

2.3 Lemma. *Let M be fully coprime, $S = \mathrm{End}_R(M)$. Then M is indecomposable as (R, S)-bimodule.*

Proof. Assume $M = U \oplus V$ where U, V are (R, S)-subbimodules of M. Then $\mathrm{Hom}_R(U, V) = 0$. Since M is fully coprime, M is generated by $M/U \simeq V$. It means V also generates U, thus contradicts $\mathrm{Hom}_R(U, V) = 0$. $\square$

2.4 Corollary. *Let M be a fully coprime module. If M is semilocal, then M is homogeneous semisimple.*

Proof. $\mathrm{Rad}(M)$ is a fully invariant submodule of M, hence M is generated by $M/\mathrm{Rad}(M)$ which is semisimple. Thus M is semisimple and now apply Lemma ??. $\square$

A fully invariant submodule $N \subset M$ is called *fully coprime in M* if for any fully invariant submodules $K, L \subset M$, $N \subseteq K :_M L$ implies $N \subset K$ or $N \subset L$. By ??, M is fully coprime if and only if M is fully coprime in M. An immediate consequence of the definition is (compare with Proposition ??)

2.5 Proposition. *If a module M is fully coprime, then M is coprime and fi-coretractable.*

In view of later use for comodules and coalgebras (wedge product), we consider another coproduct of two proper fully invariant submodules $K, L \subset M$. Put

$$\begin{aligned} K \ \wedge^M \ L &:= \mathrm{Ker}\ \pi_K \diamond \mathrm{Hom}_R(M/K, M) \diamond \pi_L \diamond \mathrm{Hom}_R(M/L, M) \\ &= \mathrm{Ker}\ (\mathrm{Ann}_S(K) \diamond \mathrm{Ann}_S(L)), \end{aligned}$$

a fully invariant submodule of M. Obviously, $K :_M L \subseteq K \ \wedge^M \ L$. If M is a self-cogenerator, then the equality holds.

2.6 Proposition. *Let M be a self-cogenerator and $S = \mathrm{End}_R(M)$. If S is prime, then M is fully coprime.*

Proof. Let K, L be proper fully invariant submodules of M and $M = K :_M L$. Then $(M)\ \pi_K \diamond \mathrm{Hom}_R(M/K, M) \diamond \pi_L \diamond \mathrm{Hom}_R(M/L, M) = 0$. Since S is prime, $\pi_K \diamond \mathrm{Hom}_R(M/K, M) = 0$ or $\pi_L \diamond \mathrm{Hom}_R(M/L, M) = 0$. Hence $K = M$ or $L = M$ since M is a self-cogenerator. □

Let I, J be ideals in $\mathrm{End}_R(M)$ and put $\mathrm{Ker}\ I = K$, $\mathrm{Ker}\ J = L$. Then

$$I \subseteq \mathrm{Hom}_R(M/K, M), \quad J \subseteq \mathrm{Hom}_R(M/L, M). \tag{1}$$

For the converse of Proposition ?? the equalities in (??) are of interest.

2.7 Proposition. *Let M be a self-cogenerator and $S = \mathrm{End}_R(M)$.*

(i) *If M is self-injective and fully coprime, then S is prime and M is coprime as a right S-module.*

(ii) *If M is coprime as a right S-module, then M is fully coprime.*

Proof. (i) Let M be a fully coprime module and I, J finitely generated right ideals in S with $IJ = 0$. Put $K = \mathrm{Ker}\ I$ and $L = \mathrm{Ker}\ J$. Then by Lemma ??, $\mathrm{Hom}(M/K, M) = I$ and $\mathrm{Hom}(M/L, M) = J$ and $K :_M L = M$. Then $M = K$ or $M = L$, thus $I = 0$ or $J = 0$. Hence the ring S is prime. Since $_RM$ is fi-coretractable, M is coprime as a right S-module.

(ii) We assume that M_S is coprime, hence S is prime. Then the assertion follows from Proposition ??. □

2.8 Corollary. *If M is a self-injective self-cogenerator and $S = \mathrm{End}_R(M)$, then the following assertions are equivalent :*

(a) *M is fully coprime.*

(b) *M is coprime as a right S-module.*

(c) *S is a prime ring.*

Proof. The equivalence holds by Proposition ?? and Proposition ??. □

2.9 Proposition. *Let M be a fully coprime module with $\mathrm{Rad}(M) \neq M$. Then :*

(i) *M is generated by a module that is cogenerated by a simple module.*

(ii) *For any projective module P in $\sigma[M]$, $\mathrm{Rad}(P) = 0$.*

(iii) *$\overline{R} := R/\mathrm{Ann}_R(M)$ is a left primitive ring.*

Proof. (i) By assumption there is a maximal submodule K in M. Consider the fully invariant submodule $\mathrm{Rej}(M, M/K) \subset K \neq M$. By assumption M is $M/\mathrm{Rej}(M, M/K)$-generated, where $M/\mathrm{Rej}(M, M/K)$ is cogenerated by the simple module M/K.

(ii) By (i), P is subgenerated by $M/\mathrm{Rej}(M, M/K)$ which is cogenerated by M/K. Hence P is subgenerated by a product Q of copies of (M/K), and $P \subset Q^{(\Lambda)}$, for some index Λ (see 18.4 of [?]). Thus P is M/K-cogenerated and $\mathrm{Rad}(P) = 0$.

(iii) It is a consequence of Proposition ??, since M fully coprime implies that M is coprime. □

References

[1] Annin, S., 2002, *Associated and Attached Primes over Noncommutative Rings*, Ph.D Thesis, University of California at Berkeley.

[2] Bican, L., Jambor, P., Kepka, T., Nemec, P., 1980, *Prime and Coprime Modules*, Fundamenta Mathematicae, 107, 33-44.

[3] Johnson, R.E., 1951, *Prime Rings*, Duke Math. J. 18,799-809. Soc. 27(2), 45-63.

[4] Raggi, F., Ríos, J., Rincón, H., Fernández-Alonso, R., Signoret, C., 2005, *Prime and Irreducible Preradicals*, J. Algebra Appl. 4(4), 451-466.

[5] Raggi, F., Montes, J.R., Wisbauer, R., 2005, *Coprime Preradicals and Modules*, J. Pure Appl. Algebra 200, 51-69.

[6] Wisbauer, R., 1983, *On Prime Modules and Rings*, Comm. Algebra 11(20), 2249-2265.

[7] Wisbauer, R., 1988, *Grundlagen der Modul- und Ringtheorie*, Verlag Reinhard Fischer, München.

[8] Wisbauer, R., 1996, *Modules and Algebras : Bimodule Structure and Group Actions on Algebras*, Addison Wesley Longman Limited, England. to be Prime, Proc. Asian Mathematical Conference, Singapore, 502-510.

Penerapan Uji Chi Square Untuk Mengetahui Sumbangan Pendapatan Usahawanita Terhadap Pendapatan Total Rumah Tangga Di Tiga Desa Kecamatan Plemahan Kabupaten Kediri

Budiono
Prodi Statistika Terapan FMIPA Universitas Gajayana
Jl.Merjosari Dinoyo Malang

ABSTRAK

Motivasi bekerja bagi wanita pedesaan bukanlah sekedar mengisi waktu senggang ataupun melanjutkan karier, akan tetapi untuk mencari nafkah sebagai tambahan penghasilan bagi keluarganya.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui seberapa besar sumbangan para ibu yang berwiraswasta mempengaruhi pendapatan total rumah tangganya. Yang berada di daerah Kabupaten Kediri, Kecamatan Plemahan di Desa Tegowangi, Langenharjo dan Desa Payaman.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa peran ibu rumah tangga di tiga desa tersebut adalah fungsi dalam meningkatkan pendapatan total rumah tangga, serta motivasi yang intensif dapat menciptakan kegiatan untuk mengadakan usaha sampingan wanita.

Kata kunci : **pendapatan usaha wanita**

PENDAHULUAN

Salah satu karakseristik ekonomi negara sedang berkembang yaitu kekurangan modal. Hal ini karena tingkat pendapatan masyarakat relatif masih rendah. Rendahnya tingkat pendapatan karena sumber alam dan potensi diri masih belum di kelola secara optimal. Adapun sebagai salah satu faktor yang mempengaruhi antara lain langkanya wiraswasta.

Di daerah Kabupaten Kediri, Kecamatan Plemahan khususnya di desa Tegowangi, Langenharjo, dan desa Payaman sebagaimana diketahui masyarakatnya dalam mendapatkan penghasilan adalah bertani, hal ini lama kelamaan karena penduduk terus bertambah mengakibatkan lahan pertanian semakin lama semakin sempit, semua kondisi ini sangat mempengaruhi pendapatan mereka.

Oleh karena itu untuk mendukung kelancaran pendapatan keluarga partisipasi wanita untuk dapat bekerja mencari nafkah sebagai tambahan penghasilan dalam keluarga menjadi hal yang penting. Didunia sekarang

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema " **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT "** yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

wanita yang demikian adalah hal yang biasa, wanita sebagai ibu rumah tangga dan juga sebagai tenaga kerja. Sedangkan usaha yang dilakukan dalam rangka menambah pendapatan keluarga di tiga desa ini adalah industri kecil, berdagang dan sebagian kecil buruh tani.Penelitian ini menjelaskan tentang sumbangan pendapatan wanita terhadap pendapatan total rumah tangga.

KAJIAN TEORI

Kewiraswastaan berkaitan dengan semangat atau jiwa untuk berdiri atas dasar kemampuan atau kekuatan sendiri. Besar kecilnya kewiraswastaan seseorang tergantung pada achievement mosivation yang dimiliki, karena ini merupakan dorongan yang ada pada diri sendiri seorang untuk meraih sesuatu hasil atau prestasi.

Kewiraswasta tidak dapat di peroleh hanya melalui pendidikan format, tetapi banyak di pengaruhi oleh nilai-nilai sikap mental dan kepribadian seseorang, serta kwalitas kewiraswastaan seseorang tergantung pada sikap independent achievement. Yang di tanamkan orang tuanya semenjak kecil disamping sifat tradisi yang hidup di masyarakat.Tuntutan bagi wirausahawan yang berhasil dan berkembang adalah deversifikasi usaha, yaitu keanekaragaman usaha. Deversifikasi yang horisontal merupakan keanekaragaman usaha untuk mengganti atau meningkatkan pendapatan yang bersifat banyak jenis usaha atau banyak macam.sedangkan deversifikasi vertikal adalah usaha untuk memajukan ektor-ektor yang telah ada dan di punyai di intensifkan, sehingga mendapatkan hasil yang semakin banyak.

Sehubungan antara usaha wanita, wiraswasta wanita deversifikasi usaha wanita tidak lepas dari kodrat wanita itu sendiri sehingga ketrampilan kaum wanita dapat dimanfaatkan sebagai kewiraswastaan dengan memanfaatkan waktu luang pada lingkungan sendiri maupun luar seperti penjenisan yang dibuat oleh Biro Pusat Statistik.(BPS)

METEDOLOGI PENELITIAN

Lokasi Penelitian

Lokasi penelitian di wilayah Kediri yaitu di Kecamatan Plemahan yakni di Desa Payaman, Desa Tegowangi, Desa Langenharjo.Penentuan daerah penelitian ini didasarkan pada judgement sampling artinya di wilayah masing-masing desa ini adalah yang paling banyak rumah tangga yang melakukan kegiatan usaha.

Analisa Data

Untuk mengetahui perbedaan sumbangan pendapatan usaha wanita terhadap pendapatan total rumah tangga di tiga desa di Kecamatan Plemahan Kabupaten Kediri akan dianalisa dengan uji Chi Square yaitu dengan formulasi:

$$X^2 = \frac{\Sigma\,(fo - fe)^2}{fe}$$

Sedang untuk mencari fe digunakan rumus:

$$fe = \frac{(\ \Sigma \text{ kolom})\ (\Sigma f \text{ baris})^2}{\text{Jumlah total}}$$

Bahasan yang digunakan adalah:

- Ho diterima : apabila X^2 hitung lebih kecil dari X^2 tabel.
- Ho ditolak : apabila X^2 hitung lebih besar dari X^2 tabel.

Usaha pertama : peternakan, perikanan, kehutanan, industri/kerajinan, pedagang,dan jasa.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Kaum wanita tidak saja dapat dilihat dari sektor kegiatan rumah tangga ,tetapi juga dapat dilihat dari sektor yang lebih luas dalam ikut serta meningkatkan peranan usaha swasta nasional , baik sebagai tenaga kerja maupun sebagai pemilik usaha. Sumbangan pendapatan wanita terhadap pendapatan rumah tangga selama satu bulan di tiga desa wilayah kecamatan Plemahan Kabupaten Kediri berdasarkan sample survey 2005.

Tabel 1 : Pendapatan Keluarga Dari Sampel 3 Desa

Desa	Pendapatan suami	Pendapata Istri	Pendapatan Total
Payaman	485.000	685.000	1.170.000
(%)	(41,45)	(58,55)	(100,00)
Tegowangi	965.000	905.000	1.670.000
(%)	(45,81)	(54,19)	(100,00)
Langenharjo	920.000	1.205.000	2.125.000
(%)	(43,29)	(56,71)	(100,00)
Jumlah	2.170.000	2.795.000	4.965.000
	(43,7)	(56,3)	(100,00)

Diwilayah kecamatan Plemahan khususnya di Desa Payaman, Tegowangi dan Langenharjo pendapatan rumah tangga bersumber pada pendapatan istri sebesar 56,3 %, masing – masing Desa Payaman: 58,85 %, Tegowangi 54,19% dan Langenharjo 56,70 %. Hal ini menunjukkan besarnya sumbangan pendapatan wanita (istri) terhadap total pendapatan rumah tangga di masing – masing desa.

Diversifikasi usaha yang dilakukan suami dan istri di tiga desa.

Sumber Pendapatan	Puyama		Tegowangi		Langenharjo	
	Suami	Istri	Suami	Istri	Suami	Istri
Pegawai	-	-	-	-	1	-
negeri/ABRI	1	-	-	-	-	-
Buruh swasta	3	-	2	-	4	-
Pertanian	2	-	5	-	2	-
Buruh tani	2	3	1	4	2	2
Industri Kecil	-	3	2	6	-	8
Perdagangan	1	3	4	4	3	2
Jasa						

Analisa perbedaan sumbangan pendapatan usaha wanita dengan total rumah tangga di 3 desa dalam wilayah kecamatan Plemahan Kabupaten Kediri dengan Chi Square dengan data:

Pendapatan	**Lokasi Desa**			
	Puyama	**Tegowangi**	**Langenharjo**	
Usaha Wanita Usaha Suami	5,2 (5,02) 3,80 (3,98)	7,34 (7,81) 6,66 (6,19)	6,98 (6,69) 5,02 (5,31)	19,52 15,48
Jumlah	9	14	12	35

Dari hasil perhitungan di atas Chi Square hitung = 0,106 sedangkan Chi Square tabel 5% menunjukkan angka 5,99.Jadi Ho diterima, berarti tidak ada perbedaan sumbangan pendapatan usaha wanita terhadap pendapatan total rumah tangga di 3 desa.

Tidak adanya perbedaan masing – masing desa dikarenakan potensi di 3 wilayah cenderung sama dan pada umumnya usaha yang dilakukan ibu-ibu rumah tangga di 3 desa berkisar 2 – 4 tahun.Adanya faktor persamaan ini maka hubungan pendapatan wanita dengan pendapatan total rumah tangga di Desa Payaman , Tegowangi dan Langenharjo tidak menunjukkan adanya perbedaan yang berarti.

Simpulan

1. Peranan wanita dilihat dari segi total pendapatan rumahtangga di tiga desa sangatlah penting.
2. Tidak menunjukkan perbedaan pendapatan usaha wanita dengan pendapatan total rumah tangga di tiga desa.
3. Tingkat pendapatan, kondisi lingkungan dan motivasi yang intensif menciptakan kegairahan wanita untuk mengadaan usaha sampingan guna meningkatkan pendapatan total rumah tangga.

DAFTAR PUSTAKA

1. Anonimaus, Management dan Usahawan Indonesia, Lembaga Management Fakultas Ekonomi Indonesia Nomor 18 tahun 1997.
2. Djarwanto PS, Drs, Statistik Non Paremetrik, Badan Penerbitan Fakultas Ekonomi Universitas Gajah Mada Yogyakarta tahun 1983.
3. Irawan Drs, MBA dan M, Suparmoko, Drs, MA Ekonomi Pembangunan, Badan Penerbitan Fakultas Ekonomi Universitas Gajah Mada (BPFE – UGM), Yogyakarta tahun 1979.
4. Sutrisno Hadi, Prof, Drs, Statistik Jilid 2, Yogyakarta, tahun 1981.
5. Einardi, Dr, SE Azas – azas Ekonomi Modern, Penerbit alumni Bandun, tahun 1977.

Prediksi Kelainan Refraksi Berdasarkan Panjang Sumbu Bola Mata Pada Pasien *Myopia Axial* Melalui Regresi *Bootstrap*

Oleh: Kariyam dan Qoirlina
Statistika UII

ABSTRAKSI

Penelitian ini dilakukan di Rumah Sakit Mata 'Dr. YAP' Yogyakarta dengan tujuan untuk mendapatkan model yang baik dalam mencari hubungan antara panjang sumbu bola mata dan besarnya kelainan refraksi pada pasien *myopia axial.* Analisis ini lebih lanjut digunakan sebagai dasar dalam pertimbangan penentuan tindak lanjut pasien yang mempunyai kelainan panjang sumbu bola mata. Data yang digunakan adalah data sekunder, yaitu data panjang sumbu bola mata dan kelainan refraksi pasien myopia axial tahun 2003-2006. Analisis statistik yang digunakan adalah analisis regresi bootstrap dengan dua prosedur resampling yaitu resampling pada residual dan resampling pada pasangan data. Berdasarkan hasil analisis diperoleh bahwa metode regresi bootstrap residual menghasilkan estimasi parameter yang lebih baik.

Kata Kunci : Regresi, *Bootstrap* residual, *Bootstrap* pasangan

1. PENDAHULUAN

Penyakit mata banyak kita temui dari penyakit ringan, sedang, maupun berat yang berakibat hilangnya penglihatan atau terjadi kebutaan. Salah satu penyakit mata adalah kelainan refraksi. Kelainan refraksi ini terjadi apabila cahaya tidak dibiaskan sebagaimana mestinya sehingga gambaran yang terbentuk terlihat kabur. Kelainan refraksi mempunyai banyak jenis, antara lain *myopia, hiperopia, astigmata*, dan *presbiopi*. *Myopia* merupakan kelainan refraksi yang relatif banyak menyebabkan gangguan penglihatan, *myopia* juga merupakan salah satu dari lima besar penyebab kebutaan. *Myopia* mempunyai beberapa bentuk atau tipe yang beragam, salah satunya adalah *Myopia Axial*. *Myopia Axial* terjadi akibat bertambah panjangnya sumbu bola mata (diameter *Antero-posterior*) dari normal.

Myopia Axial yang akan diteliti adalah *myopia* yang mempunyai kategori tinggi dimana *myopia* lebih besar dari 6 dioptri. Pada kondisi ini sangat jarang

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema **" Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT "** yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

kita temui orang yang menderita, atau hanya delapan pasien yang menderita dalam kurun waktu tahun 2003-2006.

Dengan populasi yang kecil ini timbul gagasan untuk menganalisis hubungan antara panjang sumbu bola mata terhadap besarnya kelainan refraksi, menggunakan analisis regresi *bootstrap*, karena dengan populasi yang kecil kita sulit untuk mengetahui tingkat akurasi statistik yang digunakan. Pada data panjang sumbu bola mata dan kelainan refraksi juga belum terdapat asumsi apapun mengenai distribusi datanya, sehingga ini menjadi salah satu alasan dalam penggunaan *bootstrap*. Sebab bootstrap mempunyai salah satu keunggulan bahwa metode ini dapat digunakan ketika bentuk distribusi populasi yang dimiliki tidak diketahui atau tidak mengasumsikan apapun mengenai distribusi populasinya.

Analisis regresi *bootstrap* dapat dilakukan dengan dua metode resampling, yakni metode *bootstrap* residual atau sampling dari n residual, maupun dapat juga dilakukan dengan *bootstrap* pasangan data aslinya.

Berdasarkan latar belakang di atas maka **permasalahan** yang akan diteliti dalam tulisan ini adalah bagaimana model yang paling baik untuk menyatakan hubungan antara panjang sumbu bola mata dengan kelainan refraksi.

Data yang digunakan adalah data pasien penderita *Myopia Axial* Rumah Sakit Mata "Dr. YAP" Yogyakarta tahun 2003-2006. Variabel yang digunakan sebatas pada variabel panjang sumbu bola mata

Tujuan dan manfaat dari penelitian ini adalah untuk mengetahui model yang baik untuk menyatakan hubungan antara panjang sumbu bola mata dengan kelainan refraksi.

2. METODE PENELITIAN

2.1 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan adalah panjang axial bola mata dan kelainan refraksi pasien *Myopia Axial* dengan kategori tinggi. Untuk keperluan analisis, penelitian ini bersumber dari data sekunder yang diperoleh dari bagian Rekam Medis Rumah Sakit Mata 'Dr. YAP' Yogyakarta. Data sekunder yang digunakan meliputi data panjang axial bola mata dan besarnya kelainan refraksi pasien.

2.2 Teknik Analisis

Regresi Bootstrap

Analisis regresi adalah suatu analisis statistik yang memanfaatkan hubungan antara dua variabel atau lebih. Variabel yang digunakan terdiri dari variabel respon atau dependen (*Y*) dan variabel prediktor atau independen (*X*). Jika analisis regresi dilakukan untuk satu variabel dependen dan satu variabel independen dinamakan regresi sederhana. Model regresi linier sederhana dapat dinyatakan dengan model berikut :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \qquad \text{untuk i = 1, 2,……,n}$$

dimana :

Y_i : variabel respon

β_0, β_1 : parameter model

X_i : variabel prediktor

ε_i : residual model

Alternatif untuk mengestimasi estimasi parameter dalam model regresi linier dapat digunakan metode komputasi yakni *bootstraping linier regresion* model. *Bootstrap* juga dapat digunakan untuk mengestimasi tingkat keakurasian statistik penduga dari parameter regresi.

Metode *bootstrap* adalah suatu metode berbasis komputer yang sangat potensial untuk dipergunakan pada masalah kestabilan dan keakurasian. Istilah *bootstrap* berasal dari "*pull oneself up by one's bootstrap*" (Efron and Tibshirani, 1993) yang berarti berpijak diatas kaki sendiri, berusaha dengan sumber yang minimal. Dalam sudut pandang statistik, sumber daya yang minimal adalah data yang tidak mempunyai asumsi apapun tentang distribusi populasinya.

Prinsip dalam *bootstrap* adalah bahwa kita memperkirakan parameter untuk masing-masing sampel yang diperoleh dengan mengambil sampel berukuran n dari nilai-nilai data asli, sampel ini merupakan sampel acak dengan pengembalian.

Maksudnya, dalam sampel *bootstrap* beberapa nilai asli kita akan menjadi berulang, dan beberapa diantaranya tidak akan terjadi sama sekali. Sampel yang dibangkitkan ini bertujuan untuk mendapatkan nilai parameter yang mendekati nilai yang sebenarnya. Jumlah iterasi yang mungkin dibangkitkan adalah maksimal n^n sampel random. Dalam konteks regresi, resampling *bootstrap* yang dapat digunakan antara lain :

a. *Bootstrap* residual

   Yaitu metode *bootstrap* yang dilakukan untuk memperoleh model regresi dengan estimasi parameter dari residualnya.

b. *Bootstrap* pasangan data

   Adalah metode *bootstrap* untuk memperoleh estimasi parameter terbaik yang dibangkitkan dari pasangan data.

2.2.1 *Bootstrap* Residual

Model regresi dinyatakan dalam model $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, dimana β_0 dan β_1 merupakan parameter dan ε adalah *error* atau residual. Residual ini diasumsikan berdistribusi normal dengan rata-rata 0 (nol) dan standar deviasi tertentu ($\varepsilon \sim N(0,\sigma)$). Sampling dilakukan dengan pengembalian dengan jumlah iterasi maksimal n^n.

