ISBN : 978-979-16353-3-2

T-16

PEMETAAN $w = \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}$ DAN HASIL PEMETAANNYA

Oleh :
H. A. Parhusip[1] dan Sulistyono[2]
Program Studi Matematika Industri dan Statistika
Fakultas Sains dan Matematika (FSM)
Universitas Kristen Satya Wacana (UKSW) (www.uksw.edu)
[1]pressure1733@hotmail.com
[2]mahasiswa S1, matematika –FSM-UKSW

Abstrak : Pemetaan $w = (1/z)^{\alpha}$, dengan $\alpha \in Z^{-}$ (himpunan bulat negatif) dan $\alpha \in (0,1)$ serta hasil pemetaannya ditunjukkan pada makalah ini. Dapat ditunjukkan pemetaan ini konformal. Hasil pemetaan diperoleh dengan melakukan transformasi geometri.

Kata kunci : *pemetaan konformal, fungsi analitik, persegi*

1. Pendahuluan

Pemetaan konformal adalah pemetaan yang mempertahankan besaran dan arah sudut diantara sebarang dua kurva yang berpotongan di suatu titik tertentu. Pada makalah terdahulu (Parhusip dan Sulisyono, 2009) ditunjukkan hasil pemetaan $w = \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}$ untuk $\alpha = 1$ dan $\alpha = 2$. Hasil pemetaan ditunjukkan dengan terlebih dahulu ditunjukkan untuk pemetaan garis vertikal dan garis horizontal secara terpisah. Selanjutnya dilakukan pemetaan untuk 1 bidang persegi. Untuk persegi lebih dari 1 dilakukan dengan menggunakan transformasi geometri seperti pencerminan. Pada makalah ini akan ditunjukkan pemetaan $w = \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}$ untuk berbagai nilai α .

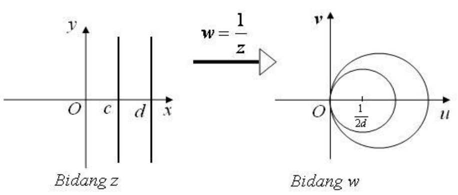
Pada Bab II ditunjukkan pemetaan konformal *w*=1/*z* dan hasil pemetaannya yang merupakan hasil penelitian sebelum ini (Parhusip dan Sulisyono, 2009) . Pada Bab III dijelaskan cara melakukan penelitian ini. Hasil dan Pembahasan ditunjukkan pada Bab IV. Selanjutnya kesimpulan ditunjukkan pada Bab terakhir.

2. Pemetaan konformal *w*=1/*z* dan hasil pemetaannya

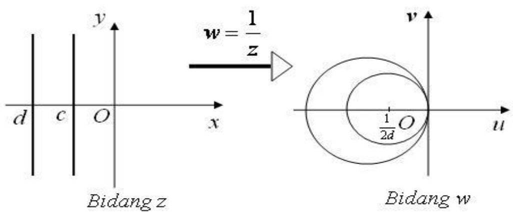
Pemetaan garis vertikal dan garis horizontal

 ISBN : 978-979-16353-3-2

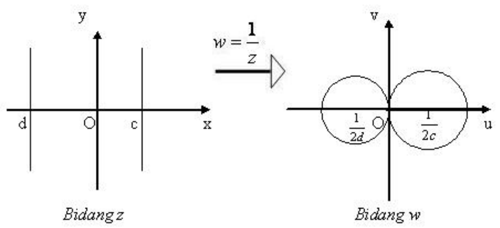
Telah diketahui bahwa pemetaan garis vertikal dan haris horisontal oleh w=1/z merupakan persamaan lingkaran (Parhusip dan Sulisyono, 2009). Beberapa hasil pemetaan untuk garis vertikal dan horizontal ditunjukkan pada Gambar 1-3. Sedangkan untuk $y = a$ dan garis $x = b$ ($a,b \neq 0$) dengan fungsi pemetaan $w = 1/z$ untuk berbagai nilai a dan b yang berbeda, yaitu $a,b > 0$, $a > 0$ dan $b < 0$, $a < 0$ dan $b > 0$ dan $a,b < 0$ berturut-turut ditunjukkan pada Gambar 4.