Prosedur *bootstrap* residual dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut :

a. Konstruksi sampel dari residual secara random dengan probabilitas 1/n. Hasil random ini digunakan untuk mendapatkan nilai taksiran $Y*$ yang baru.

b. Penentuan Y* didapat dari model

$$Y* = \hat{y} + e*$$

Dimana Y* merupakan nilai variabel respon dalam *bootstrap* residual, $\hat{y}$ adalah nilai taksiran model yang dicari dengan metode kuadrat terkecil. Sedangkan *error* e* merupakan resampling dari residual populasinya (ε) yang dihasilkan dari $e = y - \hat{y}$.

c. Selanjutnya adalah mengkonstruksikan data menjadi X_i dan Y_i^*. Dari data inilah kita dapat mengetahui estimasi parameternya yaitu untuk b_0* dan b_1*.

d. Untuk menghasilkan estimasi parameter yang lebih baik atau mendekati nilai sebenarnya, ulangi langkah-langkah sebelumnya sebanyak B kali, dengan jumlah iterasi yang mungkin dibangkitkan adalah maksimal n^n sampel random residualnya.

2.2.2 *Bootstrap* Pasangan Data

Metode bootstrap pasangan data adalah metode resampling bootstrap untuk memperoleh estimasi parameter yang dibangkitkan dari pasangan data (Y_i, X_i). Resampling dilakukan dengan pengembalian.

Prosedur pembentukan resampling *bootstrap* pasangan data adalah sebagai berikut :

a. Konstruksikan sampel dari data berpasangan (Y_i, X_i) secara random dengan probabilitas 1/n. Data ini merupakan data asli dari observasi.
b. Misal data hasil random tersebut dinyatakan dalam (Y**,X**), sehingga didapat model regresi $Y^{**} = X^{**}\beta + \varepsilon$.
c. Dari model tersebut kita akan mencari estimasi parameter β, yakni dengan nilai taksiran parameter b_0^{**} dan b_1^{**}
d. Untuk menghasilkan estimasi parameter yang lebih baik atau mendekati nilai sebenarnya, ulangi langkah-langkah sebelumnya sebanyak B kali.

Estimasi *bootstrap* untuk standar *error* adalah mengestimasi standar error dari parameter yang didapat dari standar deviasi empiris dari pengulangan *bootstrap*. Hasil dinotasikan dengan se_B, dimana B adalah banyaknya pengulangan atau iterasi sampel *bootstrap* yang digunakan. Berikut adalah estimasi standar error yang didapat dari sampel *bootstrap* untuk $x^{*1}, x^{*2}, ..., x^{*B}$ yang menghasilkan standar deviasi $s(x^{*b})$ yaitu :

$$\hat{se}_B = \left\{ \sum_{b=1}^{B} \frac{\left(s(x^{*b}) - B(\bar{s})\right)^2}{B-1} \right\}^{1/2}$$

3. PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data pasien penderita *myopia* dengan kategori tinggi dalam kurun waktu tahun 2003-2006.

Tabel 1. Panjang sumbu bola mata (X) dan kelainan refraksi (Y) penderita *myopia aksial* tahun 2003-2006

No.	Panjang sumbu bola mata (X) (mm)	Kelainan refraksi (Y) (dioptri)
1.	27.87	-12
2.	27.89	-12

3.	29.10	-15
4.	29.34	-15
5.	30.63	-16
6.	30.79	-18
7.	30.88	-18
8.	31.05	-20

Sumber : RS. 'Dr. Yap' Yogyakarta

Dengan metode kuadrat terkecil, dari data diatas diperoleh taksiran model sebagai berikut :

$\hat{y}_i = -45.3 + 2.06x_i$ untuk i=1, 2, …, 8

Dari model ini didapat nilai residual sebagai berikut :

$e_i = y_i - \hat{y}_i$ untuk i=1, 2, …, 8

dimana $\hat{y}_i$ adalah fitted (nilai taksiran variabel respon).

a. *Bootstrap* Residual

Analisis *bootsrap* residual dapat dilakukan dengan bantuan program pada lampiran A. Untuk mendapatkan nilai estimasi yang lebih baik dapat dilakukan dengan menambah jumlah iterasinya. Dalam laporan penelitian ini dilakukan sampai dua puluh ribu iterasi yang ditampilkan pada tabel 2.

Hasil iterasi pada tabel 2 menunjukkan bahwa parameter model mulai 5000 iterasi memberikan hasil yang konstan. Sehingga dapat dikatakan bahwa penduga parameter *bootstrap* sudah konsisten.

Tabel 2. Hasil iterasi *bootstrap* residual

iterasi	*bootstrap* rata-rata		*bootstrap* standar error	
	bo*	b1*	bo*	b1*
10	-44.079	2.014	9.512	0.319
30	-47.11	2.118	7.718	0.259
50	-44.459	2.03	7.247	0.245
100	-46.116	2.084	6.385	0.214

500	-44.946	2.045	6.788	0.228
1000	-45.18	2.052	6.828	0.229
5000	-45.293	2.056	6.84	0.23
10000	-45.277	2.055	6.861	0.231
15000	-45.299	2.056	6.743	0.227
20000	-45.233	2.054	6.873	0.231

b. *Bootstrap* Pasangan Data

Estimasi *bootstrap* pasangan data dapat dilakukan dengan bantuan program pada lampiran B. Untuk mendapatkan estimasi parameter yang lebih baik, dilakukan dengan menambah jumlah iterasi. Dalam penelitian ini iterasi dilakukan sampai 20000 iterasi.

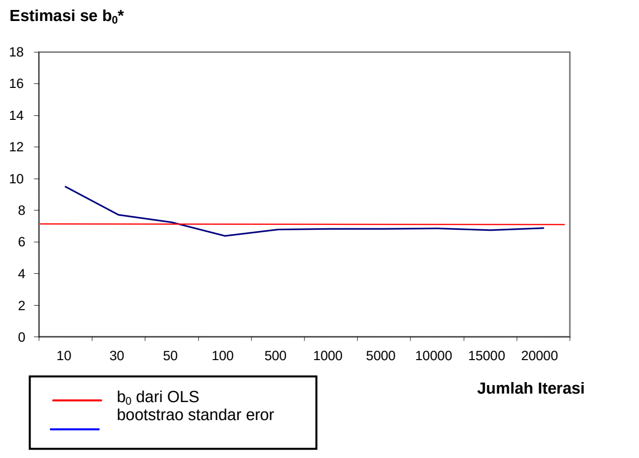
Tabel 3. Hasil iterasi *bootstrap* pasangan data

iterasi	*bootstrap* average		*bootstrap* standard error	
	b_0**	b_1**	b_0**	b_1**
10	-46.419	2.1932	5.771	0.199
30	-44.013	22.013	6.268	0.218
50	-44.246	2.018	8.663	0.297
100	-45.132	2.051	6.499	0.227
500	-44.669	2.034	7.022	0.244
1000	-45.429	2.059	1.099	0.37
5000	-45.958	2.077	16.624	0.546
10000	-45.763	2.07	15.549	0.513
15000	-45.763	2.071	15.295	0.504
20000	-45.748	2.069	15.191	0.5

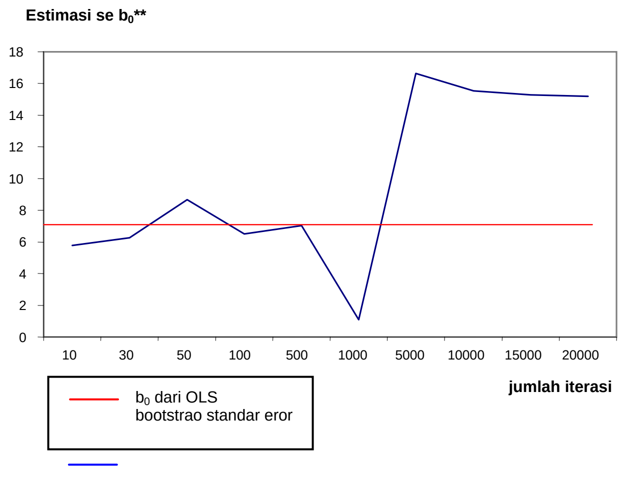
Hasil iterasi pada tabel 3 menunjukkan bahwa parameter model mulai 5000 iterasi memberikan hasil yang konstan. Sehingga dapat dikatakan bahwa penduga parameter *bootstrap* sudah konsisten.

c. Perbandingan Hasil antara *Bootstrap* Residual dan *Bootstrap* Pasangan Data

Untuk melihat seberapa baik estimasi parameter *bootstrap* dapat mendekati parameter yang sebenarnya, dapat ditunjukkan beberapa gambar berikut:

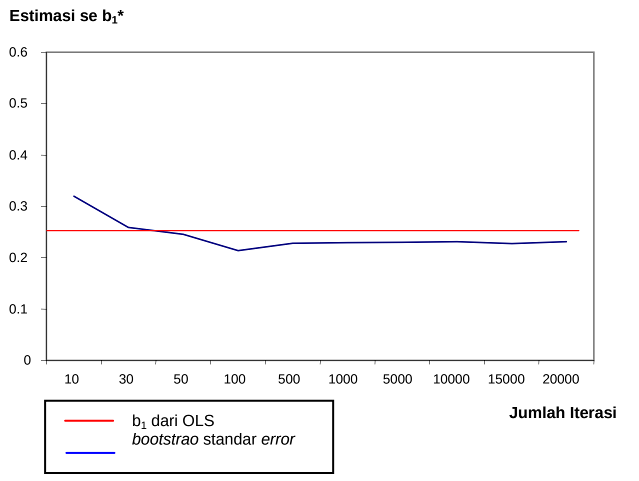


Gambar 1. Estimasi standar eror b_0 dari *bootstrap* residual

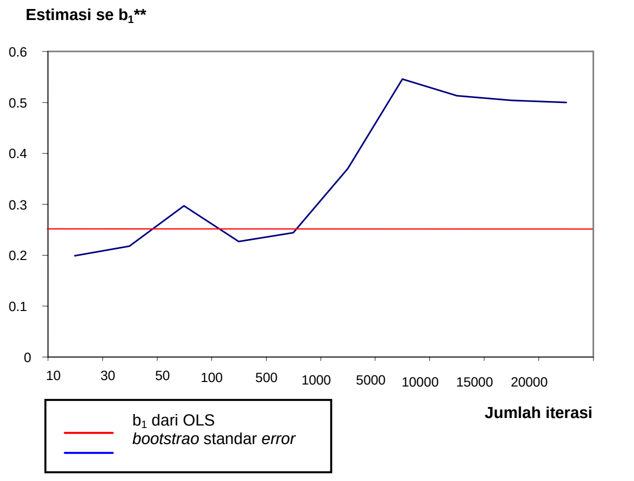


Gambar 2. Estimasi standar eror b_0 dari *bootstrap* pasangan data

Estimasi standar *error* parameter b_o dari *bootstrap* residual pada gambar 1 menunjukkan bahwa standar *error* konstan mulai iterasi ke 5000 dan mendekati nilai b_o dengan OLS. Sedangkan estimasi standar *error* b_o dari *bootstrap* pasangan data pada gambar 2 konstan mulai iterasi ke 10000 dan nilai lebih jauh dari b_o dengan OLS.



Gambar 3. Estimasi standar eror b_1 dari *bootstrap* residual



Gambar 4. Estimasi standar eror b_1 dari *bootstrap* pasangan data

Estimasi standar *error* parameter b_1 dari *bootstrap* residual pada gambar 3 menunjukkan bahwa standar *error* konstan mulai iterasi ke 5000 dan mendekati nilai b_1 dengan OLS. Sedangkan estimasi standar *error* b_1 dari *bootstrap* pasangan data pada gambar 4 konstan mulai iterasi ke 10000 dan nilai lebih jauh dari b_0 dengan OLS.

Berdasarkan hasil pada gambar 1, gambar 2, gambar 3, dan gambar 4 maka estimasi model regresi diambil dari *bootstrap* residual yang memberikan standar *error* terkecil pada posisi konstan yaitu pada jumlah iterasi 15000 dengan model sebagai berikut :

Y_i = -45.299+2.056X_i

4. SIMPULAN DAN SARAN

Regresi *bootstrap* residual menghasilkan estimasi parameter yang lebih baik daripada estimasi parameter *bootstrap* pasangan data untuk kasus prediksi kelainan refraksi berdasarkan panjang sumbu bola mata pada pasien *myopia axial* dengan model regresi sebagai berikut :

Y_i = -45.299+2.056X_i

Adapun saran yang dapat disampaikan adalah perlu diteliti lebih lanjut variabel lain yang berpengaruh terhadap kelainan refraksi.

5. DAFTAR PUSTAKA

Draper, Norman R., dan Harry Smith. 1998. *Applied Regression Analysis*. USA : John Wiley, Inc.

Efron, B., and R. Tibshirani. 1993. *Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman and Hall

Ilyas, Sidarta. 2001. *Ilmu Penyakit Mata*. Jakarta : Fakultas Kedokteran UI

Iriawan, Nur, Septin Puji Astuti. 2006. *Mengolah Data Statistik Dengan Mudah Menggunakan Minitab 14*. Yogyakarta : Andi Offset

Qoirlina. 2006. *Perbandingan Antara Regresi Bootstrap Residual dengan Regresi Bootstrap Pasangan Data.* Jogjakarta : Fakultas MIPA UII

Soejoeti, Z. 1986. *Metode Statistika II*. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Universitas Terbuka.

Walpole, Ronald, dan Raymond H. Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Edisi Keempat. Bandung : ITB

LAMPIRAN A

Program untuk Bootstrap Residual

PROGRAM UTAMA

```
#res
let k1=1                          # banyaknya variabel
let k2=8                          # jumlah data
let k10=10                        # jumlah iterasi
let k20=1
let c9=0
let c10=0
name c4 'fitted'
name c5 'resids'
name c7 'Y*'
noecho
print k2
print k10
regress c1 1 c2 c5 c4;         # fungsi regresi
residualS c5.                  # nilai residual
name c5 'resids'
name c4 'fitted'
print c2 c1 c4 c5
exec 'G:\res1.mtb' k10            # memanggil subprogram1
let c11=c9/k10                    # bootstrap rata-rata
```

```
let c12=(c10-k10*c11**2)/(k10-1)    # rumus standar error kuadrat
let c13=sqrt(c12)                   # standar error
print c8-c13
end
stop
```

SUBPROGRAM I

```
#res1
random k2 c6;                       # hasil random data
integer k1 k2.
print k20
print c6
let k3=1
exec 'G:\res2.mtb' k2               # memanggil subprogram 2
noecho
print 'Y*' 'X'
regress 'Y*' 1 'X';                 # fungsi regresi
coeff c8.                           # nilai koefisien
let c9=c9+c8                        # nilai koefisien
let c10=c10+c8**2                   # koefisien regresi kuadrat
let k20=k20+1
end
```

SUBPROGRAM II

```
#res2
let k4=c6(k3)
let c7(k3)=c4(k3)+c5(k4)          # nilai Y*
let k3=k3+1
end
```

LAMPIRAN B

Program untuk Bootstrap Pasangan Data

PROGRAM UTAMA

```
#pairs
let k1=1                          # banyaknya variabel
let k2=8                          # jumlah data
let k10=5                         # jumlah iterasi
let k20=1
let c9=0
let c10=0
name c4 'Y*'
name c5 'X*'
noecho
print k2
print k10
regress c1 1 c2                   #fungsi regresi
print c1 c2
```

```
exec 'G:\pairs1.mtb' k10            # memanggil subprogram 1
let c11=c9/k10                      # bootstrap rata-rata
let
c12=(c10-k10*c11**2)/(k10-1)        # rumus standar error kuadrat
let c13=sqrt(c12)                   # standar error
print c8-c13
end
stop
```

SUBPROGRAM I

```
#pairs1
random k2 c6;                       # hasil random data
integer k1 k2.
print k20
print c6
let k3=1
exec 'G:\pairs2.mtb' k2             # memanggil subprogram 2
noecho
print 'Y*' 'X*'
regress 'Y*' 1 'X*';                # fungsi regresi
coeff c8.                           # koefisien regresi
let c9=c9+c8                        # koefisien regresi
let c10=c10+c8**2                   # koefisien regresi kuadrat
let k20=k20+1
end
```

SUBPROGRAM II

```
#pairs2
let k4=c6(k3)
let c4(k3)=c1(k4)                 # nilai Y*
let c5(k3)=c2(k4)                 # nilai X*
let k3=k3+1
end
```

Uji Dipendensi Serial Pada Model Runtun Waktu Frekuensi Dengan Menggunakan *Simple Runs Test*

Herni Utami
Jurusan Matematika FMIPA UGM
herni_utami@ugm.ac.id

Intisari.

Di dalam analisis runtun waktu $\{X_t,\ t = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}$ dengan X_t integer positif atau nol (runtunwaktu frekuensi), kebutuhan untuk menguji adanya dipendensi adalah suatu yang rutin dilakukan. Salah satu cara untuk uji tersebut adalah dengan uji nonparametrik yaitu *run test*.

Kata kunci: runtunwaktu frekuensi, run test, INARMA, INAR, INMA

1. Pendahuluan

Proses runtun waktu frekuensi $\{X_t,\ t = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}$dengan X_t integer bernilai kecil, muncul di berbagai bidang statistika, diantaranya: runtun waktu banyaknya pelanggan yang menunggu dilayani di suatu konter yang dicatat dengan waktu diskret, banyaknya karyawan yang absen di suatu perusahaan, dan banyaknya kasus per bulan tentang suatu penyakit langka yang cepat menular. Nilai-nilai variabel random ke-t untuk kasus di atas bernilai positif atau nol dengan mean sampel barangkali kurang dari 10. Beberapa model terkait dengan kasus-kasus seperti di atas, telah dikembangkan dibeberapa literatur. Pada makalah ini, akan difokuskan pada model *integer-valued autoregressive-moving average* (INARMA)

2. Proses INAR(1)

Misalkan proses $\{X_t,\ t = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}$ mengikuti model INAR(1), maka proses tersebut akan memenuhi persamaan:

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema “ **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT** “ yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

$$X_t = a \circ X_{t-1} + W_t \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Dengan state space proses adalah bilangan cacah, dan diasumsikan bahwa $a \in [0,1)$ dan W_t adalah barisan variabel random diskrit identik independen (iid) dengan mean μ_W dan variansi σ_W^2 yang masing-masing berhingga. Untuk sembarang *t*, variabel random W_t dan X_{t-1} independen.

Proses INAR(1) diasumsikan stasioner. Hal tersebut analog dengan proses AR(1) yang sudah umum dikenal, tetapi model INAR(1) adalah nonlinear jika dikaitkan dengan o-operator yang didefinisikan sebagai berikut:

$$a \circ X_{t-1} \equiv \sum_{i=1}^{X_{t-1}} Y_{i,t-1}$$

dimana $Y_{i,t-1}$ diasumsikan variabel random bernoulli identik independen, dengan $P(Y_{i,t-1} = 1) = a$ dan $P(Y_{i,t-1} = 0) = 1 - a$. Fungsi autokorelasi (ACF) proses INAR(1) adalah $\rho(k) = a^k$ untuk $k = 0,1,2,\ldots$ Hal ini identik dengan fungsi autokorelasi proses AR(1), hanya saja $\rho(k)$ untuk proses INAR(1) selalu positif sedanga $\rho(k)$ untuk proses AR(1) tidak selalu positif.

Secara umum, proses INARMA ditandai dengan adanya struktur dependensi dan sejauh ini tidak asumsi tentang distribusi marginal dari W_t. Al-Osh dan Alzaid (1987) mengasumsikan $W_t \sim \text{Poi}(\lambda)$ dengan $\lambda > 0$ sehingga $X_t \sim \text{Poi}(\lambda/(1-a))$, selanjutnya proses disebut PoINAR(1).

3. **Proses INMA(1)**

Type struktur dipendensi yang lain dinyatakan dengan *first-order integer-valued moving average* atau INMA(1). Model proses INMA(1) dari $\{X_t,\ t = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\}$ dinyatakan sebagai berikut:

$$X_t = b \circ W_{t-1} + W_t \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

dimana $b \in [0,1]$ dan W_t adalah iid variabel random diskret. Mean dari W_t adalah μ_W dan variansi σ_W^2 yang masing-masing berhingga. o-operator didefinisikan sebagai berikut:

$$b \circ W_{t-1} = \sum_{i=1}^{W_{t-1}} Y_{i,t-1}$$

dimana $Y_{i,t-1}$ adalah iid variabel random bernoulli dengan $P(Y_{i,t-1} = 1) = b$. Sedang struktur dipendensi dari proses INMA(1) dinyatakan dengan ACF, yaitu:

$$\rho(k) = \begin{cases} \dfrac{b\sigma_W^2}{[b(1-b)\mu_W + (1+b^2)\sigma_W^2}, & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}.$$

Dari ACF di atas diperoleh $0 \le \rho(1) \le 0{,}5$.

4. **Proses INAR(2)**

Struktur dipendensi proses $\{X_t,\ t = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...\}$dengan order lebih tinggi dapat digambarkan dengan model INAR(2), yaitu

$$X_t = a_1 \circ X_{t-1} + a_2 \circ X_{t-2} + W_t \qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

o-operator analog dengan definisi sebelumnya. Untuk menjamin kestasioneran proses maka haruslah $a_1 + a_2 < 1$. Fungsi autokorelasi dari proses INAR(2) adalah

$$\rho(k) = \begin{cases} a_1, & k = 1 \\ a_1\rho(k-1) + a_2\rho(k-2), & k \ge 2 \end{cases}$$

5. **Uji Independensi Serial**

Dari uraian di atas, bisa dikatakan bahwa dalam proses INAR(1), INMA(1), dan INAR(2) terdapat adanya dependensi. Hal ini terlihat dari fungsi autokorelasi ketiga proses tersebut. Dengan demikian model-model INAR(1), INMA(1), dan INAR(2) bisa digunakan jika terdapat dependensi dalam proses $\{X_t,\ t = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...\}$ sehingga uji independensi menjadi suatu hal yang penting untuk dilakukan dalam pemodelan runtun waktu frekuensi. Ada beberapa tes yang digunakan untuk menguji adanya dipendensi pada suatu runtun waktu frekuensi. Diantaranya adalah *simple runs test*..

Metode pertama yang dibahas untuk uji indipendensi adalah *simple runs test*. Pada metode ini data runtun waktu original didefinisikan sedemikian hingga ke dalam dua kategori. Misalkan mendefinisikan data yang lebih atau kurang dari nilai tengah sampel, sehingga setiap data akan masuk kesalah satu kategori lebih dari atau kurang dari nilai tengah sampel dan membuang data yang sama dengan nilai tengah yang digunakan. Umumnya nilai tengah yang digunakan adalah median. Dalam kasus dimana data runtun waktu mengenai frekuensi selalu bernilai kecil untuk setiap *t*, maka kemungkinan besar akan terdapat banyak data bernilai sama dengan median sampel sehingga banyak data yang akan dibuang. Akibatnya kekuatan uji akan melemah. Gibbons dan chakraborti (1992) menggunakan mean sampl dengan pertimbangan bahwa mean sample kemungkinan besar bukan integer sedang data runtun waktu yang ada integer, sehingga data yang sama dengan mean sedikit atau tidak ada.

Hipotesis null yang digunakan adalah tidak ada dipendensi serial versus hipotesis alternatif adalah ada dipendensi serial. Runs test didasarkan pada urutan pengambilan sampel. Setiap data observasi dinyatakan dalam dua kategori. Run didefinisikan sebagai suatu urutan terdiri dari satu atau lebih data berkategori sama. Misalkan setelah data dikategorikan diperoleh: L L K L L L K K K K L, maka dari data tersebut terdapat 5 run, yang pertama terdiri dari dua L, yang kedua satu K, yang ketiga tiga L, yang keempat tiga K, dan yang kelima satu L. Statistik uji yang digunakan adalah *u*: banyaknya run. Untuk *u* terlalu kecil, dicurigai adanya pengelompokan atau kemungkinan lain adanya tren. Tetapi jika u terlalu besar dicurigai adanya pola selang seling. Jadi kalau u terlalu besar atau terlalu kecil mengindikasikan adanya dipendensi.