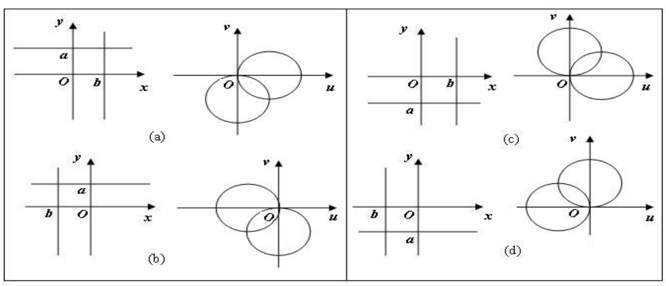
Gambar 1. Persamaan garis *x*=*c*, *x*=*d* dipetakkan dengan *w*=1/*z* menjadi lingkaran , *c,d* > 0



Gambar 2. Persamaan garis *x*=*c*, *x*=*d* dipetakkan dengan *w*=1/*z* menjadi lingkaran ,*c,d* < 0.



Gambar 3. Persamaan garis *x*=*c* dan *x*=*d* dan bayangannya untuk *c*>0 dan *d*<0



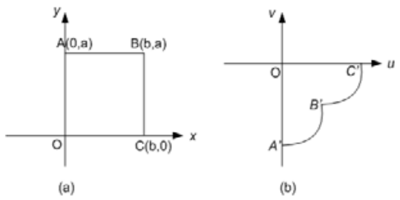
Gambar 4. Persamaan garis *y*=*a*, *x*=*b* dipetakkan dengan *w*=1/*z* menjadi lingkaran dengan *a,b* > 0, *a* > 0 dan *b* <0, *a* < 0 dan *b* > 0 dan *a,b* < 0.

Bayangan persegí untuk 1 persegi

Gambar 4a menunjukkan bahwa $a,b > 0$ dan bayangan digambarkan dalam lingkaran penuh. Bayangan pada Gambar 4a ini dapat dibatasi (tidak sebagai lingkaran

 ISBN : 978-979-16353-3-2

penuh) jika kita juga membatasi persegí yang terbentuk pada Gambar 4a, yaitu Gambar 4a diubah sedemikian sehingga terbentuk Gambar 5.



Gambar 5. Persegi ABCO dan bayangannya dengan pemetaan *w=1/z*.

Bayangan pada Gambar 5b diperoleh pertama kali mencari batas dari bayangannya yaitu titik A', B' dan C' dan kemudian menghubungkan titik-titik tersebut. Untuk titik asal tetap dipetakkan ke titik asal, karena titik asal O(0,0) adalah titik singular atau kesingularan dari *w=1/z*. Untuk titik A(0,*a*) pada bidang *z* akan dipetakkan oleh fungsi *w=1/z* ke titik $A'(0,-\frac{1}{a})$ pada bidang *w*. Hal ini karena titik A(0,*a*) pada bidang *z* dapat ditulis sebagai *z* = 0+*ia*, sehingga $w=\frac{1}{z}=\frac{1}{0+ia}=-\frac{1}{a}$ dan karena *w* = *u* + *iv* maka diperoleh titik $A'(0,-\frac{1}{a})$.

Untuk titik *B*(*b,a*) pada bidang *z* akan dipetakkan oleh fungsi pemetaan *w*=1/*z* ke titik $B'\left(\frac{b}{a^2+b^2},-\frac{a}{a^2+b^2}\right)$ pada bidang *w*. Titik B' diperoleh dengan menuliskan titik *B* sebagai *z = b + ia* , sehingga diperoleh $w=\frac{b-ia}{a^2+b^2}$ sehingga diperoleh koordinat B' tersebut. Untuk selanjutnya titik *C*(b,0) pada bidang *z* dipetakkan ke titik $C'\left(\frac{1}{b},0\right)$ pada bidang *w* oleh fungsi pemetaan *w=1/z* Kemudian titik-titik tersebut dihubungkan untuk memperoleh Gambar 5b. Untuk selanjutnya kita dapat menyusun hasil pemetaan untuk tiap persegi pada kuadran yang lain dengan cara melakukan pencerminan.