Untuk menentukan daerah kritis, perlu dicari distribusi dari u. Untuk menentukan probabilitas u, dimisalkan n: banyaknya data masuk kategori 1 dan m: banyaknya data masuk kategori 2. Total susunan terbentuk ada $\binom{n+m}{n}$. Jika u genap, maka bisa dinyatakan u=2k dan k adalah integer positif. Pada kasus ini terdapat k run dari kategori 1 dan k run dari kategori 2. Banyaknya cara membentuk k run dari n data adalah $\binom{n-1}{k-1}$. Begitu juga banyaknya cara membentuk k run dari m data ketegori 2 adalah $\binom{m-1}{k-1}$. Jadi banyaknya cara membentuk 2k run dari n+m data yang terdiri dari n data kategori 1 dan m data kategori 2 adalah $2\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k-1}$. Dengan cara yang sama diperoleh banyaknya cara untuk membentuk 2k+1 run (u ganjil) adalah $\binom{n-1}{k}\binom{m-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k}$. Sehingga diperoleh distribusi probabilitas u adalah;

$$f(u)=\begin{cases} 2\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k-1}, & u=2k \\ \binom{n-1}{k}\binom{m-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}\binom{m-1}{k}, & u=2k+1 \end{cases}.$$

Apabila n dan m besar, maka $Z=\dfrac{u-\mu_u}{sd(u)}\xrightarrow{d}N(0,1)$ dengan $\mu_u=\dfrac{2nm}{n+m}+1$ dan $sd(u)=\sqrt{\dfrac{2nm(2nm-n-m)}{(n+m)^2(n+m-1)}}$. Hipotesis null ditolak jika $Z\le -Z_{\alpha/2}$ atau $Z\ge Z_{\alpha/2}$.

Daftar Pustaka

Brännäs, K dan Quoreshi, S, (2004), *Integer-Valued Moving Average Modelling of the Number of Transactions in Stocks*, Department of Econometrics & USBE, Umeå University, Sweden

Freend's, J, (2002), *Mathematical Statistics*, edisi ke-enam, Irwin Miller and Marylees Miller.

Jung, R dan Tremayne, A.R., (2003), *Testing for Serial Dependence in Time Series Models of Counts*, Journal of Time Series Analysis, vol. 24, No.1, p65-84

Penentuan Kestabilan Sistem Hibrid melalui Trayektorinya pada Bidang

Oleh:

Kus Prihantoso Krisnawan
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA
Universitas Negeri Yogyakarta

Abstrak

Sistem hibrid mempunyai bentuk:

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), m(t)\right)$$
$$m\left(t^{+}\right) = \phi\left(x(t), m(t)\right)$$

dengan $x \in \Re^N$, $m \in M = \{m_1, m_2, ..., m_N,\}$, x merupakan variabel kontinu dan m disebut sebagai fungsi tukar yang bersifat diskrit. Kestabilan dari sistem ini untuk N = 2 dapat ditentukan dengan menggambarkan trayektorinya. Kestabilan dari masing-masing subsistem tidak menjamin sistem hibridnya menjadi stabil. Salah satu faktor penentu kestabilan sistem hibrid ini adalah fungsi tukarnya.

Kata kunci: sistem hibrid, kestabilan

A. Pendahuluan

Dewasa ini, begitu banyak bidang seperti energi listrik, transportasi, kedokteran, dan sebagainya yang menggunakan sistem hibrid. Penggunaan sistem hibrid pada bidang energi diantaranya adalah pada pembangkit listrik hibrid terbesar di dunia yang terletak di Hawaii [7]. Pada bidang transportasi juga mulai diproduksi mobil berteknologi hibrid [6], hal ini ditandai dengan mulai bermunculannya mobil-mobil hibrid diantaranya adalah honda accord hibrid, honda civic hibrid, honda insight hibrid, toyota prius, dan masih banyak yang lainnya [5].

Dalam matematika sistem hibrid hadir sebagai hasil kombinasi antara sistem diskrit dan kontiu yang diproses menggunakan suatu pembuat keputusan logis. Pada contoh-contoh diatas, sistem-sistem tersebut bukanlah murni sistem dinamik kontinu maupun diskrit namun kombinasi antara keduanya. Sistem hibrid linier disajikan dalam bentuk

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema “ **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT** “ yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

$$\dot{x}(t) = A_m(x(t)),\ m \in \{1, \cdots N\}$$

dengan $x(t) \in \Re^N$ dan m disebut sebagai fungsi tukar.

Untuk menentukan kestabilan sistem hibrid ini terlebih dahulu perlu diketahui kestabilan masing-masing subsistem dan kemudian pengaruh fungsi tukarnya terhadap kestabilan sistem secara keseluruhan. Penentuan kestabilan sistem diperlukan untuk mengetahui efek dari perubahan input terhadap sistem [3]. Sistem yang stabil lebih bermanfaat bagi manusia karena keadaan sistem pada waktu-waktu berikutnya dapat diperkirakan sedangkan sistem yang tak stabil mengarah pada keadaan yang tak menentu.

Kestabilan untuk sistem dua dimensi dapat dilihat melalui potret fasenya pada bidang. Potret fase merupakan gambar semua kurva solusi, namun sebenarnya yang diperlukan bukanlah gambar solusi secara keseluruhan tetapi hanya gambar trayektori yang mewakili. Dengan kata lain, kestabilan dari sistem hibrid untuk N = 2 juga dapat ditentukan dengan menggambarkan trayektorinya.

Dalam makalah ini akan dibahas bagaimana menentukan kestabilan sistem hibrid melalui trayektorinya pada bidang. Disini juga diberikan contoh kasus untuk menentukan fungsi tukar dari sistem sedemikian sehingga didapatkan suatu sistem hibrid yang stabil. Fungsi tukar penstabil ini mungkin juga ada untuk keadaan ekstrim, yaitu saat masing-masing subsistem tak stabil.

B. KESTABILAN

Sistem persamaan diferensial outonom hadir dalam bentuk

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

dengan x adalah fungsi yang tak diketahui dalam t dan f adalah fungsi dalam x. Terdapat titik (orbit) dari sistem ini yang mempunyai peran yang sangat penting dalam studi kualitatif dari sistem persamaan dieferensial. Titik ini disebut sebagai titik kesetimbangan.

Definisi 2.1 [3]**:** Sebuah titik $\bar{x} \in \Re$ disebut sebagai *titik kesetimbangan* (titik kritis) dari sistem (2.1) jika $f(\bar{x}) = \mathbf{0}$.

Titik kesetimbangan $\bar{x}$ dari sistem (2.1) dikatakan stabil jika setiap diberikan nilai awal yang dekat dengan $\bar{x}$ maka solusi sistem tetap dekat dengan $\bar{x}$, selanjutnya jika solusi ini menuju $\bar{x}$ saat t menuju tak hingga maka $\bar{x}$ dikatakan stabil asimtotis.

Definisi 2.2 [3]**:** Titik kesetimbangan $\bar{x}$ dari sistem (2.1) dikatakan *stabil* jika setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap x_0 yang memenuhi $|x_0 - \bar{x}| < \delta$, solusi φ $(t,\ x_0)$ dari sistem (2.1) memenuhi $|\varphi(t,\ x_0) - \bar{x}| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Jika tidak demikian maka *tidak stabil*.

Definisi 2.3 [1]**:** Titik kesetimbangan $\bar{x}$ dari sistem (2.1) dikatakan *stabil asimtotis* jika titik ini stabil dan terdapat $r > 0$ sedemikian hingga untuk setiap x_0 yang memenuhi $|x_0 - \bar{x}| < r$ berlaku $|\varphi(t,\ x_0) - \bar{x}| \to 0$ saat $t \to +\infty$.

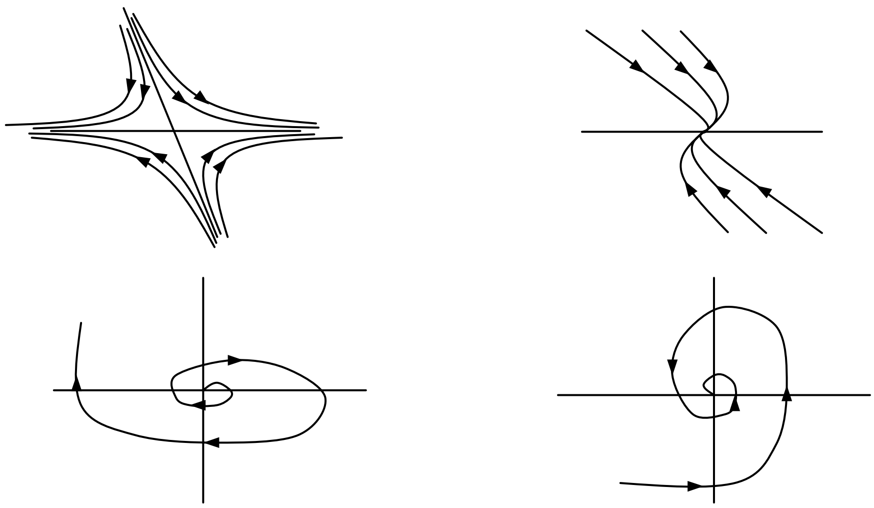
Jika setiap fungsi f dari (2.1) merupakan fungsi linier maka sistem (2.1) merupakan sistem linier dan dapat ditulis dalam bentuk:

$$\dot{x} = Ax. \qquad (2.2)$$

Kestabilan dari sistem (2.2) dapat ditentukan hanya dengan mencari nilai eigennya.

Teorema 2.4 [1]**:** Jika semua nilai eigen dari matriks koefisien A pada sistem 2.2 mempunyai bagian real yang bernilai negatif maka titik kesetimbangan $\bar{x} = \mathbf{0}$ stabil asimtotis.

Secara khusus, kestabilan untuk sistem dua dimensi dapat dilihat melalui potret fasenya pada bidang. *Potret Fase* adalah gambar kurva-kurva solusi dengan indikasi arah untuk waktu yang semakin besar [4]. Potret fase merupakan gambar semua kurva solusi, namun sebenarnya yang diperlukan bukanlah gambar solusi secara keseluruhan tetapi hanya gambar trayektori yang mewakili. Gambar 2.1 menyajikan beberapa contoh potret fase yang stabil dan tak stabil.



a. **b.**

Gambar 2.1. (a) Potret fase dari sistem tak stabil
(b) Potret fase dari sistem stabil

Berikut ini juga diberikan definisi suatu fungsi definit positif bernilai real yang turun sepanjang trayektori yang dapat digunakan untuk menentukan kestabilan. Fungsi ini disebut sebagai fungsi Liapunov. Ide dasar dibalik metode Liapunov adalah menentukan bagaimana suatu fungsi bernilai real tertentu berubah sepanjang solusi sistem (2.1). Mari kita mulai mendefinisikan fungsi ini.

Misalkan C^1 melambangkan himpunan semua fungsi terdiferensial yang turunan pertamanya kontinu. Untuk mudahnya maka fungsi yang merupakan anggota dari himpunan C^1 disebut sebagai fungsi C^1.

Definisi 2.5 [1]**:** Misalkan U subset terbuka dari $\Re^2$ yang memuat titik asal. Sebuah fungsi C^1 bernilai real

$$V : U \to \Re; \quad x \mapsto V(x)$$

Dikatakan *definit positif* pada U jika

(i) $V(\mathbf{0}) = 0$;

(ii) $V(x) > 0$ untuk semua $x \in U$ dengan $x \neq \mathbf{0}$.

fungsi C^1 bernilai real V dikatakan *definit negatif* jika $-V$ definit positif.

Teorema 2.6 [1]**:** Misalkan $\bar{x} = \mathbf{0}$ adalah titik kesetimbangan dari sistem (2.1) dan V adalah fungsi C^1 definit positif pada persekitaran U dari $\mathbf{0}$.

(i) Jika $\dot{V}(x) \leq 0$ untuk $x \in U - \{\mathbf{0}\}$ maka $\bar{x}$ stabil

(ii) Jika $\dot{V}(x) < 0$ untuk $x \in U - \{\mathbf{0}\}$ maka $\bar{x}$ stabil asimtotis

(iii) Jika $\dot{V}(x) \geq 0$ untuk $x \in U - \{\mathbf{0}\}$ maka $\bar{x}$ tak stabil.

Berikut adalah teorema Liapunov mengenai kestabilan pada sistem linier.

Teorema 2.7 [2]**:** Sistem (2.2) *stabil* jika dan hanya jika setiap diberikan matrik definit positif Q terdapat matrik definit positif P yang memenuhi

$$A^T P + P A = -Q.$$

C. PEMBAHASAN

Dalam sistem hibrid terdapat subsistem yang kontinu dan diskrit terhadap waktu yang diproses menggunakan suatu pembuat keputusan logis. Subsistem yang kontinu/diskrit hadir dalam bentuk persamaan diferensial/persamaan diferensi. Komponen pengambilan keputusan logis dapat berupa automata berhingga (finite automaton) maupun sistem kejadian diskrit yang lebih umum. Proses kontinu/diskrit berpengaruh terhadap pembuat keputusan logis dan pembuat keputusan logis berpengaruh pada gerak dinamik dari proses kontinu/diskritnya. Secara formal, sistem hibrid didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1: Sistem hybrid mempunyai bentuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\,(x(t), m(t)) \\ m(t^+) &= \phi(x(t), m(t)) \end{aligned} \qquad (3.1)$$

dengan $x \in \Re^N$, m disebut sebagai fungsi tukar dengan $m \in M = \{m_1, m_2, ..., m_N,\}$, dan masing-masing $m_i = [m_{i,1} \cdots m_{i,d}]^T \in \Re^d$. Variabel x bersifat kontinu sedangkan m bersifat diskrit. Masing-masing fungsi $f(x, \text{-})$ merupakan fungsi yang kontinu terdiferensial dan bentuk $m(t^+)$ berarti nilai m sesudah $m(t)$.

Perlu diketahui bahwa sistem (3.1) dapat ditulis sebagai

$$\dot{x}(t) = f_m(x(t)),\ m \in \{1, \cdots N\} \tag{3.2}$$

dengan $x(t) \in \Re^N$. Sedangkan jika untuk sistem hibrid linier maka masing-masing fungsi f_m merupakan fungsi linier. Sehingga sistem (3.2) menjadi

$$\dot{x}(t) = A_m(x(t)),\ m \in \{1, \cdots N\}$$

dengan $x(t) \in \Re^N$.

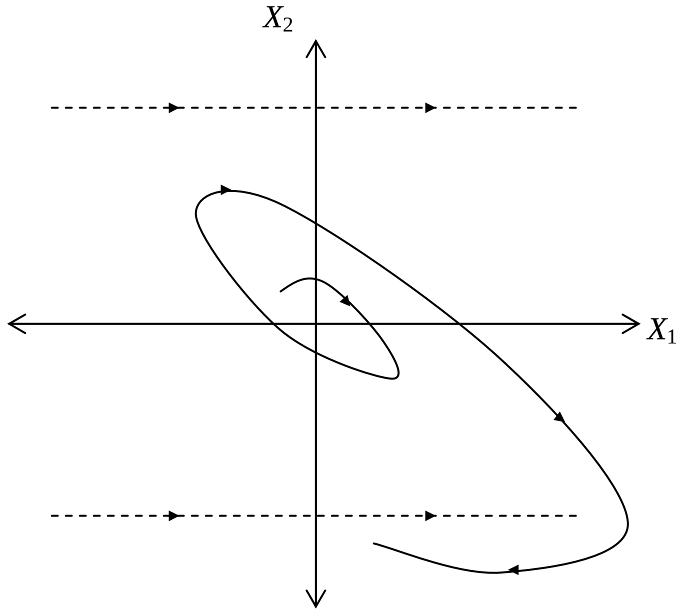
Berikut ini diberikan 2 buah contoh sistem hibrid linier dan kemudian ditinjau trayektorinya.

Contoh 3.1: Diberikan sistem hibrid $\dot{x}(t) = A_m x$ dengan $x = [x_1, x_2]^T \in \Re^2$, $m \in \{1, 2\}$, dan

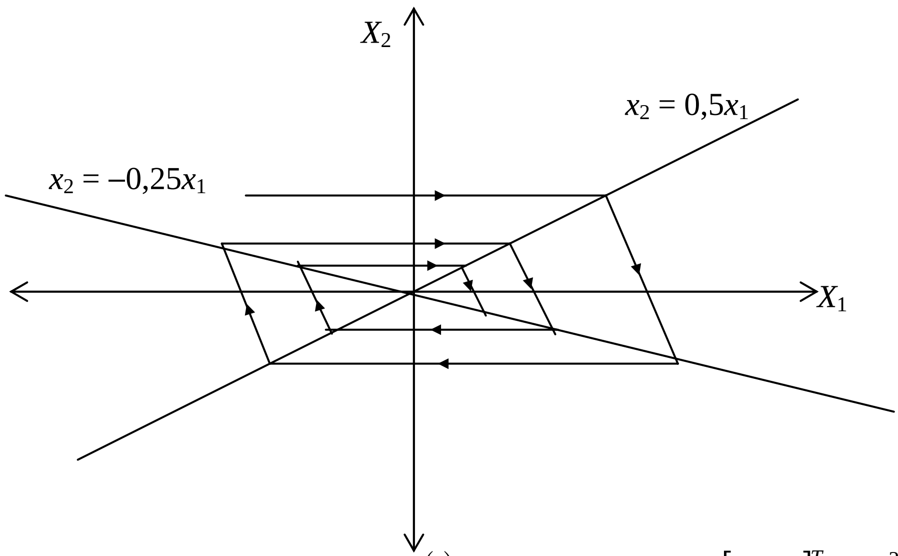
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};\ A_2 = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 2 \\ -2 & -0{,}5 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

$$m(t^+) = \begin{cases} 1, & jika\ m(t) = 2\ dan\ x_2(t) = -0{,}25x_1(t) \\ 2, & jika\ m(t) = 1\ dan\ x_2(t) = 0{,}5x_1(t) \end{cases} \tag{3.4}$$

Sistem (3.3) yaitu $\dot{x}(t) = A_1 x$ dan $\dot{x}(t) = A_2 x$ keduanya tak stabil, A_1 mempunyai nilai eigen 0 dan A_2 mempunyai nilai eigen $0{,}5 \pm i\sqrt{3}$. Potret fase dari masing-masing sistem dapat dilihat pada Gambar 3.1. Jika sistem (3.3) digabungkan dengan menggunakan fungsi tukar (3.2) maka diperoleh trayektori yang stabil (Gambar 3.2).



Gambar 3.1. Garis putus-putus adalah potret fase untuk $\dot{x}(t) = A_1 x$ dan garis tegas adalah potret fase untuk $\dot{x}(t) = A_2 x$



Gambar 3.2. Trayektori Gabungan Sistem $\dot{x}(t) = A_m x$ dengan Fungsi Tukar p

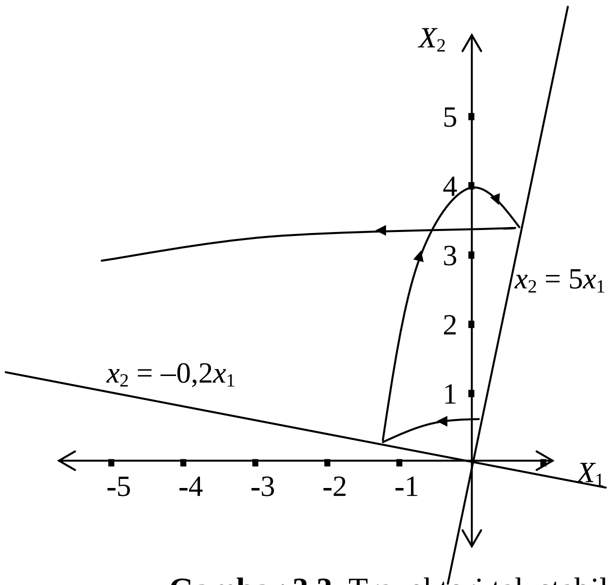
Contoh 3.2: Diberikan sistem hibrid $\dot{x}(t) = A_m x$ dengan $x = [x_1, x_2]^T \in \Re^2$ $m \in \{1, 2\}$, dan

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -100 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ -100 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Sistem (3.5) yaitu $\dot{x}(t) = A_1 x$ dan $\dot{x}(t) = A_2 x$ keduanya stabil, karena mempunyai nilai eigen $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{1000}$. Didefinisikan sebuah fungsi tukar $m(t)$ sebagai berikut

$$m(t^+) = \begin{cases} 1, & jika\ m(t) = 2\ dan\ x_2(t) = -\dfrac{1}{k} x_1(t) \\ 2, & jika\ m(t) = 1\ dan\ x_2(t) = k x_1(t) \end{cases} \tag{3.6}$$

Jika persamaan (3.6) digunakan sebagai fungsi tukar dari sistem (3.5) dengan $k = -0{,}2$ dan $x(0) \neq 0$ maka trayektori dari sistem hibrid (3.5) (3.6) menuju ke ∞ (lihat gambar 3.3).



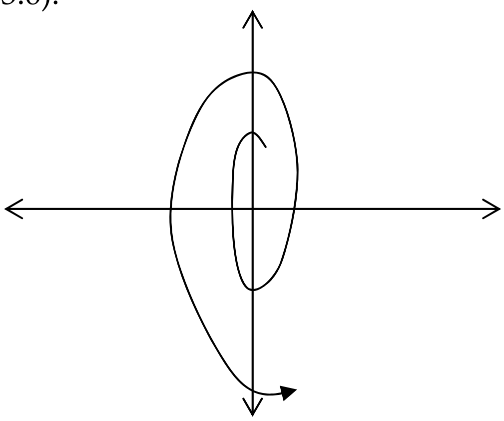
Gambar 3.3. Trayektori tak stabil

Pada contoh 3.1 terlihat bahwa pertukaran antara dua sistem yang tak stabil dapat menghasilkan sistem yang stabil asimtotis, sedangkan pada contoh 3.2 terjadi sebaliknya, yaitu pertukaran antara dua sistem yang stabil dapat menghasilkan sistem yang tak stabil. Hal ini berarti kestabilan masing-masing subsistem tidak menjamin kestabilan sistem hibridnya. Sehingga yang berpengaruh untuk menentukan kestabilan dari sistem hibrid diantaranya adalah fungsi penukarnya.

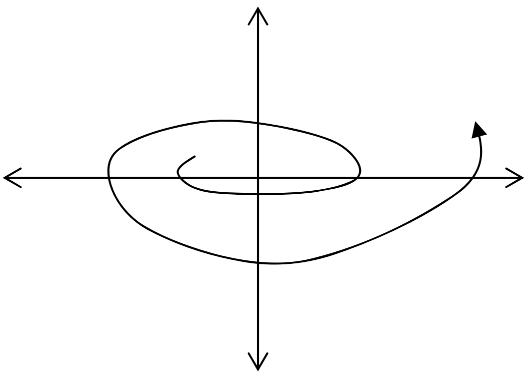
Fungsi Tukar Penstabil

Fungsi tukar dapat menjadikan sistem hibrid tak stabil maka perlu diketahui bagaimana menentukan fungsi tukarnya sehingga sistem hibrid yang terbentuk stabil asimtotis. Fungsi tukar penstabil ini mungkin juga ada untuk keadaan ekstrim, yaitu saat masing-masing subsistem tak stabil.

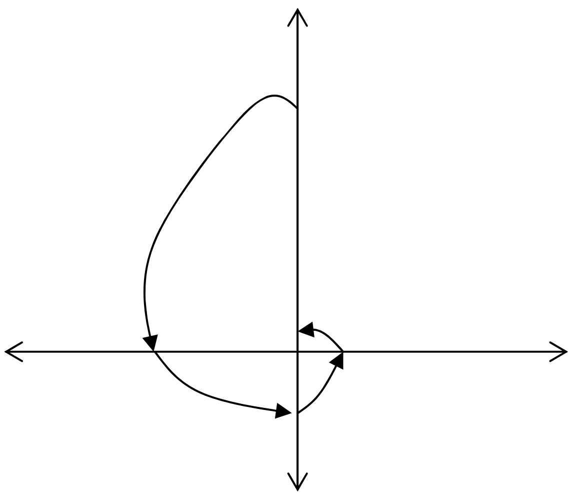
Contoh 3.3: Diberikan dua sistem linier orde 2 yang masing-masing tak stabil. Trayektori dari masing-masing sistem dapat dilihat pada gambar 3.4. dan 3.5. Jika kedua sistem ini ditukarkan sedemikian hingga sistem pertama aktif pada kuadran kedua dan keempat sedangkan sistem kedua aktif pada kuadran pertama dan ketiga maka akan diperoleh sistem yang stabil asimtotis (gambar 3.6).



Gambar 3.4



Gambar 3.5



Gambar 3.6. Trayektori Hasil Pertukaran 2 Sistem yang Tak Stabil

Pada contoh 3.3 dapat dilihat bahwa pertukaran dari dua sistem yang masing-masing tak stabil menghasilkan sebuah sistem hibrid yang stabil dengan menggunakan fungsi tukar yang sesuai.