Matriks transformasi untuk pencerminan terhadap sumbu *x* dan sumbu *u* adalah

 ISBN : 978-979-16353-3-2

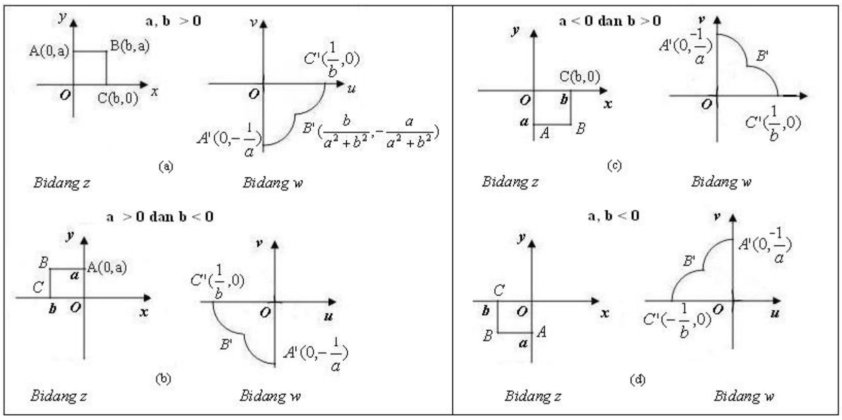
$$X_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

sehingga jika koordinat suatu titik *A* dinyatakan dalam notasi vektor posisi $\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$

dengan koordinat bayangannya adalah A' sebagai vektor posisi $\begin{bmatrix} x_{A'} \\ y_A' \end{bmatrix}$ maka dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} x_{A'} \\ y_{A'} \end{bmatrix} = X_R \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}.$$

Kita dapat melakukan transformasi pencerminan untuk titik *B* dan *C* untuk mendapatkan koordinat pencerminannya berturut-turut B' dan C'. Kita dapat melakukan pencerminan dengan cara serupa sehingga dapat diperoleh berbagai hasil pemetaan yang ditunjukkan pada Gambar 6. Gambar 6 diperoleh dengan melakukan pencerminan Gambar 5a dan Gambar 5b terhadap Sumbu *y* dan sumbu *v* secara berturut-turut menggunakan matriks transformasi $X_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ dan $X_R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

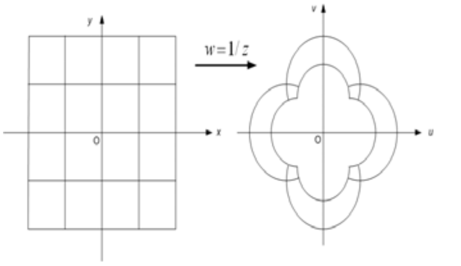


Gambar 6. Pemetaan 1 persegi dan hasil pemetaannya melalui pencerminan.

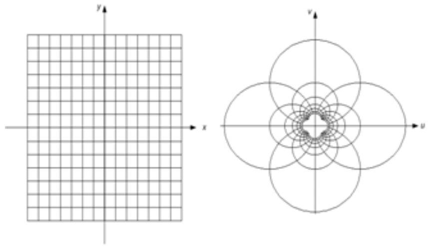
2.3 Bayangan persegí untuk *n x n* persegi

ISBN : 978-979-16353-3-2

Dengan menggabungkan hasil gambar-gambar yang diperoleh pada subbab sebelum ini beserta bayangannya, diperoleh beberapa hasil pemetaan sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 7. Untuk persegi dengan jumlah yang lebih banyak, bayangannya dapat diperoleh dengan langkah-langkah yang sama.