Diberikan dua sistem linier yaitu

$$\dot{x} = A_1 x \tag{3.7}$$

$$\dot{x} = A_2 x\,. \tag{3.8}$$

dan sebuah fungsi tukar $m \in M = \{1, 2\}$. Didefinisikan *matrik konvek kombinasi* $\gamma_\alpha(A_1, A_2) = \alpha\, A_1 + (1 - \alpha)\, A_2$ dengan $\alpha \in [0, 1]$. Pertukaran antara sistem (3.7) dengan (3.8) dapat menghasilkan sistem hibrid yang stabil jika terdapat matrik konvek kombinasi $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ yang stabil. Hal ini sesuai dengan teorema berikut.

Teorema 3.2: Jika terdapat $\alpha \in (0, 1)$ sedemikian sehingga matrik $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ stabil maka terdapat fungsi tukar $m \in M = \{1, 2\}$ sedemikian sehingga sistem hibrid hasil pertukaran antara sistem (3.7) dan (3.8) stabil.

Bukti:

Sebut $A = \gamma_\alpha(A_1, A_2)$, karena terdapat matrik konvek kombinasi yang stabil, maka terdapat $\alpha \in (0, 1)$ sedemikian sehingga matrik $A = \alpha\, A_1 + (1-\alpha)\, A_2$ stabil (nilai $\alpha \neq 0$ dan $\alpha \neq 1$ karena dimungkinkan ada A_1 atau A_2 yang tak stabil). Dengan demikian, maka terdapat matrik definit positif P dan Q sehingga

$$A^T P + P\, A = -Q \tag{3.9}$$

Jika persamaan (3.9) dijabarkan maka diperoleh

$$\alpha\, (A_1{}^T P + P\, A_1) + (1 - \alpha)\, (A_2{}^T P + P\, A_2) = -Q$$

dengan mengalikan x^T dan x pada kedua ruas maka $\forall\, x \in \Re^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ diperoleh

$$\alpha\, x^T (A_1{}^T P + P\, A_1)\, x + (1 - \alpha)\, x^T (A_2{}^T P + P\, A_2)\, x = -\, x^T Q\, x < 0.$$

Karena $0 < \alpha < 1$ maka untuk setiap $x \in \Re^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ paling tidak terdapat salah satu nilai dari $x^T (A_1{}^T P + P\, A_1)\, x$ dan $x^T (A_2{}^T P + P\, A_2)\, x$ yang negatif dan karena A stabil maka $\Re^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ dapat diwakili oleh gabungan dua daerah kerucut terbuka $\Omega_1 = \{x: x^T (A_1^{\ T} P + P A_1) x < 0\}$ dan $\Omega_2 = \{x: x^T (A_2^{\ T} P + P A_2) x < 0\}$. Sehingga terdapat fungsi $V(x) = x^T P x$ yang menurun sepanjang solusi dari sistem (3.7) dalam daerah Ω_1 dan menurun sepanjang solusi dari sistem (3.8) dalam daerah Ω_2.

□

Dengan menggunakan sifat ini maka hal ini menjadi mungkin untuk mengkonstruksi fungsi tukar sehingga V menurun sepanjang solusi dari sistem hibrid yang artinya bahwa sistem yang dihasilkan stabil jika terdapat $\alpha \in (0, 1)$ sedemikian sehingga matrik $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ stabil.

D. KESIMPULAN

Kestabilan masing-masing subsistem tidak menjamin kestabilan sistem hibridnya. Sehingga untuk membuat suatu sistem hibrid yang stabil hal yang dapat dilakukan diantaranya adalah dengan menentukan fungsi tukar penstabilnya. Fungsi tukar penstabil ini mungkin juga ada untuk keadaan ekstrim, yaitu saat masing-masing subsistem tak stabil. Pengkonstruksian fungsi tukar penstabil sistem dapat dilakukan jika terdapat $\alpha \in (0, 1)$ sedemikian sehingga matrik konvek kombinasi $\gamma_\alpha(A_1, A_2)$ stabil.

E. DAFTAR PUSTAKA

[1]. Hale, J.K. dan Koçak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. New York: Springer-Verlag, Inc.
[2]. Kailath, T. (1980). *Linear Sistems*. Englewood Cliff NJ: Prentice-Hall, Inc.
[3]. Olsder, G.J. (1994). *Mathematical Systems Theory*. First Edition. Delft: Delftse Uitgevers Maatschappij.

[4]. Robinson, C. (1999). *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. Second Edition. Boca Raton Florida: CRC Press.
[5]. http://www.fueleconomy.gov/feg/hybrid_sbs_cars.shtml diakses pada tanggal 20 Juni 2006.

[6]. http://www.howstuffworks.com/hybrid-car.htm diakses pada tanggal 3 Juli 2006.
[7]. http://www.poweronline.com/cotent/news/article.asp diakses pada tanggal 3 Juli 2006.

Evaluasi dan Penilaian Interaktif Berbasis Web

Kuswari Hernawati

Jurusan Pendidikan Matematika
FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta
Alamat: Jl. Colombo Karangmalang Yogyakarta 55281
Email : kuswari@uny.ac.id

Abstrak

Hadirnya teknologi Internet berupa **Web** atau **WWW** (*World Wide Web*) dengan berbagai macam teknologi pendukungnya, telah memungkinkan dilakukannya komunikasi dan layanan informasi secara mudah dan efisien. Dengan menggunakan protokol **http** (*hypertext tranfer protocol*) sebagai basis komunikasi baku di Internet, semua bentuk komunikasi tradisional dapat dilakukan melalui Internet, bahkan lebih efektif, karena dimungkinkan penggabungan semua komponen multimedia ke dalam Web. Dalam bidang pendidikan, teknologi informasi telah dimanfaatkan untuk menunjang layanan administrasi, proses pembelajaran, pendaftaran ulang, perpustakaan, akses nilai, pencarian referensi secara cepat dan mudah, proses penelitian, pembayaran SPP, bahkan untuk seleksi penerimaan mahasiswa baru.

Pemanfaatan teknologi informasi dalam proses pembelajaran ataupun dalam seleksi penerimaan mahasiswa baru, memungkinkan peserta melakukan tes dari tempat yang berbeda, baik itu dalam jaringan internet maupun dalam jaringan intranet. Komputer-komputer yang dihubungkan ke Internet dapat dikelompokkan menjadi dua jenis, yakni komputer penyedia layanan (*server*) dan komputer pengguna layanan (*client*). Pada komputer server dipasang software server Web, basis data, dan layanan-layanan Internet lain yang dapat diakses dari komputer-komputer klien. Salah satu software web server yang dapat diperoleh secara gratis adalah adalah Apache web server, interpreter PHP dan database MySQL, sedangkan salah satu software yang dapat digunakan untuk membangkitkan soal untuk tes ataupun evaluasi yang interaktif, yang dapat langsung memberikan umpan balik kepada peserta adalah SunRav TestOfficePro.WEB2.

Berbagai kemudahan yang dapat diperoleh dari evaluasi/tes berbasis web adalah seperti pada seleksi penerimaan mahasiswa baru. Dengan sistem ini maka seleksi/ujian dapat bersifat interaktif dan menarik. Seleksi dapat dilaksanakan dari berbagai wilayah bahkan yang terpisah secara geografis sehingga pengeluaran secara finansial dari calon mahasiswa akan sangat berkurang, karena peserta tidak harus datang langsung ke perguruan tinggi yang dituju.

Kata kunci : *web, internet, tes, SunRav TestOfficePro.WEB2*

Latar Belakang

Manusia sebagai mahluk sosial membutuhkan komunikasi diantara sesamanya. untuk dapat saling berhubungan satu dengan yang lainnya,maka mulailah manusia mencari dan menciptakan sistem dan alat untuk saling berhubungan diantaranya dengan telepon dan internet.

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema **" Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT "** yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

Alat dan Sistem komunikasi yang diciptakan manusia tersebut kemudian dikenal dengan nama Teknologi Informasi (TI). TI ini terus mengalami perkembangan baik dari segi bentuk, ukuran, kecepatan, kemampuan untuk mengakses multimedia dan jaringan komputer. Sejalan dengan perkembangan teknologi jaringan komputer yang pesat memungkinkan komunikasi dan pertukaran data dalam jaringan komputer menjadi semakin mudah. Hadirnya teknologi Internet berupa **Web** atau **WWW** (*World Wide Web*) dengan berbagai macam teknologi pendukungnya, telah memungkinkan dilakukannya komunikasi dan layanan informasi secara mudah dan efisien. Dengan menggunakan protokol **http** (*hypertext tranfer protocol*) sebagai basis komunikasi baku di Internet, semua bentuk komunikasi tradisional dapat dilakukan melalui Internet, bahkan lebih efektif, karena dimungkinkan penggabungan semua komponen multimedia ke dalam Web. Dalam bidang pendidikan, teknologi informasi telah dimanfaatkan untuk menunjang layanan administrasi, proses pembelajaran (perkuliahan), pendaftaran ulang, perpustakaan, akses nilai, pencarian referensi secara cepat dan mudah, proses penelitian, pembayaran SPP, bahkan untuk seleksi penerimaan mahasiswa baru.

Pemanfaatan teknologi informasi dalam proses pembelajaran ataupun dalam seleksi penerimaan mahasiswa baru, memungkinkan peserta melakukan tes dari tempat yang berbeda, baik itu dalam jaringan internet maupun dalam jaringan intranet dalam suatu organisasi. Komputer-komputer yang dihubungkan ke Internet dapat dikelompokkan menjadi dua jenis, yakni komputer penyedia layanan (*server*) dan komputer pengguna layanan (*client*). Pada komputer server dipasang software server Web, basis data, dan layanan-layanan Internet lain yang dapat diakses dari komputer-komputer klien. Salah satu software web server yang dapat diperoleh secara gratis adalah adalah Apache web server, interpreter PHP dan database MySQL, sedangkan salah satu software yang dapat digunakan untuk membangkitkan soal untuk tes ataupun evaluasi yang interaktif, yang dapat langsung memberikan umpan balik kepada peserta adalah SunRav TestOfficePro.WEB2.

World Wide Web

World Wide Web ("WWW", atau singkatnya "Web") adalah suatu ruang informasi di mana sumber-sumber daya yang berguna diidentifikasi oleh pengenal global yang disebut Uniform Resource Identifier (URI). WWW sering dianggap sama dengan Internet secara keseluruhan, walaupun sebenarnya merupakan bagian dari internet. Hiperteks dilihat dengan sebuah program bernama browser web yang mengambil informasi (disebut "dokumen" atau "halaman web") dari server web dan menampilkannya, biasanya di sebuah monitor. Kita lalu dapat mengikuti pranala di setiap halaman untuk pindah ke dokumen lain atau bahkan mengirim informasi kembali kepada server untuk berinteraksi dengannya. Ini disebut *"surfing"* atau *"berselancar"* dalam bahasa Indonesia. Halaman web biasanya diatur dalam koleksi material yang berkaitan yang disebut "situs web". (http://id.wikipedia.org/wiki/Www)

Tes Berbasis Komputer (Computer based Test/CBT)

Tes lekat dihubungkan dengan cara pengukuran terhadap penguasaan materi tertentu. Hasil dari tes salah satunya digunakan untuk membuat keputusan sekolah atau guru terhadap muridnya. Hasil tes dianggap sebagai bukti yang valid dari individu ,yang dapat digunakan misalnya untuk kenaikan kelas, promosi jabatan, dan kelulusan. Sebelum adanya tes berbasis komputer, biasanya tes dilakukan secara tertulis dalam kertas (paper based test), tetapi seiring dengan perkembangan teknologi informasi tes tertulis mulai bergeser digantikan dengan tes berbasis komputer bahkan internet.

Ada empat bentuk model tes berbasis komputer dan internet yang dikembangkan oleh ITC, yaitu :

1 Terbuka (Open Mode)

Tes dengan model terbuka seperti ini, dapat diikuti siapapun dan tanpa pengawasan siapapun, contohnya tes yang dapat diakses secara terbuka di internet. Peserta tes tidak perlu melakukan registrasi peserta.

2 Terkontrol (Controlled Mode)

Tes dengan model seperti ini, sama dengan tes dengan model terbuka yaitu tanpa pengawasan siapapun, tetapi peserta tes hanya yang sudah terdaftar, dengan cara memasukkan username dan password

3 Supervised Mode

Pada model ini terdapat supervisor yang mengidentifikasi peserta tes untuk diotentikasi dan memvalidasi kondisi pengambilan tes. Untuk tes di internet mode ini menuntut administrator tes untuk meloginkan peserta dan mengkonfirmasi bahwa tes telah diselesaikan dengan benar pada akhir tes.

4 Managed Mode

Pada model ini biasanya tes dilaksanakan secara terpusat. Organisasi yang mengatur proses tes dapat mendefinisikan dan meyakinkan unjuk kerja dan spesifikasi peralatan di pusat tes. Mereka juga melatih kemampuan pegawai/staff untuk mengontrol jalannya tes.

(Bartram, 2001)

Ada banyak keuntungan melakukan tes melalui komputer, diantaranya : mengijinkan melakukan tes di saat yang tepat bagi peserta, mengurangi waktu untuk pekerjaan penilaian tes dan membuat laporan tertulis, menghilangkan pekerjaan logistik seperti mendistribusikan, menyimpan dan tes menggunakan kertas.

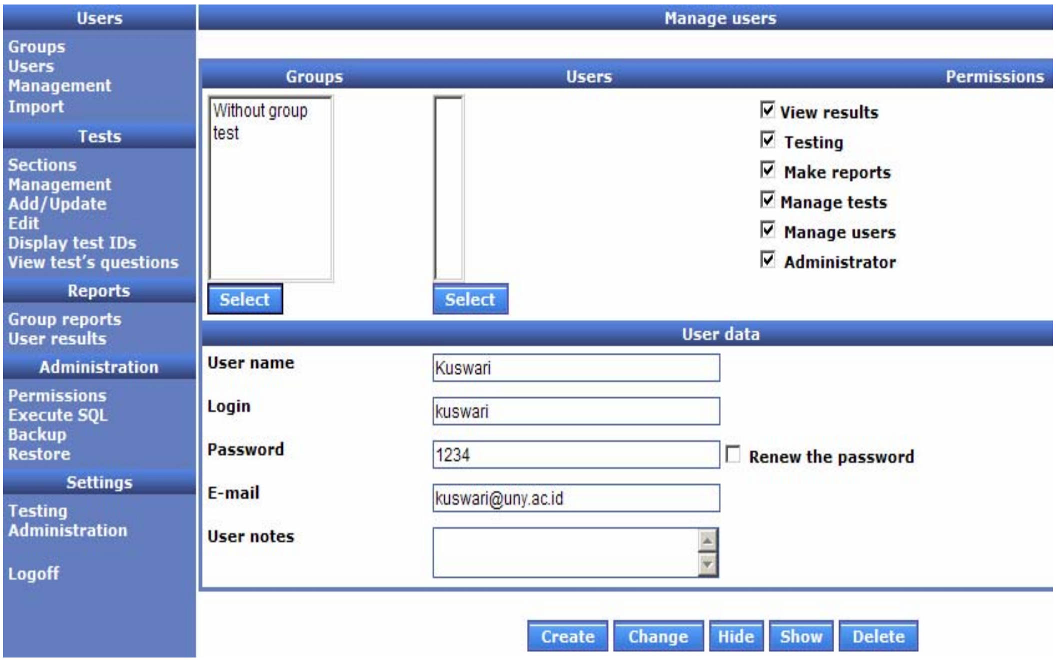
SunRav TestOfficePro.WEB2

SunRav TestOfficePro.WEB2 merupakan salah satu perangkat lunak untuk menyusun soal tes, memproses hasilnya, mengimplementasi dan menyebarkan sebagai sistem tes online. Sistem tes online dengan SunRav TestOfficePro.WEB2 ini dapat berjalan dalam dua cara yaitu dengan atau tanpa dukungan database MySQL. Dengan perangkat lunak SunRav TestOfficePro.WEB2 ini, administrator dapat membuat bermacam-macam tes online termasuk dengan dukungan multimedia, seperti suara, video dan lain-lain. Untuk mencegah akses dari seseorang yang tidak berhak, atau pemalsuan hasilnya, program ini menggunakan proteksi password dan algoritma enkripsi pada database. Dengan dukungan MySQL, administrator dapat membuat bermacam-macam laporan baik secara individu maupun kelompok, dan juga dapat melihat peningkatan atau penurunan hasil tes dari tiap individu. (http://www.sunrav.com/products/srtopweb/)

Pembahasan

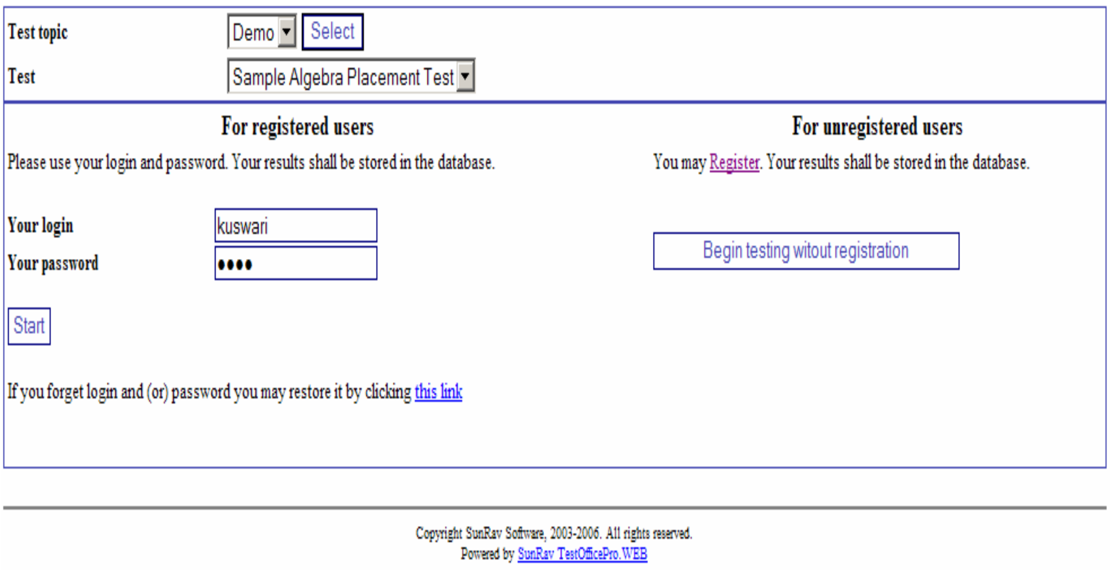
Otentikasi Peserta

Proses otentikasi dalam tes berbasis komputer atau internet, merupakan hal yang sangat penting, untuk menentukan siapa saja yang bisa mengikuti tes. Biasanya dalam proses ini, peserta tes akan diberikan sebuah username dan password, yang akan digunakan untuk login sehingga peserta dapat masuk dan mengikuti tes. Pada SunRav TestOfficePro.WEB, tampilan untuk mengatur siapa saja user yang diijinkan untuk mengikuti tes terlihat pada gambar 1, dimana pada pengaturan tersebut, ditentukan hak akses yang diperbolehkan pada seorang user, diantaranya : **view result** merupakan hak user untuk melihat hasil tes, **Testing** merupakan hak user untuk mengikuti tes, **Make Report** merupakan hak user untuk membuat laporan, **Manage Test** merupakan hak user untuk mengatur test, **Manage User** merupakan hak user untuk mengatur user, **administrator** merupakan hak user untuk berlaku sebagai administrator. User didaftar dan dimasukkan ke dalam database, sehingga selain dari yang tersimpan dalam database, tidak dapat login. Pada peserta tes biasanya hanya diberikan hak akses **View Result** dan **Testing** saja, dimana seorang peserta hanya berhak untuk mengikuti tes dan melihat hasilnya saja tanpa dapat mengubah pengaturan/setingnya.



Gambar 1. Pengaturan User

Sedangkan Tampilan pada web pada saat pertama kali masuk terlihat seperti pada gambar 2. Login dan username diisi sesuai dengan yang telah didaftar oleh administrator, dan diatur bahwa satu login hanya dapat mengikuti tes satu kali saja.

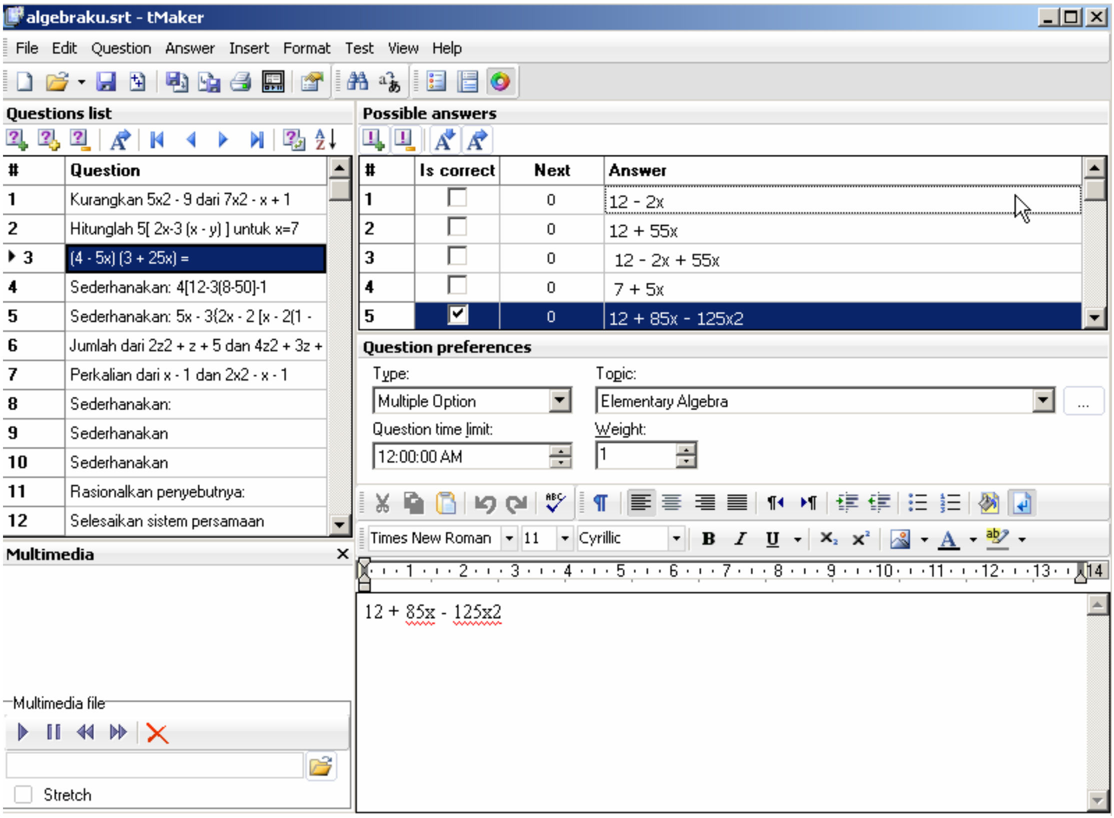


Gambar 2 Tampilan login

Setelah memasukkan username dan password, untuk memulai tes tekan tombol **Start.** Jika sebelumnya belum terdaftar dalam databasenya, maka kita tidak akan bisa masuk ke web site yang menampilkan tes online.

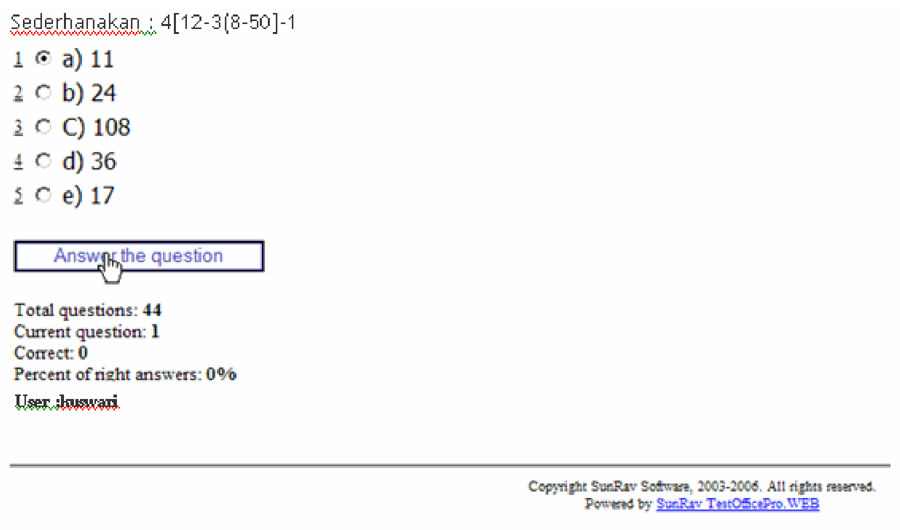
Membuat Soal

Untuk membuat soal dengan SunRav TestOfficePro.WEB, pertama kali bula folder SunRav TestOfficePro.WEB , pilih tMaker, yaitu program untuk membuat soal, dengan tampilan seperti pada gambar 3

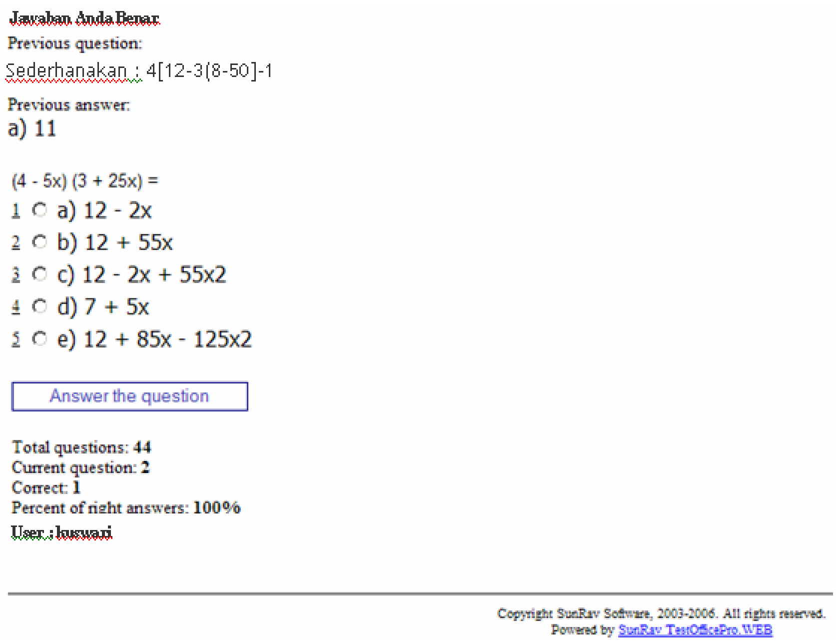


Gambar 3 tMaker

Dari tMaker soal dieksport dalam bentuk format XML, sehingga nantinya bisa ditampilkan di web seperti pada gambar 4. Soal yang telah dibuat, tersimpan dalam database dan dalam tampilan webnya akan ditampilkan secara acak, sehingga peserta pertama dengan peserta kedua dan seterusnya, akan berlainan urutan soalnya maupun urutan pilihan dari jawaban pada soal pilihan ganda.

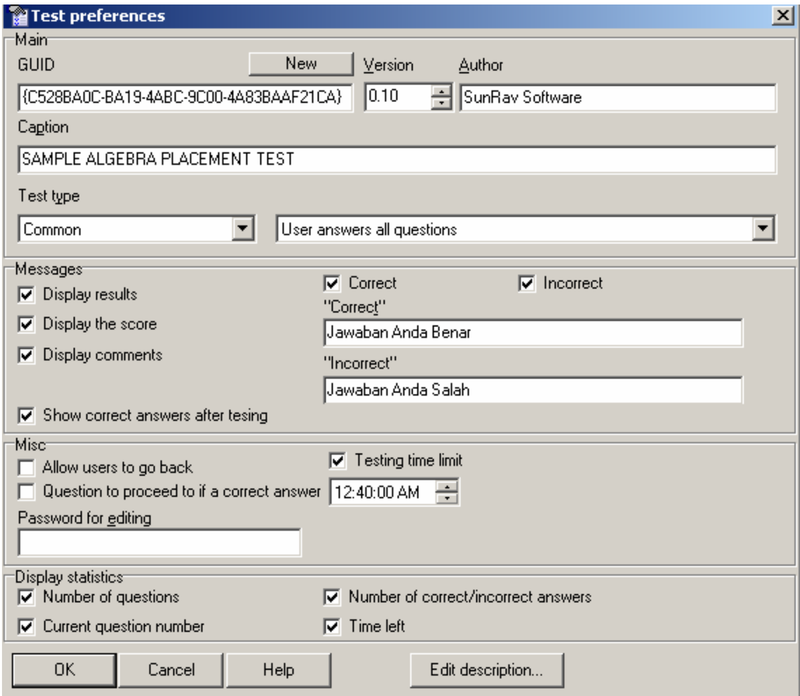


Gambar 4 Tampilan Soal di Web



Gambar 5. Tampilan Umpan Balik

Pengaturan tampilan soal maupun umpan balik yang interaktif diatur dari menu **Test Preference** pada gambar 6, dimana kita bisa mengatur apakah hasil tes, nilai, komentar jika jawaban benar atau salah, data statistik yang meliputi banyaknya pertanyaan, nomor pertanyaan yang sedang dikerjakan, banyaknya jawaban benar atau salah akan ditampilkan dalam tampilan tes pada web. Cara pengerjaanpun dapat diatur dari sini, misalnya apakah user diperbolehkan untuk mengulang kembali soal yang telah dikerjakan, atau soal akan dilanjutkan hanya jika jawaban benar. Tetapi untuk tes yang sesungguhnya dalam artian bukan untuk sekedar latihan, pilihan soal akan dilanjutkan jika jawaban benar tentu tidak mungkin dilakukan. Selain itu dari test preference ini, dapat diatur lama/batas waktu mengerjakan tes, dan sekaligus dapat ditampilkan pula waktu yang masih tersisa untuk mengerjakan soal-soal dalam tes. Dari sini peserta dapat mengetahui hasil tesnya secara langsung mengenai lulus atau tidaknya dalam tes, sehingga dapat menindaklanjuti apa yang harus dilakukan khususnya dalam hal tes penerimaan mahasiswa baru, apakah akan mengulang tesnya dikesempatan lain atau mencari alternatif yang lain.



Gambar 6 Test Preference

Tes berbasis web ini jelas sangat menghemat waktu untuk mengoreksi, mengumumkan kepada peserta mengenai lulus atau tidaknya dalam tes, juga dalam hal letak geografis yang berbeda-beda dari para peserta, tes berbasis web ini membuat mereka dapat melakukannya dari daerah masing-masing, yang tentu saja tes ini dilakukan dengan *managed mode*, yaitu teorganisasi dalam suatu lokasi tertentu dan terdapatnya supervisor di daerah masing-masing, sehingga tidak perlu datang ke perguruan tinggi dimaksud.

Namun begitu, segala sesuatu yang melalui internet mempunyai resiko terhadap keamanannya, yang dalam hal ini meliputi : tesnya sendiri yaitu isi soalnya, aturan penilaian, isi laporan dsb, identitas peserta, yaitu otentikasi identitas peserta dan menjaga kerahasiaannya, hasil tes, yaitu memastikan bahwa hanya orang yang berhak yang dapat mengaksesnya, sehingga perlu dipikirkan pengamanannya.

Kesimpulan

Berbagai kemudahan yang dapat diperoleh dari evaluasi/tes berbasis web adalah seperti pada seleksi penerimaan mahasiswa baru. Dengan sistem ini maka seleksi seleksi/ujian dapat bersifat interaktif dan menarik. Seleksi dapat dilaksanakan pada waktu yang bersamaan dari berbagai wilayah bahkan yang terpisah secara geografis sehingga pengeluaran secara finansial dari calon mahasiswa akan sangat berkurang, karena peserta tidak harus datang langsung ke perguruan tinggi yang dituju.

Saran

Untuk dapat lebih meningkatkan keamanan dari tes berbasis web ini, akan lebih baik jika digunakan koneksi https (http secure), yang menyediakan koneksi http yang terenkripsi menggunakan SSL(Secure Socket Layer) dan TLS(Transport Layer Security), sehingga akan memberikan perlindungan yang memadai terhadap pengintipan atau penyadapan.

Daftar Pustaka

1. Bartram, Dave SHL Group plc, Thames Ditton, Surrey, UK dan Hambleton, Ronald K, University of Massachusetts at Amherst, USA, Computer-Based Testing and the Internet, 2001,
2. SunRav TestOfficePro.WEB, http://www.sunrav.com/products/srtopweb/
3. Web, (http://id.wikipedia.org/wiki/Www)

Similaritas Uniter Matriks Repesentasi Grup Berhingga

Oleh:
Musthofa
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Abstrak

Misalkan G sembarang grup berhingga dan $GL_m(C)$ himpunan semua matriks nonsingular berukuran $m \times m$ dengan entri-entri bilangan kompleks. Jika terdapat suatu homomorfisme $A : G \rightarrow GL_m(C)$ maka $A(x) \in GL_m(C)$ disebut matriks representasi dari G. Jika $A(x)$ suatu matriks representasi dari G maka selalu dapat dicari suatu matriks uniter yang similar dengan $A(x)$.

Kata Kunci : Matriks representasi, matriks uniter, similar

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut teorema Cayley, jika G suatu grup berhingga maka terdapat suatu grup permutasi yang isomorfis dengan G. Sembarang permutasi pada himpunan G dapat direpresentasikan oleh suatu matriks yang disebut matriks permutasi.

Definisi 1.1.

Misalkan $G = \{ g_1, g_2, g_3, \dots , g_n \}$ *dan* p *adalah suatu permutasi pada* G *dengan* $p = \begin{Bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_n \\ p(g_1) & p(g_2) & p(g_3) & \cdots & p(g_n) \end{Bmatrix}$. *Dibentuk matriks* $A(p) = [\ a_{ij}(p)\ ]$ *dengan*

$$a_{ij}(p) = \begin{cases} 1 & \text{, jika } p(g_i) = g_j \\ \\ 0 & \text{, jika } p(g_i) \neq g_j \end{cases}$$

$A(p)$ disebut matriks permutasi dari p.

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema “ **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT “** yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

Sebagai contoh misalkan $G = \{ e, a, b, c \}$dan p permutasi pada G dengan $p(e) = a$, $p(a)= b$, $p(c) = d$, $p(d) = e$ yang dapat ditulis sebagai $p = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ a & b & c & e \end{pmatrix}$.

Diperoleh :

$a_{11}(p) = 0$ $a_{12}(p) = 1$ $a_{13}(p) = 0$ $a_{14}(p) = 0$

$a_{21}(p) = 0$ $a_{22}(p) = 0$ $a_{23}(p) = 1$ $a_{24}(p) = 0$

$a_{31}(p) = 0$ $a_{32}(p) = 0$ $a_{33}(p) = 0$ $a_{34}(p) = 1$

$a_{41}(p) = 1$ $a_{42}(p) = 0$ $a_{43}(p) = 0$ $a_{44}(p) = 0$

Jadi $A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sehingga setiap grup berhingga G dapat direpresentasikan oleh himpunan matriks permutasi. Jika $p = \begin{Bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_n \\ p(g_1) & p(g_2) & p(g_3) & \cdots & p(g_n) \end{Bmatrix}$ maka invers dari p adalah $p^{-1} = \begin{Bmatrix} p(g_1) & p(g_2) & p(g_3) & \cdots & p(g_n) \\ g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & g_n \end{Bmatrix}$.

Jadi, diperoleh $a_{ij}(p) = a_{ji}(p) = a_{ij}^{-1}(p)$. Sehingga matriks permutasi selalu merupakan matriks uniter.

Definisi 1.2.

Misalkan G grup berhingga dan $GL_m(C)$ himpunan semua matriks nonsingular berukuran $m \times m$ dengan entri-entri bilangan kompleks. Jika $A : G \rightarrow GL_m(C)$ homomorfisma, yaitu $\forall x,y$ v G terdapat $A(x), A(y)$ v $GL_m(C)$ sehingga

$$A(x)\, A(y) = A(xy)$$

maka $A(x)$ disebut matriks representasi dari G.

Jika $B(x)$ matriks yang similar dengan $A(x)$, misalkan $B(x) = S^{-1} A(x) S$ dengan S suatu matriks nonsingular, maka

$$\begin{aligned} B(x)\, B(y) &= S^{-1} A(x)\, S\, S^{-1} A(y)\, S \\ &= S^{-1} A(x)\, A(y)\, S \\ &= S^{-1} A(xy)\, S \end{aligned}$$

$= B(xy)$

Jadi *B(x)* juga matriks representasi dari *G*. Sehingga jika *A(x)* adalah matriks representasi dari *G* maka setiap matriks *B(x)* yang similar dengan *A(x)* juga merupakan matriks representasi dari *G*.

1.2. Rumusan Masalah

Misalkan *A(x)* matriks representasi dari *G*.

1. Untuk setiap *A(x)* adakah suatu matriks uniter *B(x)* yang similar dengan *A(x)* ?
2. Bagaimana mencari matriks nonsingular *S* sedemikian sehingga $S^{-1}A(x\ S$ $= B\ (x)$ merupakan matriks uniter ?

1.3 Urgensi Masalah

Matriks uniter merupakan salah satu jenis matriks yang memiliki beberapa keistimewaan, antara lain hasil kali dua matriks uniter adalah matriks suatu matriks uniter, invers suatu matriks uniter adalah suatu matriks uniter, matriks identitas merupakan matriks uniter dan nilai mutlak dari determinan suatu matriks uniter *U*, $|\det U| = 1$.

Sehingga jika dapat ditemukan suatu matriks nonsingular *S* sedemikian sehingga $S^{-1}A(x)\ S$ matriks uniter, dengan *A(x)* matriks representasi dari *G*, maka untuk sebarang matriks representasi *A(x)* pasti terdapat matriks uniter yang similar dengan *A(x)* dan merupakan matriks representasi dari *G*.

II. PEMBAHASAN

Misalkan *A(x)* matriks representasi dari grup berhingga *G*. Akan dicari matriks uniter *B(x)* yang similar dengan *A(x)*. Beberapa definisi dan teorema yang diperlukan untuk masalah tersebut antara lain sebagai berikut :

Definisi 2.1. (Nering, 1970).

Matriks A disebut ***normal*** *jika* $A\ A^* = A^*\ A$.

Beberapa contoh matriks normal antara lain matriks diagonal, matriks uniter, dan matriks hermite.

Teorema 2.2. (Nering, 1970).

Sebarang matriks A dapat didiagonalkan secara uniter jika dan hanya jika A matriks normal.

Setiap matriks hermite adalah matriks normal. Sehingga sebarang matriks hermite dapat didiagonalkan secara uniter. Dengan kata lain jika H matriks hermite maka pasti terdapat matriks uniter U sedemikian sehingga $U^{-1}HU = D$.

Prosedur untuk mendiagonalkan secara uniter suatu matriks hermite H adalah sebagai berikut:

1. Cari nilai-nilai eigen H.
2. Cari suatu basis ruang eigen dari setiap nilai eigen.
3. Terapkan proses gram-schmidt kesetiap basis untuk mendapatkan basis ortonormal setiap ruang eigen.
4. Bentuk matriks U yang kolom - kolomnya merupakan vektor – vektor basis yang dibangun dalam langkah 3. Matriks U akan mendiagonalisasi H secara uniter dan hasil digonalisasi H merupakan suatu matriks diagonal D dengan $d_{ii} = \lambda_i$, dengan λ_i nilai eigen ke-i dari H.

Misalkan $A(x)$ matriks representasi dari grup G. Dibentuk matriks H dengan

$$H = \sum_{x \in G} A(x)A(x)^* \qquad (2.1)$$

Matriks H merupakan matriks hermite sebab

$$H^* = \left(\sum_{x \in G} A(x)A(x)^* \right)^* = \sum_{x \in G} A(x)^{**} A(x)^* = \sum_{x \in G} A(x)A(x)^* = H$$

Sehingga terdapat matriks uniter U sedemikian sehingga $U^{-1}HU = D$ dengan D matriks diagonal. Entri diagonal D merupakan nilai eigen-nilai eigen H dan merupakan bilangan real positif. Entri diagonal D dapat ditulis sebagai

$$d_{jj} = \sum_{i} \sum_{k} u_{ji}^{-1} h_{ik} u_{kj} \qquad (2.2)$$

Dibentuk matriks $D^{\frac{1}{2}} = \left[d_{jj}\right]^{\frac{1}{2}}$ dengan $d_{jj}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{d_{jj}}$. Selanjutnya akan dicari hubungan antara *A(x)* , *U* dan *D*. Substitusikan $H = \sum_{x \in G} A(x)A(x)^*$ ke dalam persamaan $U^{-1}H\,U = D$.

$$U^{-1}\left(\sum_{x\in G} A(x)A(x)^*\right) U = D$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{x\in G} U^{-1}A(x)A(x)^*U = D$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{x\in G} U^{-1}A(x)\ (UU^{-1})\ A(x)^*U = D \qquad (2.3)$$

karena $U^{-1}A(x)^*U = (U^{-1}A(x)\,U)^*$

sehingga persamaan (2.3) menjadi

$$\sum_{x\in G} (U^{-1}A(x)U)\ (U^{-1}A(x)^*U)^* = D \qquad (2.4)$$

Jika $U^{-1}A(x)\,U = C(x)$ maka persamaan (2.4) menjadi $\sum_{x\in G} C(x)C(x)^* = D$ (2.5)

Didefinisikan $B(x) = D^{-\frac{1}{2}}C(x)D^{\frac{1}{2}}$, dengan $d_{jj}^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{d_{jj}}}$. Akan ditunjukkan *B(x)* similar dengan *A(x)*.

$$B(x) = D^{-\frac{1}{2}}\,(U^{-1}A(x)\,U)\,D^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad B(x) = (UD^{\frac{1}{2}})^{-1}A(x)\,(UD)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.6)$$

Jadi *B(x)* similar dengan *A(x)* . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *B(x)* matriks uniter , yaitu $B(x)\,B(x)^* = B(x)\,B(x)^{-1} = I$.

$$B(x)\,B(x)^* = B(x)\,B(x)^{-1} = (D^{-\frac{1}{2}}\,C(x)\,D^{\frac{1}{2}})\,(D^{-\frac{1}{2}}\,C(x)\,D^{\frac{1}{2}})^*$$

$$\Leftrightarrow \quad (D^{-\frac{1}{2}}\,C(x)\,D^{\frac{1}{2}})\ I\ (D^{\frac{1}{2}}\,C(x)^*\,D^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{sebab } (D^{\frac{1}{2}})^* = D^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (D^{-\frac{1}{2}}\,C(x)\,D^{\frac{1}{2}})\ (D^{-\frac{1}{2}}\,D\,D^{-\frac{1}{2}})\ (D^{\frac{1}{2}}\,C(x)^*\,D^{-\frac{1}{2}}) \qquad (2.7)$$

Karena $D^{\frac{1}{2}}\,D^{-\frac{1}{2}} = D^{-\frac{1}{2}}\,D^{\frac{1}{2}} = I$ dan $D = U^{-1}HU = U^{-1}\left(\sum_{x\in G} A(x)\,A(x)^*\right)U$

maka diperoleh

$$(D^{-\frac{1}{2}}C(x))\,U^{-1}\left(\sum_{x\in G} A(x)\,A(x)^*\right)U\,(C(x)^*\,D^{-\frac{1}{2}}) = B(x)\,B(x)^* \qquad (2.8)$$

karena $C(x) = U^{-1}A(x)\, U$ maka persamaan di atas menjadi

$$(D^{-\frac{1}{2}}U^{-1}\, A(x)\, U)\, U^{-1}\, (\sum_{x \in G} A(x)\, A(x)^{*}\,)\, U\, (\, U^{-1}A(x)^{*}\, U\ D^{-\frac{1}{2}}\ )$$

$$= \quad B(x)\, B(x)^{*}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\, D^{-\frac{1}{2}}\ U^{-1}\, A(x)\ \ )\ \sum_{x \in G} A(x)\, A(x)^{*}\ \ (\, A(x)^{*}\, U\ \ D^{-\frac{1}{2}}\ ) = B(x)\, B(x)^{*}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\, D^{-\frac{1}{2}}\ U^{-1})\quad \sum_{x \in G} A(x)\, A(x)\, A(x)^{*}\, A(x)^{*}\ \ (\, U\ \ D^{-\frac{1}{2}}\ ) = B(x)\, B(x)^{*}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\, D^{-\frac{1}{2}}\ U^{-1})\quad \sum_{x \in G} A(x^{2})\ \ A(x^{2})^{*}\ \ (\, U\ \ D^{-\frac{1}{2}}\ ) = B(x)\, B(x)^{*} \qquad (2.9)$$

Misalkan $y = x^{2}\ \ v\ \ G$ maka persamaan di atas menjadi

$$\Leftrightarrow \quad D^{-\frac{1}{2}}\ U^{-1}\quad \sum_{y \in G} A(y)\, A(y)^{*}\quad U\ \ D^{-\frac{1}{2}}\ = B(x)\, B(x)^{*}$$

$$\Leftrightarrow \quad D^{-\frac{1}{2}}\quad D\quad D^{-\frac{1}{2}}\ \ =\ \ B(x)\, B(x)^{*}$$

$$\Leftrightarrow \quad I\ =\ \ B(x)\, B(x)^{*} \qquad (2.10)$$

Jadi terbukti $B(x)$ matriks uniter.

Contoh:

Misalkan $G = \{e,\ a\}$ grup dengan matriks representasi $A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $A(a) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ maka terlihat bahwa matriks representasi ini bukan merupakan matriks uniter sebab $A(a)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq A(a)^{*}$. Sehingga akan dicari matriks representasi uniter yang similar dengan matriks representasi di atas.

Dibentuk matriks $H = \sum A(x)\, A(x)^{*}$.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Terlihat bahwa H matriks Hermite. Sehingga terdapat matriks uniter U sedemikian sehingga $U^{-1}\ H\ U = D$. Untuk mencari U digunakan langkah – langkah sebagai berikut :

1. Mencari nilai eigen H

$$\left| H - I\lambda \right| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0$$

Didapat persamaan karakteristik $5 - 5\lambda + \lambda^2 = 0$ dan akar – akar persamaan karakteristik (nilai eigen) H adalah $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ dan $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

.

2. Mencari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen H

(a). Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

$$[H - I\lambda]\ X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} x_1 - x_2 = 0$$

$$-x_1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} x_2 = 0$$

Diperoleh $x_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} x_2$. Ambil $x_2 = t$ dengan $t \neq 0$ sebagai parameter. Didapat vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t \quad , \ t \neq 0$$

(b). Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

$$[H - I\lambda]\ X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,x_1 \;-\; x_2 \;=\; 0$$

$$-x_1 \;+\; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,x_2 \;=0$$

Diperoleh $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} x_2$. Ambil $x_2 = s$ dengan $s \neq 0$ sebagai parameter.

Didapat vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} s \;,\; s \neq 0$$

3. Mencari basis ortonormal ruang eigen dari setiap nilai eigen.

(a). $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ adalah $X = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t \;,\; t \neq 0.$

Sehingga basis untuk ruang eigen dari λ_1 adalah $U_1 = \left\{ \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \;,\; 1 \right) \right\}$.

Dengan proses Gram-Schmidt basis ortonormal ruang eigen dari λ_1 adalah

$$W_1 = U_1$$

$$V_1 = \frac{1}{\|W_1\|}\; W_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+\sqrt{5}\;)^2+4}{4}}} \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \;,\; 1 \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \;,\; 1 \right)$$

$$= \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{2(5+\sqrt{5}\,)}} \;,\; \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} \right)$$

(b). $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

Vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_2 adalah $X = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} s \;,\; s \neq 0$.

Sehingga basis ruang eigen dari λ_2 adalah $U_2 = \left\{ \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \;,\; 1 \right) \right\}$.

Dengan proses Gram-Schmidt basis ortonormal ruang eigen dari λ_2 adalah

$$W_2 = U_2$$

$$V_2 = \frac{1}{\|W_2\|} W_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(-1+\sqrt{5})^2+4}{4}}} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \;,\; 1 \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \;,\; 1 \right)$$

$$= \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \;,\; \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \right)$$

Diperoleh matriks uniter U dengan kolom – kolomnya merupakan basis ortonormal ruang – ruang eigen di atas, yaitu

$$U = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \\ \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \end{bmatrix} \text{dan matriks } D = U^{-1}HU = \begin{bmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

$$U D^{1/2} = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \\ \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(U D^{1/2})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Akhirnya diperoleh matriks representasi uniter dari $G = \{ e , a \}$ sebagai berikut :

$B(e) = (UD^{1/2})^{-1} A(e) (UD^{1/2})$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$B(a) = (UD^{1/2})^{-1} B(a) (UD^{1/2})$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dapat diperiksa bahwa $B(x)$ uniter, yaitu $B(e)\ B(ex)^* = B(a)\ B(a)^* = I$.