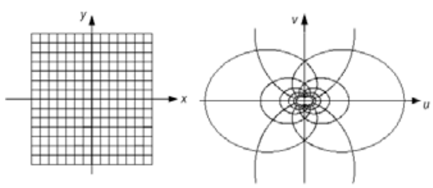
Gambar 7a. Ilustrasi perseguí 4 x 4 yang dipetakkan (kiri) dan hasil pemetaannya (kanan) oleh *w=1/z*.



Gambar 7b. Ilustrasi perseguí 14 x 14 yang dipetakkan (kiri) dan hasil pemetaannya (kanan) oleh *w=1/z*.

Modifikasi pemetaan w=1/z dan hasil pemetaannya

Modifikasi yang ditunjukkan pada makalah ini adalah menyusun pemetaan $w=\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}$ dan $\alpha \in N$ (himpunan bilangan asli). Dapat ditunjukkan bahwa pemetaan ini merupakan pemetaan konformal dengan menyatakan *w* dalam koordinat polar dan memenuhi persamaan Cauchy-Riemann. Untuk persegi yang dibentuk dari persegi 14 x14 yang dipetakkan oleh $w=\left(\frac{1}{z}\right)^{2}$ ditunjukkan pada Gambar 10.



Gambar 10. Pemetaan persegi 14 x 14 (kiri) oleh $w_1=\left(\frac{1}{z}\right)^{2}$ dan hasil pemetaannya (kanan).

3. METODE PENELITIAN

Dalam tahap ini dibagi dalam beberapa kasus, yaitu:

3.1 Menunjukkan bahwa pemetaan $w=\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}$ dengan $\alpha\in Z^{-}$ (himpunan bulat negatif) adalah pemetaan konformal

3.2 Mengilustrasikan hasil pemetaan $w=\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}$, $\alpha=-\beta$ dan $\beta=2$ untuk bidang persegi yang dipetakkan.

3.3 Menunjukkan bahwa pemetaan $w=\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}$ dengan $\alpha\in(0,1)$ adalah pemetaan konformal.

3.4 Mengilustrasikan hasil pemetaan $w=\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}$, $\alpha=0.5$ untuk bidang persegi yang dipetakkan.

4. HASIL & PEMBAHASAN

4.1 Pemetaan $w=\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}$ dengan $\alpha\in Z^{-}$ (himpunan bulat negatif)

Untuk $\alpha\in Z^{-}$ maka dapat dituliskan sebagai $\alpha=-\beta$ dengan $\beta\in N$ (himpunan bilangan asli) sehingga

$$w=\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha} = \left(\frac{1}{z}\right)^{-\beta}=z^{\beta}\text{. Sebutlah } w=z^{\beta}=w_1 \text{ dengan } w_1=u+iv. \tag{4.1}$$

Teorema 4.1. Pemetaan $\left(\frac{1}{z}\right)^{-\beta}=z^{\beta}$ dengan $\beta\in N$ merupakan pemetaan konformal.

Bukti. Perlu ditunjukkan bahwa $w=z^{\beta}=w_1$ merupakan pemetaan analitik yang dapat ditunjukkan 2 cara yaitu dengan Koefisien Binomial (cara I) dan koordinat kutub (cara II). Pada bagian ini ditunjukkan kedua cara.

Cara 1.

Karena *z = x + iy* maka $w_1=z^{\beta}=(x+iy)^{\beta}$. Dengan menggunakan koefisien Binomial diperoleh

$$w_1=z^{\beta}=(x+iy)^{\beta}=\sum_{j=0}^{\beta}C_j^{\beta}x^{\beta-j}(iy)^j$$

$$=C_0^{\beta}x^{\beta}+iC_1^{\beta}x^{\beta-1}y-C_2^{\beta}x^{\beta-2}y^2-iC_3^{\beta}x^{\beta-3}y^3+C_4^{\beta}x^{\beta-4}y^4+iC_5^{\beta}x^{\beta-5}y^5+\dots\,. \tag{4.a}$$