III. Penutup

3.1 Kesimpulan

1. Jika $A(x)$ matriks representasi dari grup G maka terdapat matriks representasi uniter $B(x)$ yang similar dengan $A(x)$.
2. Untuk mencari $B(x)$ digunakan langkah – langkah sebagai berikut :
   a. Mencari $H = \sum A(x)\ A(x)^*$
   b. Mencari U (*gunakan prosedur untuk mendiagonalisasi matriks hermite*).
   c. Mencari $D^{1/2}$ dengan $D = U^{-1} H U$
   d. Mencari $U D^{1/2}$ dan inversnya
   e. $B(x) = (UD^{1/2})^{-1} A(x)(UD^{1/2})$

3.2. Saran

Beberapa masalah yang selanjutnya perlu dikaji adalah jika G grup berhingga, apakah matriks uniter berukuran $m \times m$ yang merupakan matriks representasi dari G juga berhingga ?

DAFTAR PUSTAKA

Ledermann, Walter. 1977. *Introduction to Group Characters.* Cambridge: Cambridge University Press.

Nering, Evar, D. 1970. *Linear Algebra and Matriks Theory Second Edition.* New York : John Wiley and Sons.

Nicholson, W, Keith. 2002. *Linear Algebra With Application Fourth Edition.* Singapore : McGraw-Hill Education.

Bilangan Ramsey Sisi Kombinasi Path dan Sikel

Oleh :
Triyani
Jurusan Matematika UNSOED, Purwokerto

Abstrak

Misal *F*, *G* dan *H* adalah graf hingga, terhubung dan sederhana.
Notasi $F \rightarrow (G, H)$ menyatakan bahwa setiap pewarnaan 2-warna (merah-biru) pada semua sisi di *F* mengakibatkan *F* memuat subgraf *G* merah atau memuat subgraf *H* biru. Himpunan semua graf *F* yang bersifat $F \rightarrow (G, H)$ dinotasikan dengan $\Omega(G, H)$ ditulis sebagai

$$\Omega(G,H) = \{F : F \rightarrow (G, H) \text{ dan } F - e \not\rightarrow (G, H)\}.$$

Teorema ramsey menjamin bahwa Ω(G,H) tidak kosong. Bilangan ramsey sisi $r(G, H)$ adalah banyaknya sisi minimum dari graf *F* yang bersifat $F \rightarrow$ *G*, *H*). Pada penelitian ini menghasilkan $W_{2n+1} \in \Omega(P_3, C_4)$ untuk $n \geq 1$; $K_5 - e \in \Omega(P_3, C_5)$ dan
$K_6 - 6e \in \Omega(P_3, C_6)$. Hal ini berakibat diperolehnya nilai eksak dari bilangan ramsey sisi kombinasi path dan sikel $r(P_3, C_n)$, untuk $4 \leq n \leq 6$.

Kata Kunci : Bilangan ramsey isi, pewarnaan 2-warna, path , sikel.

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema **" Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT "** yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

Syarat Cukup dan Perlu Elemen Gelanggang Merupakan Pembagi Nol Kiri maupun Kanan)(*RMnn*×

Oleh
K a r y a t i
R. Rosnawati

Abstrak

Himpunan matriks ordo atas gelanggang *nR* komutatif, yang selanjutnya dinotasikan dengan , membentuk struktur gelanggang terhadap operasi penjumlahan matriks dan operasi pergandaan matriks standar. ()*RMnn*×

Dengan memandang himpunan ()*RMnn*× sebagai gelanggang, dalam tulisan ini akan diselidiki syarat perlu dan cukup elemen ()*RMnn*× merupakan pembagi nol kiri maupun kanan jika *R* adalah gelanggang komutatif maupun daerah integral.

Diperoleh hasil bahwa: Jika *R* gelanggang komutatif, maka matriks merupakan pembagi nol kiri dalam jika dan hanya jika*A*)(*RMnn*×)()det(*RZA*∈, matriks merupakan pembagi nol kanan dalam jika dan hanya jika*A*)(*RMnn*×)()det(*RZA*∈, matriks merupakan pembagi nol kiri dalam jika dan hanya jika matriks merupakan pembagi nol kanan dalam . Selanjutnya, jika *A*)(*RMnn*×*A*)(*RMnn*×*R* adalah daerah integral, maka berlaku matriks merupakan pembagi nol kiri dalam jika dan hanya jika, matriks merupakan pembagi nol kanan dalam jika dan hanya jika*A*)(*RMnn*×*0A*=)det(*A*)(*RMnn*×*0A*=)det(.

Kata kunci: matriks atas gelanggang, pembagi nol kiri, pembagi nol kanan, pembagi nol.

Pendahuluan

1. Latar Belakang Masalah

Struktur gelanggang (*ring*) *R* adalah suatu himpunan *R* yang kepadanya didefinisikan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan pergandaan yang memenuhi aksiom-aksioma tertentu, yaitu: terhadap operasi penjumlahan membentuk grup abelian, terhadap operasi pergandaan membentuk struktur semigrup dan memenuhi sifat distributif kiri maupun kanan.

Himpunan matriks ordo atas gelanggang *nR* komutatif, yang selanjutnya dinotasikan dengan ()*RMnn*×, membentuk struktur gelanggang terhadap operasi penjumlahan matriks dan operasi pergandaan matriks standar.

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema " **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT** " yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

Dari kedua struktur gelanggang tersebut, banyak hal yang dapat dipelajari berkaitan dengan keduanya. Misalkan: adalah ideal dalam $RI\subseteq R$ jika dan hanya jika $()IMnn\times$ ideal dalam gelanggang $()RMnn\times$. Selain itu, dapat pula diperluas pengertian rank matriks atas lapangan ke rank matriks atas gelanggang beserta sifat-sifat rank matriksnya.

Terkait dengan suatu struktur gelanggang, dikenal suatu elemen spesifik, yang disebut elemen pembagi nol (*Zero Devisor*) kiri maupun kanan . Jika dan $Ra\in 0b\neq$ adalah elemen – elemen pada gelanggang R sedemikian sehingga , maka disebut pembagi nol kiri dan jika maka disebut pembagi nol kanan. Tidak semua struktur gelanggang mempunyai elemen tersebut. Oleh karena itu, dalam tulisan ini akan diselidiki syarat perlu dan cukup elemen-elemen gelanggang $0ab=a0ba=a()RMnn\times$ merupakan pembagi nol kiri (kanan) terkait dengan pembagi nol kiri (kanan) pada gelanggang komutatif R.

2. Landasan Teori

Untuk keperluan dalam penyelidikan syarat perlu dan cukup elemen gelanggang matriks merupakan pembagi nol kiri (kanan), maka perlu didukung definisi gelanggang (***ring***) sebagai berikut :

Definisi 1. (Adkins : p. 49) *Gelanggang (R,+,.) adalah suatu himpunan R bersama dengan dua operasi biner + : RxR→R (penjumlahan) dan . :RxR→R (pergandaan) yang memenuhi aksioma sebagai berikut:*

(a) (R,+) merupakan grup abelian

(b) a.(b.c) = (a.b).c (asosiatif)

(c) a.(b + c) = a.b + a.c dan (a + b).c = a.c + b.c (distributif kanan dan kiri)

Gelanggang R dikatakan komutatif, jika terhadap operasi pergandaannya bersifat komutatif, dan dikatakan mempunyai elemen satuan jika terdapat $1 \in R$ sedemikian sehingga $a.1=1.a=a$.. Suatu elemen $a \in R$ dikatakan mempunyai invers $b \in R$ jika berlaku $a.b=b.a=1$. Suatu gelanggang disebut lapangan (***field***) jika komutatif, mempunyai elemen satuan dan setiap elemen tak nolnya mempunyai invers.

Dalam mempelajari suatu struktur aljabar, senantiasa dipelajari suatu sub strukturnya, yang didefinisikan atas himpunan bagiannya. Dalam hal ini, diberikan definisi tentang sub gelanggang sebagai berikut:

Definisi 2 (Adkins : p. 51) *Misalkan S himpunan bagian dari gelanggang R, himpunan S dikatakan sub gelanggang dari R jika terhadap operasi biner yang sama pada R , S membentuk gelanggang.*

Berikut ini, juga diberikan suatu definisi tentang pembagi nol kiri, pembagi nol kanan dan pembagi nol yang akan menjadi pendukung dalam pembahasan utama dalam penelitian ini:

Definisi 3 (Brown:1) *Elemen* $a \in R$ *disebut :*

a. *pembagi nol kiri, jika terdapat elemen tak nol* $b \in R$ *sedemikian sehingga* $ab=0$

b. *pembagi nol kanan, jika terdapat elemen tak nol* $b \in R$ *sedemikian sehingga* $ba=0$

c. *pembagi nol, jika merupakan pembagi nol kanan sekaligus pembagi nol kiri* $a \in R$

Dalam tulisan ini diberikan, yang menotasikan himpunan semua elemen pembagi nol kiri maupun kanan . Jika)(*RZR* gelanggang komutatif, maka -nya merupakan himpunan pembagi nol)(

Berikut diberikan definis daerah integral, yaitu suatu struktur gelanggang yang mempunyai sifat khusus, yang selengkapnya diberikan pada definisi berikut:

Definisi 4 (Brown : 2) *Gelanggang R disebut Daerah Integral jika komutatif, memuat elemen satuan , .*)(*RZ*}{*0*=

Matriks yang entri-entrinya anggota suatu gelanggang, disebut matriks atas gelanggang, yang dinotasikan dengan $M_{nxn}(R)$. Dalam hal ini gelanggangnya adalah gelanggang komutatif

Teorema di atas berguna dalam menentukan determinan suatu matriks dengan menggunakan ekspansi kofaktor dari matriks yang bersagkutan. Selanjutnya diberikan sifat – sifat matriks atas gelanggang, terkait dengan determinannya:

Teorema 1. *Diberikan* $A=(a_{ij}) \in M_{nxn}(R)$, *maka A invertibel jika dan hanya jika det(A) adalah unit di R.*

Teorema berikutnya menyajikan sifat determinan yang lain, terkait dengan determinan matriks tranposenya:

Teorema 2. *Diberikan* $A=(a_{ij}) \in M_{nxn}(R)$, *maka*)det()det(*tAA*=

Teorema berikut memberikan sifat determinan suatu matriks terkait dengan rank matriksnya:

Teorema 3. *Misalkan ,*)(*RMAnn*×∈*nArank*<)(*jika dan hanya jika*)()det(*RZA*∈

Sistem persamaan linear (SPL), dengan setiap koefisien masing-masing variabel (termasuk nilai ruas kanan persamaan) merupakan elemen dari suatu gelanggang, dapat direpresentasikan dengan suatu matriks atas gelanggang. Teorema berikut menjamin adanya penyelesaian non trivial dari suatu SPL homogen :

Teorema 4. *Misalkan ,sistem persamaan linear homogen* $)(RMA_{nn\times}\in OAX=$ *mempunyai penyelesaian non trivial jika dan hanya jika* $nArank<)($.

Pembahasan

Dalam tulisan ini, yang dimaksud dengan gelanggang R adalah gelanggang komutatif. Himpunan semua matriks berukuran atas gelanggang komutatif $nn\times R$ dinotasikan dengan . Suatu matriks disebut pembagi nol kiri dalam jika untuk suatu matriks tak nol $)(RM_{nn\times}\in A)(RM_{nn\times})(RM_{nn\times}OAB=\in B)(RM_{nn\times}$. Secara sama, matriks $\in A)(RM_{nn\times}$ disebut pembagi nol kanan jika untuk suatu tak nol $OCA=\in C)(RM_{nn\times}$. Dalam kenyataannya suatu matriks dalam merupakan pembagi nol kiri jika dan hanya jika merupakan pembagi nol kanan. Hal ini sebagai akibat dari teorema yang selengkapnya diberikan sebagai berikut: $)(RM_{nn\times}$

Teorema 5. *Diberikan , maka berlaku :* $\in A)(RM_{nn\times}$

a. *Matriks merupakan pembagi nol kiri dalam jika dan hanya jika .*
   $A)(RM_{nn\times})()\det(RZA\in$

b. *Matriks merupakan pembagi nol kanan dalam jika dan hanya jika .*
   $A)(RM_{nn\times})()\det(RZA\in$

Bukti:

a. $)(\Leftarrow$

Jika , maka menurut sifat rank matriks atas gelanggang komutatif $)()\det(RZA\in R$ berakibat $nArank<)($. Terkait dengan penyelesaian sistem persamaan linear homogen dengan matriks koefisiennya atas gelanggang komutatif *R*, yaitu , kondisi tersebut berakibat SPL homogennya mempunyai penyelesaian non trivial. Dengan demikian 0AX=0A=ξ untuk suatu

diperoleh ()OBAABttt==, sehingga . Karena OABt=OB≠, maka . Dengan demikian matriks merupakan pembagi nol kanan pada . OBt≠A)(RMnn×

Cara lain:

)()det(RZA∈⇒)()det(RZAt∈

⇒tA pembagi nol kiri.

⇒BAtO=.

⇒()OBAABttt==

⇒OABt=, OBt≠

Jadi matriks merupakan pembagi nol kanan pada . A)(RMnn×

)(⇒

Diketahui pembagi nol kanan dalam , maka untuk suatu matriks tak nol A)(RMnn×OBA=∈B)(RMnn×. Karena OBA=, maka . Andaikan tttBABA=)(O=[]321tBξξξ...= dalam bentuk partisi kolom. Karena ∈tB)(RMnn× matriks tak nol, maka terdapat suatu kolom iξ yang bukan vektor nol di nR. Dari yang diketahui diperoleh [][]==nt2t1tttAAABAOξξξ..., akibatnya untuk setiap . Karena terdapat kolom 0Ait=ξn321i,...,,,=iξ yang bukan vektor nol di nR dan , maka SPL homogen mempunyai penyelesaian non trivial. Akibatnya , sehingga . Sesuai dengan sifat determinan, maka diperoleh sehingga

0Ait=ξ0XAt=nArankt<)()()det(RZAt∈)det()det(tAA=)()det(RZA∈

Cara lain:

A p.n kanan ⇒ untuk suatu $OBA=OB\neq$

⇒$tttBABA=)(O=$, $OBt\neq$

® tA pembagi nol kiri.

⇒ $)()\det(RZAt\in$

⇒ $)\det()\det(AAt=$

⇒ $)()\det(RZA\in$

Teorema berikut sebagai akibat dari Teorema 5 di atas, yang selengkapnya diberikan sebagai berikut:

Matriks pembagi nol kiri pada gelanggang jika dan hanya jika matriks pembagi nol kanan pada gelanggang . $\in A)(RM_{nn\times})(RM_{nn\times}\in A)(RM_{nn\times})(RM_{nn\times}$

Menurut Teorema 5.a diperoleh:

$A)(RM_{nn\times}$

$RM_{nn\times}$ pembagi nol kanan (menurut Teorema 5.b)

Daerah integral adalah merupakan gelanggang khusus, dimana selain bersifat komutatif dengan elemen satuan juga hanya memuat pembagi nolnya adalah nol saja. Berdasarkan sifat tersebut dan sebagai akibat dari Teorema 5 diperoleh teorema sebagai berikut:

Andaikan R adalah daerah integral dan $\in A)(RM_{nn\times}$, maka pembagi nol kiri jika dan hanya jika $A0A=)\det($

Diketahui R adalah daerah integral, maka R adalah gelanggang komutatif. Menurut Teorema 5 maka berlaku $\in A)(RM_{nn\times}$, maka pembagi nol kiri jika dan hanya jika . Karena $A)()\det(RZA\in R$ adalah daerah integral, maka pembagi nolnya adalah nol atau . Diketahui $\}\{)(0RZ=)()\det(RZA\in$ dan , maka . $\}\{)(0RZ=$

Teorema 8. *Andaikan R adalah daerah integral dan $\in A)(RM_{nn\times}$, maka pembagi nol kanan jika dan hanya jika $A0A=)\det($.*

Bukti:

Diketahui *R* adalah daerah integral, maka *R* adalah gelanggang komutatif. Menurut Teorema 6. pembagi nol kanan jika dan hanya jika pembagi nol kiri, dan menurut Teorema 7 berlaku jika dan hanya jika AA0A=)det(

KESIMPULAN

Berdasarkan pada pembahasan di atas, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Jika, dengan ∈A)(RMnn×R gelanggang komutatif , maka berlaku :
   a. Matriks merupakan pembagi nol kiri dalam jika dan hanya jika. A)(RMnn×)()det(RZA∈
   b. Matriks merupakan pembagi nol kanan dalam jika dan hanya jika . A)(RMnn×)()det(RZA∈
   c. Matriks merupakan pembagi nol kiri dalam jika dan hanya jika Matriks merupakan pembagi nol kanan dalam A)(RMnn×A)(RMnn×

2. Jika , dengan ∈A)(RMnn×R daerah integral , maka berlaku :
   a. Matriks merupakan pembagi nol kiri dalam jika dan hanya jika. A)(RMnn×0A=)det(
   b. Matriks merupakan pembagi nol kanan dalam jika dan hanya jika . A)(

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, Weintraub. 1992. *Algebra: An Approach via Module Theory*. Spinger – Verlag, New York.

Brown, W.C. 1992. *Matrices Over Commutative Rings*. Marcel Dekker, Inc, New York.

Simetrisasi Aljabar Max-Plus

Lutfina Sahroni[1], Fitria[2], Yeni Susanti[3]

[1, 2] Mahasiswa S1 Matematika FMIPA UGM

[3] Jurusan Matematika FMIPA UGM

Abstrak :

Aljabar max-plus merupakan aljabar yang dilengkapi operasi max $\oplus$ dan plus $\otimes$ dan berstruktur semifield idempoten.

Pada makalah ini dibahas simetrisasi aljabar max-plus beserta sifat-sifatnya.

Kata kunci : aljabar max-plus

Di dalam teori sistem persamaan linear atas aljabar max-plus tidak semua persamaan mempunyai penyelesaian. Oleh karena itu perlu pengkonstruksian struktur baru yang lebih luas daripada aljabar max-plus diantaranya dengan simetrisasi.

Yang dimaksud dengan aljabar max-plus $\Re_{max}$ adalah semifield idempoten $\Re_{\varepsilon}$ dengan operasi max $\oplus$ dan operasi plus $\otimes$ yang didefinisikan dengan :

babababa+=⊗=⊕},{Maks

dengan ε sebagai elemen netral.

Selanjutnya akan ditinjau struktur $\Re^2_{max}$. Untuk sebarang pasangan berurutan ()'",*xxx*=dan ()'",*yyy*= ∈2max$\Re$didefinisikan operasi biner sebagai berikut : dan ⊕⊗

))'"()"'(),""()"(()",'()",'()"",''()",'()",'(*yxyxyxyxyyxxyxyxyyxx*⊗⊕⊗⊗⊕⊗=⊗⊕⊕=⊕

Terhadap dua operasi $\oplus$ dan $\otimes$ tersebut, membentuk struktur dioid, yaitu memenuhi aksioma : 2max$\Re$

1. terhadap operasi $\oplus$
   a. bersifat asosiatif

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema “ **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT “** yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

b. bersifat komutatif

c. ada elemen netral ε

d. setiap elemennya idempoten, yaitu untuk setiap $a \in$ berlaku

$_{2\max}\Re$

$a \oplus a = a$

2. terhadap operasi $\otimes$

a. bersifat asosiatif

b. ada elemen identitas e sehingga untuk setiap $a \in$ berlaku

$_{2\max}\Re$

$aaeea = \otimes = \otimes$

c. bersifat menyerap yaitu untuk sebarang elemen $a \in$, $_{2\max}\Re$

$\varepsilon\varepsilon\varepsilon = \otimes = \otimes aa$

3. bersifat distributif tehadap operasi $\oplus$ dan $\otimes$, yaitu untuk setiap $a, b, c \in$, berlaku $_{2\max}\Re$

$)()()(cbcacba \otimes \oplus \otimes = \otimes \oplus$

Dapat ditunjukkan bahwa elemen $(\varepsilon,\varepsilon)$ merupakan elemen netral dan elemen (e,ε) merupakan elemen identitas di dalam . $_{2\max}\Re$

Selanjutnya, pada juga didefinisikan tanda minus Θ, harga mutlak $|\ \ |$, dan operator keseimbangan $_{2\max}\Re^{\bullet}$ sebagai berikut :

Untuk setiap di dalam , didefinisikan $\Theta x =$, $)'','(xxx = _{2\max}\Re)','' (xx'xxx = \oplus$ dan $x^{\bullet} = (),xx.$

Ketiga operasi tersebut mempunyai sifat-sifat sebagai berikut :

Sifat 1

1. $x^{\bullet} = (\Theta x)^{\bullet}$
2. $x^{\bullet\bullet} = x^{\bullet}$ (idempoten)

3. $x \otimes y^{\bullet} = (x \otimes y)^{\bullet}$ (menyerap)
4. $\ominus(\ominus x) = x$
5. $\ominus(x \oplus y) = (\ominus x) \oplus (\ominus y)$
6. $\ominus(x \otimes y) = \ominus x \otimes y$

Bukti :

1. $x^{\bullet}$ =(),*xx*= =)''',''''(*xxxx*⊕⊕)''',''''(*xxxx*⊕⊕=(Θ*x*) $^{\bullet}$

2. $x^{\bullet\bullet}$= •••|)||,(|*xx*==•⊕⊕⊕⊕⊕⊕))'''()'''(),'''()'''((*xxxxxxxx*)''',''''(*xxxx*⊕⊕

   = $x^{\bullet}$

3. $x \otimes y^{\bullet}$ = ⊗)'',''(*xx*•)'',''(*yy*

   =)))'''(''())'''('()),'''(''())'''('((*yyxyyxyyxyyx*⊕⊗⊕⊕⊗⊕⊗⊕⊕⊗=

)))''''()'''())'''()''()),''''()'''())'''()''((*yxyxyxyxyxyxyxyx*⊗⊕⊗⊕⊗⊕⊗⊗⊕⊗⊕⊕⊕⊗=

•⊗⊕⊗⊗⊕⊗))'''()'''(),''''()''((*yxyxyxyx* = •⊗)(*yx*

4. Jelas dari definisi.

5. $\ominus(x \oplus y)$ = Θ)'''',''(*yxyx*⊕⊕ =)'',''''(*yxyx*⊕⊕= $(\ominus x) \oplus (\ominus y)$

6. $\ominus(x \otimes y)$ = Θ))'''()'''(),''''()''((*yxyxyxyx*⊗⊕⊗⊗⊕⊗

   =)'','()',''())''''()''(),'''()'''((*yyxxyxyxyxyx*⊗=⊗⊕⊗⊗⊕⊗

   = $\ominus x \otimes y$

Selanjutnya, berikut ini didefinisikan relasi R yang merupakan relasi ekuivalensi.

Definisi 2

Pada didefinisikan relasi R sebagai berikut : 2maxℜ

()()()()''''''''''''''''''''''jikadan,,,,untuklainnya.*yyyxxxxRyyxxyyxx*⎩⊕=⊕≠≠⎨⇔⎧=⎨⎩

Dari definisi 2 tersebut, dapat dipahami bahwa untuk sebarang dengan dan)'','(),'',''(*yyxx*)'',''(R)'',''(*yyxxxx*≠ serta *yy*≠, terdapat dua kemungkinan yaitu :

1. Jika"''$xyx=\oplus$ maka"''$yyx=\oplus$, sebab'''$xx\neq$.

Akibatnya jikamaka "''$xxx=\oplus$"$yx=$

2. Jika"''$yyx=\oplus$maka"''$xyx=\oplus$, sebab'''$yy\neq$.

Akibatnya, jika "''$xxx=\oplus$maka"''$yx=$

Dengan menggunakan fakta di atas, dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa R merupakan relasi ekuivalensi serta dengan mudah pula dapat ditentukan kelas-kelas ekuivalensinya.

Dari fakta tersebut di atas, dapat ditunjukkan bahwa ada 3 kelas ekuivalensi yaitu :

1. $()()\{\}$'''',,$ttxx-\infty=<$ yang selanjutnya disebut elemen positif ;
2. $()()\{\}$'',,$ttxx-\infty=<$ yang selanjutnya disebut elemen negatif ;
3. $()()\{\}$,,$tttt=$ yang selanjutnya disebut elemen keseimbangan .