Dengan menuliskan bagian riil dan bagian khayal dari persamaan (4.a) berturut-turut diperoleh

$$u=x^{\beta}-C_2^{\beta}x^{\beta-2}y^2+C_4^{\beta}x^{\beta-4}y^4-C_6^{\beta}x^{\beta-6}y^6+\dots=\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_{2j}^{\beta}x^{\beta-2j}y^{2j},$$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

$$u = \beta x^{\beta-1} y - C_3^\beta x^{\beta-3} y^3 + C_5^\beta x^{\beta-5} y^5 + C_5^\beta x^{\beta-5} y^5 + \ldots = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_{2j+1}^\beta x^{\beta-(2j+1)} y^{2j+1}$$

Sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (\beta - 2j) C_{2j}^\beta x^{\beta-2j-1} y^{2j} \qquad (5.a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j 2j C_{2j}^\beta x^{\beta-2j} y^{2j-1} \qquad (5.b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (\beta - 2j - 1) C_{2j+1}^\beta x^{\beta-2(j+1)} y^{2j+1}, \qquad (5.c)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j (2j+1) C_{2j+1}^\beta x^{\beta-2(j+1)} y^{2j} \qquad (5.d)$$

dengan $k = \left\lfloor \frac{\beta}{2} \right\rfloor$. Dari persamaan (5.a)-(5.b) belum terlihat bahwa persamaan tersebut memenuhi persamaan Cauchy-Riemann $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \right)$. Oleh karena itu masing-masing turuna parsial pada persamaan (5.a)-(5.d) dijabarkan diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta C_0^\beta x^{\beta-1} - (\beta-2) C_2^\beta x^{\beta-3} y^2 + (\beta-4) C_4^\beta x^{\beta-5} y^4 + \ldots, \qquad (6.a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 2C_2^\beta x^{\beta-2} y + 4C_4^\beta x^{\beta-4} y^3 + 6C_6^\beta x^{\beta-6} y^5 + \ldots, \qquad (6.b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (\beta-1) C_1^\beta x^{\beta-2} y - (\beta-3) C_3^\beta x^{\beta-4} y^3 + (\beta-5) C_5^\beta x^{\beta-6} y^5 + \ldots, \qquad (6.c)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = C_1^\beta x^{\beta-1} - 3C_3^\beta x^{\beta-3} y^2 + 5C_5^\beta x^{\beta-5} y^4 + \ldots, \qquad (6.d)$$

Dengan menggunakan identitas 0!=1, maka $C_0^a = C_a^a = 1$, $C_1^a = a$ dan $C_b^a = C_{a-b}^a$. Selain itu

$$bC_b^a = b\left(\frac{a!}{b!(a-b)!} \right) = b\left(\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-(b-1))(a-b)!}{b!(a-b)!} \right)$$

$$= b\left(\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)\ldots(a-(b-1))}{b!(b-1)!} \right)$$

$$= (a-(b-1))\left(\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)\ldots(a-(b-1))}{(b-1)!} \right)$$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Maka didapatkan $2C_2^\beta = (\beta - 1)C_1^\beta$, $3C_3^\beta = (\beta - 2)C_2^\beta$, $4C_4^\beta = (\beta - 3)C_3^\beta$ dan seterusnya sehingga persamaan (6.a)-(6.d) diperoleh $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\right)$. Yang berarti w_1 memenuhi persamaan Cauchy-Riemann.

Cara 2. Dalam koordinat polar w_1 dapat ditulis sebagai $w_1 = z^\beta = r^\beta(\cos\beta\theta + i\sin\beta\theta)$. Denan menuliskan bagian riil dan bagian khayal w_1 diperoleh $u(r,\theta) = r^\beta \cos\beta\theta$ dan $v(r,\theta) = r^\beta \sin\beta\theta$. Sehingga $\frac{\partial u}{\partial r} = \beta r^{\beta-1}\cos\beta\theta = \frac{1}{r}\beta r^\beta \cos\beta\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$
dan $\frac{\partial v}{\partial r} = \beta r^{\beta-1}\sin\beta\theta = -r\beta r^\beta \sin\beta\theta = -r\frac{\partial u}{\partial r}$. Jadi memenuhi persamaan Cauchy-Riemann.
Karena w_1 merupakan polinom berderajat β atau dapat juga disebut sebagai fungsi pangkat, maka turunan w_1 yaitu $w_1^{'} = \beta z^{\beta-1}$ ada untuk setiap $z \neq 0 \in C$. Jadi w_1 merupakan pemetaan konformal.

Untuk $\beta = 1$ maka diperoleh w_1 = *z* . Hasil pemetaan adalah gambar yang sama karena fungsi pemetaan ini tidak mengubah bentuk gambar tetapi hanya menggantu sumbu-sumbu koordinat, yaitu sumbu *x* menjadi sumbu *u* dan sumbu *y* menjadi sumbu *v* berturut-turut untuk bidang *z* dan bidang *w*. Pada bagian selanjutnya ditunjukkan untuk $\beta = 2$.

4.2 Hasil pemetaan $w = \left(\frac{1}{z}\right)^\alpha$, $\alpha = -\beta$ dan $\beta = 2$

Untuk nilai $\beta = 2$ diperoleh $w_1 = z^2$ dan ini merupakan fungsi parabolik atau fungsi kuadrat. Berdasarkan persamaan (4.1) maka $w_1 = x^2 + 2ixy - y^2$. Dengan menuliskan bagian riil dan bagian khayal dari w_1 berturut-turut diperoleh

$$u = x^2 - y^2 \text{ dan } v = 2xy. \tag{7}$$

Berdasarkan persamaan (7) maka persamaan garis $x = \pm a$ pada bidang –z dipetakkan sebagai keluarga parabola pada bidang-*w*, yang ditunjukkan oleh persamaan (8.). Yaitu karena

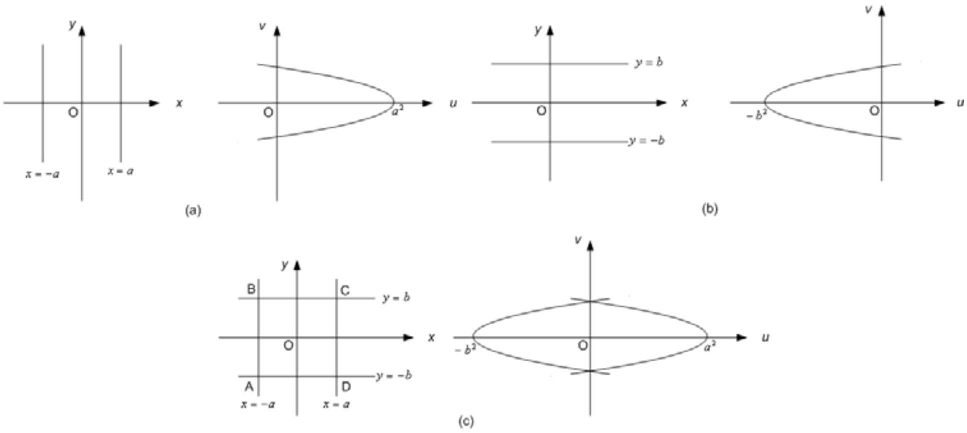
$$v = \pm 2ay \text{ sehingga } y = \pm\frac{v}{2a} \text{ dan } u = a^2 - y^2 \text{ maka } u = a^2 - \left(\pm\frac{v}{2a}\right)^2 = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}. \tag{8.a}$$

Untuk persamaan garis $y = \pm b$ pada bidang-*z* dipetakkan sebagai suatu keluarga parabola pada bidang-*w*, yaitu

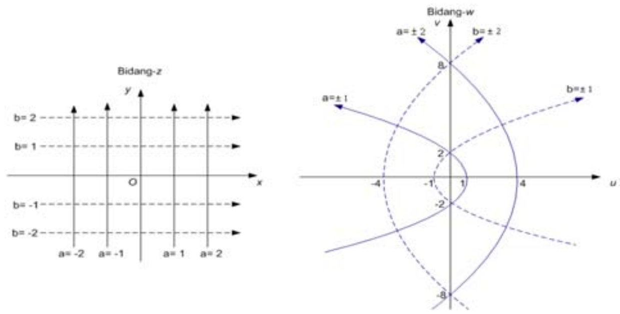
$$v = \pm 2bx \text{ sehingga } x = \pm\frac{v}{2b} \text{ dan } u = x^2 - b^2 \text{ maka } u = \left(\pm\frac{v}{2b}\right)^2 - b^2 = \frac{v^2}{4b^2} - b^2. \tag{8.b}$$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