Definisi 3

Aljabar R2max$\Re$ *disebut aljabar simetris dan dilambangkan dengan S.*

Dengan menghubungkan $($,$t-\infty$ dengan $t\in\Re_{max}$ dapat diidentifikasi struktur baru dari $\Re_{max}$. Perhatikan pendefinisian berikut :

Himpunan kelas positif atau nol dinotasikan dengan , himpunan kelas negatif atau nol (dari bentuk Θx untuk $S\oplus xS\oplus\in$yaitu $()$''',xx) dinotasikan dengan S^{Θ}, himpunan kelas keseimbangan (elemen dengan bentuk (x,x)) dinotasikan dengan $S^{\bullet}$dan himpunan nol didefinisikan dengan $()$,$-\infty-\infty$.

Selanjutnya, pada S didefinisikan operasi penjumlahan dan pergandaan sebagai berikut :

$$()()(),,,abcdabcd\oplus=\oplus\oplus$$

$$()()()()((()),,,abcdacbdadbc\otimes=\otimes\oplus\otimes\otimes\oplus\otimes$$

Dapat ditunjukkan bahwa dua operasi tersebut well-defined.

Sifat 4

1. *merupakan semifield .* $S_\oplus$
2. $S^\ominus$ *tidak stabil terhadap operasi pergandaan dan bukan merupakan semifield.* 3. $S^\bullet$ *isomorfis terhadap* $\Re_{\max}$.

Bukti :

1. Bukti bahwasemifield dapat diturunkan secara analog dengan menggunakan aksioma-aksioma pada $\Re S_{\oplus_{\max}}$.
2. $S^\ominus$ tidak stabil pada operasi pergandaan

Ambil sebarang),(,),(${}_{2211}txtx-\infty=-\infty=$ $\in$ $S^\ominus$ diperoleh :

$${}_{121221}(,)(,)(()(),()()ttttt-\infty\otimes-\infty=-\infty\otimes-\infty\oplus\otimes-\infty\otimes\oplus-\infty\otimes$$

$$()()_{12}(),tt=-\infty\oplus\otimes-\infty\oplus-\infty$$

$${}_{12}(,tt=\otimes-\infty \notin S^\ominus$$

Jadi, $S^\ominus$ tidak stabil pada operasi pergandaan. Dengan demikian, himpunan $S^\ominus$ bukan merupakan semifield.

3. $S^\bullet$ isomorfis terhadap $\Re_{\max}$.

Akan ditunjukkan terdapat homomorphisma yang bijektif dari $S^\bullet$ ke $\Re_{\max}$.

Bentuk pemetaan $f : S^\bullet \rightarrow \Re_{\max}$ dengan $f(x^\bullet) = x$ atau dengan kata lain $()$,*fxxx*=. Akan ditunjukkan :

i) f homomorphisma

Ambil sebarang $x^{\bullet}$, $y^{\bullet} \in S^{\bullet}$.

Akan dibuktikan : a). $f(x^{\bullet} \oplus y^{\bullet}) = f(x^{\bullet}) \oplus f(y^{\bullet})$

b). $f(x^{\bullet} \otimes y^{\bullet}) = f(x_1^{\bullet}) \otimes f(y^{\bullet})$

Misalkan maka diperoleh),(dan),(*yyyxxx*==

•⊕=⊕⊕=⊕=•⊕•)(),(),(),(x*yxyxyxyyxxy*

dan

•⊗=⊗⊗=⊗⊕⊗⊗⊕⊗=⊗=•⊗•)(),())()(),()((),(),(x*yxyxyxyxyxyxyxyyxxy*

sehingga

)()())(()(•⊕•=⊕=•⊕=•⊕•*yfxfyxyxfyxf*

dan

εεεε==)),(()(*ff*.

Selain itu juga diperoleh

)()())(()(•⊗•=⊗=•⊗=•⊗•*yfxfyxyxfyxf*

dan

eeefef==)),(()(

Jadi f homomorphisma.

ii) f *s*urjektif

Ambil sebarang y ∈ℜ$_{max}$. Akan dibuktikan ada •*x*sehingga .

Dengan mengambil , diperoleh *yxf*=•)(),(*yyx*=•*yxf*=•)(

Jadi, f Surjektif

iii) f injektif

Ambil sebarang •∈=•=•S),(dan),(*yyyxxx*dengan)()(•=•*yfxf*

Akan dibuktikan •=•*yx*. Karena

)()(•=•*yfxf*

maka

$)),(()),((yyfxxf=$

$yx=\Leftrightarrow$

$),(),(yyxx=\Leftrightarrow$

$\bullet=\bullet\Leftrightarrow yx$

Jadi, f injektif. Dengan demikian, dari poin i) sampai iii) dapat disimpulkan bahwa f isomorfisma.

Gabungan dari , $S_\oplus S^\ominus$ dan $S^\bullet$ adalah himpunan S atau dapat ditulis . Elemen ε adalah satu-satunya elemen yang berada dalam irisan ketiga himpunan tersebut. Hal ini dapat dimengerti sebab misalkan , berarti $\bullet\oplus\cup\cup=SSSS_{\theta}\bullet\oplus\cap\cap=\in SSSSx_{\theta}xS_{\oplus}\in$; $xS\in$ dan $xS_{\bullet}\in$.

$\oplus\in Sx$ artinya $(,xt=-\infty$……………………………………(i)

$_{\theta}Sx\in$ artinya $(),xt=-\infty$…………………………………..(ii)

artinya $\bullet\in Sx(),xtt=$ ……………………………………..(iii)

Dari (i),(ii),dan (iii) maka yang memenuhi ketiganya adalah $(),x=-\infty-\infty\varepsilon=$

Definisi 5

Untuk sebarang dengan $Syx\in,),(-\infty=xx$ dan $),(-\infty=yy,$ $x',y'\in,$ *didefinisikan operasi* Θ *sebagai berikut :* $_{\max}\Re$

$x\Theta y$ = $),(),(yx-\infty\oplus-\infty$

Terhadap operasi tersebut, memiliki sifat sebagai berikut $_{\max}\Re$

Sifat 6

Untuk sebarang dengan $Syx\in,),(-\infty=xx$ dan $),(-\infty=yy,$ $x',y'\in,$ *berlaku* : $_{\max}\Re$

1. " jika$\theta yxxyx>=$
2. " jika$\theta xyyyx>=\theta$

3. $\bullet = xxx\theta$

Bukti :

1. Ambil sebarang dengan $Syx\in,),(-\infty=xx$ dan $),(-\infty=yy,\ x',y'\in$ dengan , diperoleh $_{\max}\Re''yx>$

$x\Theta y\ =\ )',(),'(yx-\infty+-\infty$

$=)','(yx\ =\ ),'(-\infty x=\ x$

2. Ambil sebarang dengan $Syx\in,),(-\infty=xx$ dan $),(-\infty=yy,\ x',y'\in$ dengan , diperoleh $_{\max}\Re''xy>$

$x\Theta y\ =\ )',(),'(yx-\infty+-\infty$

$=)','(yx$

$=\ )',(y-\infty$

$=\ ),'(\theta-\infty y$

$=\ y\theta$

3. Jelas dari definisi operator $\bullet$.

Referensi :

Bacceli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., Quadrat, J.P., 1992, *Synchronization and Linearity*, Jon Wiley and Sons

Etika Berkomunikasi di Dunia Maya dengan *Netiquette*

Oleh :
Nur Hadi W
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
nurhadiw@gmail.com

Abstrak

Sebagai mahluk sosial pelaku internet memiliki kode etik universal sebagai acuan dalam menjaga perilaku dan kehormatan dalam pergaulan komunitas dunia maya. Setiap lingkungan punya nilai etika tersendiri dan tidak ada nilai baku yang berlaku identik, tiap orang dapat memiliki interprestasi yang berbeda terhadap prinsip yang disepakati.

Pada dasarnya *netiquette* merupakan panduan untuk bersikap dan berperilaku sesuai dengan kaidah normatif di lingkungan Internet. Dengan mematuhi peraturan ini, maka akan sangat bermanfaat dan membantu dalam berkomunikasi dan berinteraksi dengan orang lain tanpa harus mengalami masalah atau tanpa harus mengalami salah pengertian dengan orang lain

Secara umum siapapun yang merasa menjadi bagian dari suatu komunitas di internet wajib untuk mematuhi kode etik yang berlaku di lingkungan tersebut. Sebenarnya *netiquette* adalah hal yang umum dan biasa, sama halnya dengan aturan-aturan biasa ketika kita memasuki komunitas umum dimana informasi sangat banyak dan terbuka

Kata kunci : etika komunikasi, *Netiquette*

Pendahuluan

Internet telah berhasil membentuk komunitas masyarakat tersendiri yang sesama anggotanya bisa jadi tidak pernah bertemu secara fisik Hadirnya berbagai fasilitas di Internet semakin memudahkan interaksi antara masing-masing anggota masyarakat. Fasilitas komunikasi One-to-One seperti e-mail dan talk memungkinkan terjalinnya komunikasi antara dua pihak dengan cepat dan biaya yang lebih murah jika dibandingkan dengan surat biasa. Fasilitas komunikasi One-to-Many seperti mailing lists memungkinkan sekelompok anggota masyarakat Internet untuk berdiskusi dan saling tukar pendapat diantara mereka dengan mudah.

Di masa lalu, populasi pengguna Internet terbatas pada orang-orang teknis yang ikut tumbuh bersama dengan Internet. Mereka mengerti sekali akan keterbatasan-keterbatasan yang ada dan aturan protokoler yang berlaku. Meskipun aturan dan budaya yang ada tidak dituliskan secara formal seperti layaknya Kitab Undang-Undang Hukum Perdata (KUHP) tetapi para pengguna Internet waktu itu sadar akan protokoler yang perlu dipenuhi agar fasilitas di Internet tetap berjalan lancar. Protokoler tersebut tercipta dan akan semakin bertambah seiring dengan makin beragamnya fasilitas yang tersedia di Internet.

Seperti layaknya sebuah negara yang punya masyarakat yang beragam, tentunya ada anggota masyarakat yang baik dan ada juga anggota masyarakat yang suka iseng.

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema **“ Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT “** yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

Salah satu keisengan yang sering kita jumpai adalah pengiriman surat berantai, iklan yang tidak sesuai dengan konteks, provokasi ke diskusi yang tidak sehat, materi yang menyinggung orang lain atau yang lebih ekstrim adalah penyisipan virus atau worm secara sengaja dalam e-mail yang dikirimkan.

Ketidak-sadaran akan adanya etika tidak tertulis dalam ber-Internet dan kekurang-dewasaan dalam penggunaan email, chatting, dan mailing list dapat menyeret para penggunanya kepada situasi yang tidak sehat jika salah satu pihak tidak mengerti budaya di Internet. Para 'Newbies' perlu diberikan petunjuk yang dapat memberikan pengertian secara cepat kepada mereka tentang budaya Internet.

Untungnya, petunjuk itu telah dibukukan oleh sebuah kelompok kerja yang diberi nama Responsible Use of the Network (RUN) Working Group yang merupakan bagian dari The Internet Engineering Task Force (www.ietf.org) dan telah dimasukkan dalam dokumen RFC yaitu RFC1855. Petunjuk itu dikenal dengan nama *Netiquette* atau yang diterjemahkan dalam bahasa Indonesia menjadi Netiket.

Netiket

Terdapat beberapa definisi tentang *netiquette*, yaitu :

a. Etika dalam menggunakan Internet
b. Aturan-aturan/kebiasaan/etika/etiket umum yg berlaku di seluruh dunia, sehingga para pelaku internet dapat dengan nyaman dalam berinteraksi di dunia maya ini

Aslinya dua kata yang dijadikan satu, yakni *networks* dan *etiquette*. Sebelum internet lahir, kata *netiquette* tentu belum ada. Orang mengartikan sebagai berperilaku sesuai etiket saat tersambung ke jaringan internet, entah itu saat berinteraksi di forum, *mailing list*, maupun blog. Di dalam internet tidak ada aturan tertulis yang baku dan memiliki kekuatan legal yang dapat dipakai sebagai acuan untuk memperlakukan dan mensikapi arus informasi dan data di dalamnya.

Sebagai mahluk sosial pelaku internet memiliki kode etik universal sebagai acuan dalam menjaga perilaku dan kehormatan dalam pergaulan komunitas dunia maya. Setiap lingkungan punya nilai etika tersendiri dan tidak ada nilai baku yang berlaku identik, tiap orang dapat memiliki interprestasi yang berbeda terhadap prinsip yang disepakati. Karena itu siapapun bebas untuk mematuhi peraturan yang sesuai dengan dirinya dan yang tidak menyetujui bebas memilih untuk tetap berada di sana sebagai minoritas atau keluar dari lingkungan tersebut.

Dalam kasus tertentu pelanggaran etika dapat diajukan ke pengadilan melalui mekanisme hukum positif yang berlaku pada diri seseorang (warga negara) maupun lembaga/organisasi. Yang paling sering terjadi tuntutan hukum adalah menyangkut soal pelanggaran Hak Cipta, Hak *Privacy* dan serangan illegal (*Spamming*, *Pirating*, *Cracking* dan sejenisnya) terhadap suatu produk, perseorangan maupun institusi yang dilindungi hukum positif secara internasional.

Secara umum siapapun yang merasa menjadi bagian dari suatu komunitas di internet wajib untuk mematuhi kode etik yang berlaku di lingkungan tersebut.

Sebenarnya *netiquette* adalah hal yang umum dan biasa, sama halnya dengan aturan-aturan biasa ketika kita memasuki komunitas umum dimana informasi sangat banyak dan terbuka.

Pada dasarnya *netiquette* merupakan panduan untuk bersikap dan berperilaku sesuai dengan kaidah normatif di lingkungan Internet. Dengan mematuhi peraturan ini, maka akan sangat bermanfaat dan membantu dalam berkomunikasi dan berinteraksi dengan orang lain tanpa harus mengalami masalah atau tanpa harus mengalami salah pengertian dengan orang lain.

Karakteristik Dunia Maya

Internet identik dengan cyberspace atau dunia maya. Dysson (1994) cyberscape merupakan suatu ekosistem bioelektronik di semua tempat yang memiliki telepon, kabel coaxial, fiber optik atau elektomagnetik waves. Hal ini berarti bahwa tidak ada yang tahu pasti seberapa luas internet secara fisik.

Karakteristik dunia maya (Dysson:1994) sebagai berikut:

a. Beroperasi secara virtual/maya
b. Dunia cyber selalu berubah dengan cepat
c. Dunia maya tidak mengenal batas-batas teritorial
d. Orang-orang yang hidup dalam dunia maya tersebut dapat melaksanakan aktivitas tanpa harusmenunjukkan identitasnya

e. nformasi di dalamnya bersifat publik

Pentingnya Etika di Dunia Maya

Hadirnya internet dalam kehidupan manusia telah membentuk komunitas masyarakat tersendiri. Suratmenyurat yang dahulu dilakukan secara tradisional (merpati pos atau kantor pos) sekarang bisa dilakukan hanya dengan duduk dan mengetik surat tersebut di depan komputer.

Beberapa alasan mengenai pentingnya etika dalam dunia maya adalah sebagai berikut:

a. Bahwa pengguna internet berasal dari berbagai negara yang mungkin memiliki budaya, bahasa dan adat istiadat yang berbeda- beda.
b. Pengguna internet merupakan orang–orang yang hidup dalam dunia anonymouse, yang tidak mengharuskan pernyataan identitas asli dalam berinteraksi.
c. Pengguna internet merupakan orang–orang yang hidup dalam dunia anonymouse, yang
d. tidak mengharuskan pernyataan identitas asli dalam berinteraksi.
e. erbagai macam fasilitas yang diberikan dalam internet memungkinkan seseorang untuk bertindak etis seperti misalnya ada juga penghuni yang suka iseng dengan melakukan hal – hal yang tidak seharusnya dilakukan.
f. Harus diperhatikan bahwa pengguna internet akan selalu bertambah setiap saat dan memungkinkan masuknya "penghuni" baru di dunia maya tersebut.

Isu-isu Pokok Etika Komputer

Terdapat beberapa isu pokok etika komputer, diantaranya :

a. Kejahatan Komputer Kejahatan yang dilakukan dengan komputer sebagai basis teknologinya Virus, spam, penyadapan, carding, Denial of Services (DoS)/melumpuhkan target
b. Cyber ethics Implikasi dari INTERNET (Interconection Networking), memungkinkan pengguna IT semakin meluas, tak terpetakan, tak teridentifikasi dalam dunia nonymouse.
c. Diperlukan adanya aturan tak tertulis Netiket, Emoticon
d. E-commerce Otomatiasi bisnis dengan internet dan layanannya, mengubah bisnis proses yang telah ada dari transaksi konvensional kepada yang berbasis teknologi,

melahirkan implikasi negatif; bermacam kejahatan, penipuan, kerugian karena ke-anonymouse-an tadi.

e. Pelanggaran HAKI Masalah pengakuan hak atas kekayaan intelektual. Pembajakan, cracking, illegal software dst.
f. Tanggungjawab profesi Sebagai bentuk tanggungjawab moral, perlu diciptakan ruang bagi komunitas yang akan saling menghormati.

Aturan Inti Netiket

Beberapa aturan yang ada pada Netiquete ini adalah:

1. Amankan dulu diri anda, maksudnya adalah amankan semua properti, mungkin dapat dimulai dari mengamankan komputer, dengan memasang anti virus atau personal firewall
2. Jangan terlalu mudah percaya dengan Internet, sehingga dengan mudah mengupload data pribadi
3. Menghargai pengguna lain di internet, caranya sederhana, yaitu :
   a. jangan membiasakan menggunakan informasi secara sembarangan, misalnya plagiat.
   b. jangan berusaha untuk mengambil keuntungan secara ilegal dari Internet, misalnya melakukan kejahatan pencurian no kartu kredit
   c. jangan berusaha mengganggu privasi orang lain, dengan mencoba mencuri informasi yang sebenarnya terbatas.
   d. jangan menggunakan huruf kapital terlalu banyak, karena menyerupai kegiatan teriak-teriak pada komunitas sesungguhnya.

Pada dasarnya *netiquette* merupakan panduan untuk bersikap dan berperilaku sesuai dengan kaidah normatif di lingkungan Internet. Dengan mematuhi peraturan ini, maka akan sangat bermanfaat dan membantu dalam berkomunikasi dan berinteraksi dengan orang lain tanpa harus mengalami masalah atau tanpa harus mengalami salah pengertian dengan orang lain.

Aturan Inti *Netiquette* :

1. Kita semua manusia, bahkan saat berada di Internet sekalipun.

Jangan pernah lupa bahwa orang yang sedang membaca e-mail atau posting adalah manusia dengan perasaan yang bisa saja terluka. Diharapkan untuk tidak mengirim komentar yang bernada menyerang tapi bersikaplah saling membangun.

Jangan pernah mengetik isi pesan dengan menggunakan huruf besar semua, meskipun itu hanya pesan singkat, balasan ke suatu posting di forum, atau di dalam sebuah e-mail. Dengan menulis pesan menggunakan huruf besar semua, sama artinya sedang berteriak

Jangan pernah mengirim e-mail atau mengirim posting apapun yang tidak layak untuk disampaikan ke orang lain. Ingatkan orang lain jika melakukan flaming. Flaming adalah ketika seseorang atau sekelompok orang mengekspresikan hal-hal negatif mengenai situasi tertentu. Alasan untuk mengingatkan orang yang melakukan hal ini adalah karena beberapa orang mungkin tidak tahu jika orang tersebut sedang melakukan flaming.

2. Ikuti aturan seperti di kehidupan nyata saat online.

   Bersikap dan bertindak dengan selalu memperhatikan etika, dan jangan buru-buru menyimpulkan sesuatu. Orang yang sedang berada di Internet datang dari berbagai penjuru dunia dan memiliki perbedaan pandangan terhadap sesuatu.

3. Ingatlah di mana berada ketika sedang online.

   Netiquette bervariasi dari satu tempat ke tempat yang lain. Tidak semua orang mengikuti aturan yang sama. Jadi, diharapka selalu bersikap terbuka dan jika dibutuhkan, bersikap kritis tapi tetap konstruktif (membangun), dan bukan bersikap sebaliknya (negatif). Jika berada di suatu wilayah topik pembicaraan pada forum atau chating, jangan buru-buru langsung mengirim komentar, tetapi mencoba untuk menangkap ide dari apa yang sedang terjadi atau sedang dibahas. Posting yang terlalu dini dapat berpotensi menyebabkan flaming.

4. Hormatilah orang lain ketika Anda sedang online.

   Posting dikirimkan group yang sesuai. Jika tidak dapat menemukan group yang sesuai dengan itu dan merasa bahwa posting itu harus dikirim, yakinkan bahwa Subject dari posting sesuai dengan isi posting, sehingga orang lain tahu bahwa posting tidak mengganggu topik diskusi saat itu.

Sedangkan menurut Shea (1994) aturan netiket adalah sebagai berikut :

1. Mengingat bahwa netter adalah manusia

   Jaringan Komputer mempertemukan orang-orang yang tidak akan pernah bertemu tanpa jaringan itu

2. Mentaati standar-standar tingkah laku seperti yang dilakukan dalam kehidupan yang nyata.

   Dalam kehidupan nyata, kebanyakan orang cukup taat hukum, apakah karena wataknya begitu atau karena takut tertangkap. Dalam cyberspace, kemungkinan untuk tertangkap kadang-kadang kelihatannya sangat kecil. Dan, mungkin karena orang kadang-kadang lupa bahwa ada seorang manusia berada di tempat lain dengan sebuah komputer, ada orang berpikir bahwa dalam cyberspace tidak apa-apa kalau kita hanya menerapkan etika atau tingkah laku pribadi dengan standar yang rendah.

3. Mengetahui di mana netter berada dalam cyberspace

   Netiket berbeda dari satu domain ke domain lainnya. Dan karena Netiket berbeda dari satu tempat ke tempat lainnya, penting untuk diketahui di mana anda berada

4. Menghormati waktu dan bandwidth orang lain

   Istilah "bandwidth" kadang-kadang digunakan sebagai sinonim untuk waktu, tetapi sebetulnya kedua kata itu berbeda. Bandwidth adalah kapasitas kabel dan saluran pembawa informasi yang menghubungkan kita satu dengan yang lainnya di cyberspace. Ada keterbatasan jumlah data yang dapat dibawa oleh selembar kabel pada suatu saat tertentu, bahkan kabel optik state of the art sekalipun. Istilah "bandwidth" sering juga digunakan untuk menggambarkan kapasitas tampungan sebuah sistem host

5. Bersikap baik saat online

   Seperti halnya di dunia pada umumnya, kebanyakan orang yang berkomunikasi hanya ingin disukai. Jaringan, terutama kelompok diskusi membuat user menjangkau orang-orang yang tidak mungkin user temui tanpanya, tetapi tidak ada seorangpun dari mereka yang dapat melihat user. Ketika sedang online user tidak akan dinilai dari warna kulit, mata atau rambut, berat badan, umur atau pakaian, tetapi akan dinilai dari kualitas tulisan anda.

6. Berbagi pengetahuan dengan yang ahli

Berbagi pengetahuan itu menyenangkan. Ini adalah tradisi ‘net’ untuk waktu yang lama, dan ia dapat membuat dunia menjadi tempat yang lebih baik

7. membantu mengendalikan perang flame (flame wars)

   "Flaming" adalah apa yang dilakukan netter ketika mereka ungkapkan sebuah opini yang diyakini dengan kuat tanpa menahan emosi. Ini adalah jenis pesan yang membuat orang memberi respons. Flaming adalah sebuah tradisi yang sudah bertahan lama (dan Netiket tidak pernah bercampur aduk dengan tradisi). Flames bisa menjadi sangat menyenangkan, baik untuk ditulis maupun untuk dibaca.
8. Menghormatiprivasi orang lain

   Tidak menghormati privasi orang lain, bukan saja merupakan Netiket yang buruk; tetapi kredibilitas netter juga dapat dipertaruhkan
9. Jangan salah gunakan wewenang anda

   Mengetahui sesuatu lebih banyak dari orang lain, atau mempunyai kuasa lebih dari mereka tidak memberikan kepada anda hak untuk memanfaatkan mereka
10. Memaafkan kesalahan orang lain

Sebuah millis atau forum menurut Suryaningsih (2006) juga mempunyai aturan-aturan, diantaranya :

1. Jangan menggunakan huruf kapital

   penggunaan karakter huruf bisa dianalogikan dengan suasana hati si penulis. Huruf kapital mencerminkan penulis yang sedang emosi, marah atau berteriak.
2. Mengutip Seperlunya.