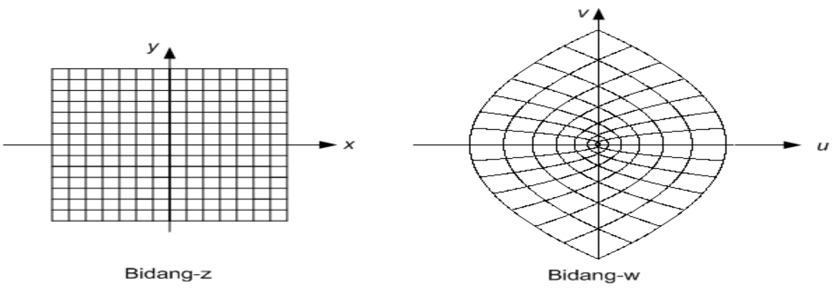
Keluarga parabola persamaan (8.a)-(8.b) merupakan sistem ortogonal (Gordon,1963). Masing-masing dari bayangan garis $x = \pm a$ dan $y = \pm b$ dan persegi ditunjukkan pada Gambar 4.1-4.3.



Gambar 11. Bayangan garis $x = \pm a$ dan $y = \pm b$ beserta bayangan persegi ABCD dengan fungsi $w = z^2$.



Gambar 12. Bayangan garis $x = \pm a$ dan $y = \pm b$ untuk a=1,2 dan b=a,2 serta $w = z^2$.



Gambar 13. Bayangan sejumlah persegi berukuran 14 x 14 dengan fungsi $w = z^2$.

4.3 Pemetaan $w = \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}$ dengan $\alpha \in (0,1)$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Karena $\alpha \in (0,1)$, maka dapat dituliskan $\alpha = \frac{a}{b}$ dengan *a,b* $\in N$, *a*<*b*, sehingga diperoleh

$$w = \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha} = \left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{a}{b}}.$$

Dalam koordinat polar dapat diperoleh $w = \left(\frac{1}{re^{i\theta}}\right)^{\frac{a}{b}} = r^{-\frac{a}{b}}\left(\cos\frac{a}{b}\theta - i\sin\frac{a}{b}\theta\right)$. Dengan menuliskan bagian riil dan khayalnya diperoleh $u = r^{\frac{-a}{b}}\cos\frac{a}{b}\theta$, $v = -r^{\frac{-a}{b}}\sin\frac{a}{b}\theta$. Sehingga

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{a}{b}r^{-\frac{a}{b}-1}\cos\frac{a}{b}\theta \;;\; \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{a}{b}r^{-\frac{a}{b}}\sin\frac{a}{b}\theta \;; \tag{9.a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{a}{b}r^{-\frac{a}{b}-1}\sin\frac{a}{b}\theta \;;\; \frac{\partial v}{\partial \theta} = -\frac{a}{b}r^{-\frac{a}{b}}\cos\frac{a}{b}\theta \;. \tag{9.b}$$

Jadi persamaan Cauchy-Riemann dipenuhi. Karena $w' = \frac{a}{b}\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{a}{b}-1} \neq 0, \forall z \in C$ maka terbukti $w = \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}$ dengan $\alpha \in (0,1)$ merupakan pemetaan konformal.