   Ketika peserta forum ingin memberi tanggapan terhadap postingan seseorang dalam satu forum, maka sebaiknya bagian yang dikutip adalah bagian terpentingnya saja yang merupakan inti dari hal yang ingin ditanggapi dan buang bagian yang tidak perlu. Jangan sekali-kali mengutip seluruh isinya karena itu bisa membebani bandwith server yang bersangkutan dan bisa berakibat kecepatan akses ke forum tersebut menjadi terganggu.
3. Perlakuan Terhadap Pesan Pribadi

   Jika seseorang mengirim informasi atau gagasan kepada anda secara pribadi (private message),anggota forum tidak sepatutnya mengirim/menjawabnya kembali ke dalam forum umum, kelompok grup, atau milis.

4. Hati-hati Dalam Mem-forward

   Tidak semua berita yang beredar di internet itu benar adanya. Sebelum mem-forward pastikanlah terlebih dahulu bahwa informasi yang ingin anda kirim itu adalah benar adanya.

5. Jangan Menggunakan "CC"

   Ketika mengirim e-mail ke sejumlah orang, jangan cantumkan nama-nama pada kolom "CC". Jika anggota forum melakukan hal itu –biasa disebut cross posting–, semua orang yang menerima e-mail tersebut , akan bisa melihat alamat-alamat e-mail orang lain. Umumnya orang tidak suka bila alamat e-mailnya dibeberkan di depan umum. Gunakanlah selalu "BCC". Dengan cara ini setiap orang hanya bisa melihat alamat e- mailnya sendiri.

6. Menghindari Menggunakan Format HTML

   Jika anggota forum mengirim sebuah pesan penting ke angrgota yang lain, jangan gunakan format HTML tanpa yakin bahwa program e-mail anggota forum tersebut bisa membaca kode HTML. Sebaliknya, format yang digunakan adalah format plain text.

7. Menghindari Mengirim File (berukuran besar) Melalui Attachment

   Peraturan e-mail secara internasional melarang transfer file melalui e-mail, apalagi di dalam milis. Pada umumnya penyedia jasa internet (ISP) di Indonesia 'hanya' memberi quota space 2-5 MB. Pengiriman file yang besar, akan membuat proses downloading menjadi lamban,

8. Ketika 'Harus' Menyimpang Dari Topik

   Tiap milis/forum tentu memiliki peraturan khusus mengenai obyek bahasan yang diperkenankan. Sehingga tatkala anggota forum ingin menyampaikan/meminta sebuah informasi di luar topik yang telah ditentukan, sepatutnya disertakan pula tanda khusus pada kolom subyek e-mail anggota milis yang lain tidak terkecoh dengan isi e-mail tersebut .

9. Menghindari Personal Attack

   Ketika berada dalam situasi debat yang sengit, jangan menjadikan kelemahan pribadi lawan sebagai senjata untuk melawan argumentasinya.

10. Kritik dan Saran yang Bersifat Pribadi Harus Lewat PM (Personal Message)

Bila kritik dan saran itu ditujukan untuk anggota forum secara umum atau pihak moderator dalam rangka perbaikan sistem forum, anggoata forum boleh mempostingnya di dalam forum selama tidak menunjuk orang per orang tertentu.

11. Jujur Dalam Mencantumkan Sumber dan/atau Penulis
12. Bijak Ketika Hendak Meng-copy Sebuah Situs

Etika Bertanya Dalam Sebuah Forum

Suryaningsih (2010) mengemukakan bahwa terdapat aturan-aturan yang perlu diperhatikan bagi anggota sebuah forum atau millis, yaitu :

1. Menggunakan bahasa yang sopan.
2. Jangan mengasumsikan bahwa setiap anggota forum berhak mendapatkan jawaban.
3. Memberi judul yang sesuai dan deskriptif.
4. Menjelaskan masalah secara detil berikut dengan data yang ada.

   INGAT bahwa para pakar di forum tersebut tidak bisa mengakses komputer anda, jadi sumber informasi mereka hanya dari tulisan anda saja. Maka buatlah tulisan tersebut selengkap dan sedetail mungkin.
5. Membuat agar e-mail informatif dan tidak asal panjang lebar.

   melampirkan data-data yang tidak relevan sehingga membuat e-mail menjadi sangat panjang justru akan membuat para pakar merasa segan untuk menjawab email
6. Menulis pertanyaan dengan bahasa Indonesia yang baik dan benar.

   Penulisan pertanyaan yang amburadul akan memberikan kesan bahwa seorang yang ceroboh, dan para pakar yang sibuk akan merasa segan untuk meluangkan waktunya untuk menanggapi email tersebut.
7. Jangan langsung mengklaim bahwa kesalahan ada pada pihak lain.
8. Menjelaskan dan memaparkan masalahnya
9. Membuat kesimpulan setelah permasalahan anda terjawab.

   Setelah pertanyaan terjawab/masalah terselesaikan, perlu dikirim satu e-mail/tulisan lagi ke forum yang menjelaskan langkah apa saja yang harus dilakukan untuk menyelesaikan masalah tersebut. Selain akan memberi manfaat serta kemudahan kepada orang lain yang memiliki permasalahan serupa tanpa perlu mengajukan pertanyaan yang sama.

Penutup

Kesalahpaham yang terjadi dalam perbincangan kerap kali terjadi di dalam kehidupan namun hal tersebut juga bisa terjadi dalam penulisan di email, forum ataupun chat. Kesalahpahaman yang biasa terjadi karena kesalahan pada penekanan kalimat. Dalam sebuah tulisan memang tidak bisa dibedakan apakah seseorang sedang emosi atau tidak seperti pada perbincangan lisan yang bisa langsung kita ketahui dengan penekanan pada kata-kata yang diucapkan

Didalam suatu komunitas di dunia maya seperti email, forum ataupun chat ada aturan walaupun tidak tertulis tentang penulisan agar tidak terjadi kesalahpahaman tersebut . Jadi aturan ini dalam arti pedoman yang dapat membantu menghindari kesalahan dan kesalahpahaman .

Daftar Pustaka

_______, . *Etika Profesi dan Budi Pekerti.* http://www.endrosri.co.cc/perkuliahan/Etika-rofesi/Etika%20Profesi%20%26%20Budi%20Pekerti.pdf. Diakses tanggal 20 Agustus 2006

Dyson Anthony,John Harris.1994 *Ethics and biotechnology*. London : Routledge

Matthew Strawbridge. 2006. *Netiquette: Internet Etiquette in the Age of the Blog*. London : Software Reference Ltd

Nancy Flynn,Randolph Kahn. 2003. *E-mail rules: a business guide to managing policies, security, and legal issues for e-mail and digital communication*. New York : Amacom Books

Yudho Giri Sucahyo , *Netiket*, http://learning.unla.ac.id/ft/praktikum/sim_tutorial/web%20dan%20internet/article-netiket.pdf. Diakses tanggal 10 September 2006

Shea, Virginia. 1994. *Netiket* . Albion Books http://ptk-online.org/elearning/download/intro/Netiket.pdf. Diakses Tanggal 20 Agustus 2006

Surayningsih. 2006. *ETIKA BER-INTERNET*. http://suryaningsih.wordpress.com/2006/11/16/etika-ber-internet/. Diakses tanggal 20 November 2006

Syarat Perlu Dan Cukup Subaljabar Merupakan Ideal di Dalam Aljabar BCI

Yeni Susanti[1], Sri Wahyuni [2]
[1, 2] **Jurusan Matematika FMIPA UGM**

Abstrak :

Di dalam tulisan ini dibahas syarat perlu dan syarat cukup agar subaljabar merupakan ideal di dalam aljabar BCI.

Dari suatu aljabar BCI X, dikonstruksikan $P(X)$ dan $SP(X)$ dan direct product dari $P(X)$ dan $SP(X)$. Lebih lanjut ditunjukkan bahwa jika X dapat dinyatakan sebagai direct product dari $P(X)$ dan $SP(X)$ serta setiap elemen tak nol dari X merupakan atom maka setiap subaljabar dari X merupakan ideal dan sebaliknya.

Kata kunci : Aljabar BCI X.

Definisi 1

Suatu aljabar (X, *, 0) *tipe* (2, 0) *disebut* ***aljabar BCI*** *jika memenuhi aksioma aksioma :*

1. $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$
2. $(x * (x * y)) * y = 0$
3. $x * x = 0$
4. $(x * y = 0 \ \& \ y * x = 0) \Rightarrow x = y$

untuk setiap $x, y, z \in X$.

Selanjutnya, untuk memudahkan penulisan, seluruh aljabar BCI (X, $*$, 0) dalam tulisan ini cukup disingkat dengan aljabar BCI X. Aljabar BCI X disebut aljabar BCK jika untuk setiap $x \in X$ berlaku $0 * x = 0$. Sebarang $Y \subseteq X$ disebut subaljabar jika $0 \in Y$ dan Y tertutup terhadap operasi $*$.

Sifat 2 [6]

Pada aljabar BCI X berlaku :

1. $(x * y) * z = (x * z) * y$
2. $x * 0 = x$

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2006 dengan tema " **Trend Penelitian dan Pembelajaran Matematika di Era ICT "** yang diselenggarakan pada tanggal 24 Nopember 2006

3. $0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$

4. $0 * (0 * (0 * x)) = 0 * x$

untuk setiap $x, y, z \in X$.

Pada aljabar BCI X dapat didefinisikan relasi $\le$ dengan definisi sebagai berikut :

$$(\forall\ x, y \in X)\ (x \le y \Leftrightarrow x * y = 0).$$

Sifat 3 [6]

Di dalam aljabar BCI X berlaku :

$$(\forall\ x, y, z \in X)\ (x \le y \Rightarrow (x * z \le y * z\ \&\ z * y \le z * x)).$$

Definisi 4

Diberikan aljabar BCI $(X, *, 0)$.

a. *Himpunan tak kosong* $I \subseteq X$ *disebut* ***ideal*** *jika*

1. $0 \in I$
2. $(\forall\ x, y \in X)\ ((x * y \in I\ \&\ y \in I) \Rightarrow x \in I)$.

dan disebut ***ideal tertutup*** *jika untuk setiap* $x \in I$ *berlaku* $0 * x \in I$.

b. Elemen tak nol $a \in X$ disebut **atom** jika :

$$(\forall\ x \in X - \{0\})\ (x \le a \Rightarrow x = a).$$

dan disebut atom kuat jika

$$(\forall\ x \in X)\ (x \ne a \Rightarrow a * x = a).$$

Di dalam aljabar BCI, didefinisikan himpunan $D(X)$ sebagai berikut :

$$\boldsymbol{D(X) = \{\, a \in X \mid a \text{ atom kuat} \,\} \cup \{0\}}.$$

Teorema 5 ___

Diberikan sebarang aljabar BCK X. Himpunan $D(X)$ merupakan subaljabar dan sekaligus ideal di dalam X.

Teorema 6 [2]

Jika X merupakan aljabar BCK maka

$$D(X) = X \Leftrightarrow \text{ setiap subaljabar di dalam } X \text{ merupakan ideal.}$$

Dari suatu aljabar BCI X, dapat dikonstruksikan

$$P(X) = \{ x \in X \mid 0 * x = 0 \}$$

dan

$SP(X) = \{ x \in X \mid 0 * (0 * x) = x \}$.

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa keduanya merupakan subaljabar dan $P(X) \cap SP(X) = \{0\}$.

Aljabar BCK bagian dari X disebut radikal positif. Aljabar X disebut aljabar BCI p-semisimpel jika radikal positif-nya trivial yaitu radikal positif-nya hanya memuat elemen 0.

Ideal tertututp yang termuat di dalam aljabar p-semisimpel disebut aljabar tertutup p-semisimpel.

Teorema 7 [5]

Diberikan aljabar p-semisimpel X. Jika didefinisikan operasi "+" sebagai berikut

$$(\forall\ x, y \in X)\ (\ x + y = x * (0 * y))$$

maka X terhadap operasi + merupakan grup abelian dengan 0 *sebagai elemen identitas.*

Teorema 8 [1]

Jika X merupakan aljabar p-semisimpel dan $I \subseteq X$ maka tiga pernyataan berikut ekuivalen.

1. *I ideal tertutup*
2. *I subaljabar*
3. *I subgrup*

Lemma 9 [2]

Diberikan aljabar BCI X. Jika SP(X) ideal maka untuk setiap $x, y \in X$ dan $u, v \in SP(X)$ berlaku :

$$x * u = y * v \Rightarrow (x = y \;\&\; u = v).$$

Lemma 10[2]

Diberikan aljabar BCI X. Jika SP(X) ideal maka berlaku

$$(\forall x \in X)\ (x = (x * (0 * (0 * x))) * (0 * x)).$$

Lemma 11 [2]

Jika X merupakan aljabar BCI dengan SP(X) ideal maka

$$(\forall u \in P(X) \;\&\; v \in SP(X))\ (v * u = v).$$

Lemma 12 [2]

Jika X merupakan aljabar BCI dengan SP(X) ideal maka

$$(\forall u \in P(X) \;\&\; v, v` \in SP(X))\ ((u * v) * (u * v`) = 0 * (v * v`)).$$

Lemma 13 [2]

Jika X merupakan aljabar BCI dengan SP(X) ideal maka

$$(\forall u \in P(X) \;\&\; v, v` \in SP(X))\ ((0 * v) * (u * v`) = 0 * (v * v`)).$$

Lemma 14 [2]

Jika X merupakan aljabar BCI dengan SP(X) ideal maka

$(\forall\ u \in P(X)\ \&\ v \in SP(X))\ ((u * v) * (0 * v) = u)$.

Definisi 15

Diberikan aljabar BCI X dan ideal I, J ⊆ X. Aljabar X disebut ***direct product*** *dari I dan J jika :*

1. $(\forall\ x \in X)\ (\exists !\ a \in I)\ (\exists !\ b \in J)\ (x = a * b)$
2. $(\forall\ a, b, c, d \in X)(a * b, c * d \in I * J \Rightarrow (a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d))$.

Selanjutnya, jika X merupakan *direct product* dari I dan J, X dapat ditulis dengan

$$X = I * J.$$

Berikut diberikan syarat perlu dan syarat cukup setiap subaljabar merupakan ideal.

Teorema 16 [2]

Diberikan aljabar BCI X. Dua pernyataan berikut ekuivalen.

1. *$X = P(X) * SP(X)$ dan setiap elemen tak nol di dalam $P(X)$ merupakan atom*
2. *Setiap subaljabar di dalam X merupakan ideal.*

Bukti :

1 ⇒ 2

Ambil sebarang subaljabar I di dalam X. Akan ditunjukkan I ideal. Ambil sebarang $x * y \in I$ dengan $y \in I$. Akan ditunjukkan $x \in I$; karena berlaku 1 maka $x = u * v$ dan $y = u` * v`$ dengan $u, u` \in P(X)$ dan $v, v` \in SP(X)$. Dengan cara yang mudah diperoleh

$u` = y * (0 * (0 * y))$ (1)

dan

$u * u` = (x * y) * (0 * (0 * (x * y)))$. (2)

Berdasarkan 0, y, $x * y \in I$ dan I subaljabar maka dari (1) dan (2) diperoleh $u`$, $u*u` \in I$. Di sisi lain, karena $u` \in P(X)$ maka $0 \leq u`$. Menurut Sifat 3 hal ini berakibat

$$u * u` \leq u * 0 = u \Leftrightarrow (u * u`) * u = 0.$$

Lebih lanjut, karena $u \in P(X)$ dan setiap elemen tak nol dalam $P(X)$ merupakan atom diperoleh $u * u` = u$ atau $u * u` = 0$. Jika $u * u` = u$ maka $u \in I$. Jika $u * u` = 0$ maka karena $u \in P(X)$ dan setiap elemen tak nol dalam X merupakan atom maka diperoleh $u = u`$ atau $u = 0$ sehingga

$$u \in I. \qquad (3)$$

Di lain pihak menurut Sifat 2 bagian 3 diperoleh

$$\begin{aligned} 0 * y &= 0 * (u` * v`) \\ &= (0 * u`) * (0 * v`) \\ &= 0 * (0 * v`) \\ &= v` \qquad (4) \end{aligned}$$

Berdasarkan $u, u` \in P(X)$ dan $v, v` \in SP(X)$ diperoleh

$$\begin{aligned} 0 * (0 * (x * y)) &= 0 * ((0 * x) * (0 * y)) \\ &= 0 * ((0 * (u * v)) * (0 * (u` * v`))) \\ &= 0 * (((0 * u) * (0 * v)) * ((0 * u`) * (0 * v`))) \\ &= 0 * ((0 * (0 * v)) * (0 * (0 * v`))) \\ &= 0 * (v * v`) \\ &= (0 * v) * (0 * v`) \\ &= (0 * (0 * v`)) * v \\ &= v` * v. \qquad (5) \end{aligned}$$

Berdasarkan 0, y, $x * y \in I$ dan I subaljabar, dari (4) dan (5) diperoleh

$$v` \in I \quad \text{dan} \quad v` * v \in I. \quad (6)$$

Akibatnya, $0 * v = (v` * v`) * v = (v` * v) * v` \in I$ sehingga diperoleh

$v = 0 * (0 * v) \in I.$ (7)

Dari (3) dan (7) dan karena I subaljabar diperoleh

$x = u * v \in I.$

Dengan demikian terbukti I ideal.

2 ⇒ 1

Lemma 10 menunjukkan jika $SP(X)$ ideal, setiap anggota X dapat dinyatakan dalam bentuk

$x = (x * (0 * (0 * x))) * (0 * x).$

Terlebih dulu akan ditunjukkan bahwa $x * (0 * (0 * x)) \in P(X)$ dan $0 * x \in SP(X)$ sehingga dengan demikian terbukti bahwa setiap $x \in X$ dapat dinyatakan dalam bentuk $x = a * b$ dengan $a \in P(X)$ dan $b \in SP(X)$. Berdasarkan aksioma 3 pada Definisi 1 dan Sifat 2 bagian 3 dan 4 diperoleh

$$0 * (x * (0 * (0 * x))) = (0 * x) * (0 * (0 * (0 * x)))$$

$$= (0 * x) * (0 * x)$$

$$= 0.$$

Jadi terbukti $x * (0 * (0 * x)) \in P(X)$. Lebih lanjut, menurut Sifat 2 bagian 4 juga diperoleh

$0 * (0 * (0 * x))) = 0 * x.$

Jadi, $0 * x \in SP(X)$.

Berdasarkan Lemma 9 diperoleh bahwa untuk setiap $x \in X$ terdapat dengan tunggal $a \in P(X)$ dan $b \in SP(X)$ sehingga $x = a * b$. Dari Teorema 6 jelas bahwa setiap elemen tak nol di dalam X merupakan atom. Dengan demikian tinggal menunjukkan bahwa jika $x, y \in X$ dengan $x = u * v$ dan $y = u` * v`$ dengan $u, u` \in P(X)$ dan $v, v` \in SP(X)$ berlaku

$$(u * v) * (u` * v`) = (u * u` ) * ( v * v`).$$

Hal ini akan dibuktikan sebagai berikut :

Berdasarkan $u` \in P(X)$ diperoleh $0 \leq u`$. Menurut Sifat 3 hal ini berakibat

$u * u` \leq u * 0 = u \Leftrightarrow (u * u`) * u = 0$

sehingga diperoleh dua kemungkinan yaitu $u * u` = 0$ atau $u * u` \neq 0$.

1. Jika $u * u` = 0$, maka diperoleh $u = 0$ atau $u = u`$ (sebab jika $u \neq 0$ maka $u` \neq 0$ sehingga menurut 1, $u`$ merupakan atom). Menurut Lemma 12 dan 13, jika $u = u`$ diperoleh

   $(u * v) * (u` * v`) = (u * v) * (u * v`) = 0 * (v * v`) =$

   $(u * u) * (v * v`) = (u * u`) * (v * v`)$

   dan jika $u = 0$ diperoleh

   $(u * v) * (u` * v`) = (0 * v) * (u` * v`) = 0 * (v * v`) =$

   $(0 * u`) * (v * v`) = (u * u`) * (v * v`)$.

2. Jika $u * u` \neq 0$ diperoleh $u \neq 0$ sehingga menurut 1, $u$ merupakan atom. Akibatnya diperoleh $u * u` = u$.

   Dari aksioma 1 pada Definisi 1 dan Sifat 2 bagian 1 diperoleh

   $(((u * v) * (u` * v`)) * (v` * v)) * u =$

   $(((u * v) * (u` * v`)) * u) * (v` * v) =$

   $(((u * v) * u) * (u` * v`)) * (v` * v) =$

   $(((u * u) * v) * (u` * v`)) * (v` * v) =$

   $((0 * v) * (u` * v`)) * (v` * v) =$

   $((0 * (u` * v`)) * v) * (v` * v) =$

   $(((0 * u`) * (0 * v`)) * v) * (v` * v) =$

   $((0 * (0 * v`)) * v) * (v` * v) =$

   $(v` * v) * (v` * v) = 0$.

   Jadi,

$$((u * v) * (u` * v`)) * (v` * v) \leq u$$

dan diperoleh

$$((u * v) * (u` * v`)) * (v` * v) = 0 \qquad (8)$$

atau

$$((u * v) * (u` * v`)) * (v` * v) = u. \qquad (9)$$

Jika (8) yang terjadi, karena $0, v, v` * v \in SP(X)$ dan $SP(X)$ ideal, diperoleh

$$(u * v) * (u` * v`) = (u * (u` * v`)) * v \in SP(X)$$

sehingga

$$u * (u` * v`) \in SP(X). \qquad (10)$$

Di lain pihak,

$$v` = 0 * (0 * v`) = (0 * u`) * (0 * v`) = 0 * (u` * v`) =$$
$$(u * u) * (u` * v`) = (u * (u` * v`)) * u.$$

Menurut (10) dan Lemma 11 diperoleh

$$v` = (u * (u` * v`)) * u = u * (u` * v`).$$

Akibatnya $(u * (u` * v`)) * v` = 0$ sehingga

$$(u * v`) * (u` * v`) = (u * (u` * v`)) * v` = 0.$$

Jadi,

$$(u * v`) \leq (u` * v`)$$

sehingga menurut Sifat 3 dan Lemma 14 diperoleh

$$u = (u * v`) * (0 * v`) \leq (u` * v`) * (0 * v`) = u`$$

Jadi, $u * u` = 0$. Kontradiksi dengan $u * u` \neq 0$.

Oleh karena itu pastilah (9) yang terjadi yaitu

$$((u * v) * (u` * v`)) * (v` * v) = u. \qquad (11)$$

Di sisi lain, menurut Teorema 8 dan Lemma 14 diperoleh

$$(u * (v * v`)) * (v` * v) =$$
$$(u * (v * v`)) * (v` * (0 * (0 * v))) =$$

$(u * (v * v`)) * ((0 * v) * (0 * v`)) = (u * (v * v`)) * (0 * (v * v`)) = u.$ (12)

Dari (11) dan (12) diperoleh

$((u * v) * (u` * v`)) * (v` * v) = (u * (v * v`)) * (v` * v).$

Akibatnya, karena $v` * v \in SP(X)$ maka menurut Lemma 9 diperoleh

$(u * v) * (u` * v`) = u * (v * v`)$

dan karena $u = u * u`$ maka diperoleh

$(u * v) * (u` * v`) = (u * u`) * (v * v`).$ ◎

Referensi :

[1] Hoo, C.S., Murty, P.V.R., 1987, Quasi-Commutative *p*-Semisimple BCI-Algebra, *Math. Japonica* 32, No. 6 : 889-894

[2] Huang, W.P., 1992, On The *p*-Semisimple Part in BCI-Algebra, *Math. Japonica* 37 , 159-161

[3] Huang, W.P., 1992, On BCI-Algebras in Which Every Subalgebra is an Ideal, *Math. Japonica* 37, No. 4 : 645-647

[4] Huang, W.P., Bae Jun, Y., 2002, Ideals and Subalgebras in BCI-Algebras, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, Springer Verlag

[5] Tiande, L., Changchang, X., 1985, *p*-Radical in BCI-Algebras, *Math. Japonica* 30, No. 4 : 511-517

[6] Susanti, Y., 2004, *Ideal dan Subaljabar di dalam Aljabar BCI*, Tesis , Jurusan Matematika FMIPA UGM