Untuk $\alpha = \frac{1}{2}$, maka diperoleh bentuk pemetaan $w = \sqrt{\frac{1}{z}}$. Dengan menggunakan koordinat polar diperoleh

$$w = \left(re^{i\theta}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right)\right),\; k = 0,1. \tag{10}$$

Sehingga untuk *k* = 0 diperoleh nilai utama $w_{k=0} = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ dan untuk nilai *k* = 1 diperoleh $w_{k=1} = \left(re^{i\theta}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi}{2}\right)\right)$. Dengan mengingat bahwa
sin (*a + b*) = sin *a* cos *b* + cos *a* sin *b* dan cos(*a+b*)=cos *a* cos *b* – sin *a* sin *b* , maka

$$w_{k=1} = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = -\,w_{k=0}.$$

Dengan menuliskan $w_{k=0} = u + iv$, maka bagian riil dan bagian khayal dapat ditulis sebagai

$$u = \frac{1}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2} \text{ dan } v = -\frac{1}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}. \tag{11}$$

 ISBN : 978-979-16353-3-2

Dengan menuliskan persamaan (11) dalam *x* dan *y* diperoleh $u = \frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$.

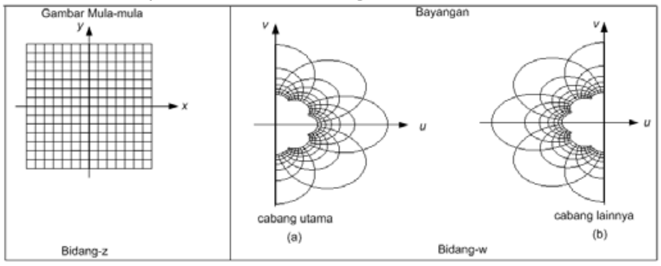
Karena $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ diperoleh

$$u = \frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{\frac{1+\frac{x}{r}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{\frac{r+x}{2r}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{r+x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}.$$

Secara sama, karena $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ diperoleh

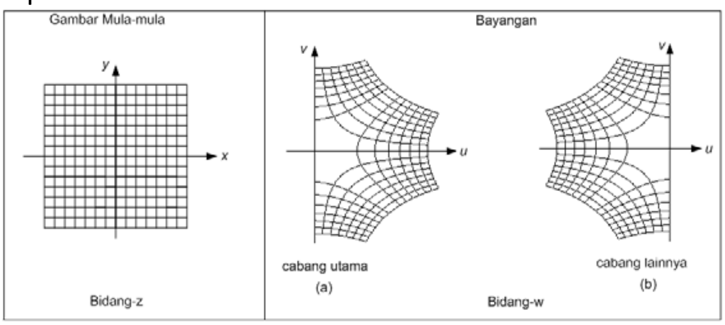
$$v = -\frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{\frac{1-\frac{x}{r}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{\frac{r-x}{2r}} = -\frac{1}{r}\sqrt{\frac{r-x}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}.$$

Sehingga untuk setiap titik (a,b) pada bidang-z akan dipetakkan menjadi titik $\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+b}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$ pada bidang-w. Dengan mengambil nilai utama $w_{k=0}$ yaitu $0 \le \theta < 2\pi$ maka bayangan sejumlah persegi berukuran 14 x 14 ditunjukkan pada Gambar 14 pada dua cabang.



Gambar 14 Hasil pemetaan $w_{k=0} = \frac{1}{\sqrt{z}}$ untuk 14 x14 persegi.

Kita dapat melakukan pemetaan untuk berbagai nilai α yang lain dan menyusun aspek matematis sebagaimana di atas. Untuk nilai $\alpha = -\frac{1}{2}$ dapat ditunjukkan hasil pemetaan yang ditunjukkan pada Gambar 15.



Gambar 15. Hasil pemetaan persegi 14x14 dengan $w = \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}$ dengan $\alpha = -\frac{1}{2}$.

5 KESIMPULAN DAN SARAN

Pada makalah ini telah ditunjukkan hasil pemetaan persegi *n x n* dari $w = \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}$ untuk $\alpha \in Z^{-}$ (himpunan bilangan bulat negatif) dan $\alpha \in (0,1)$. Diperoleh bahwa hasil pemetaan persegi *n x n* untuk $\alpha = 2$ merupakan keluarga parabola. Sedangkan pemetaan persegi *n x n* dengan $\alpha = \frac{1}{2}$ merupakan bentuk *lemniscate* yang terpotong-potong. Beberapa pengembangan dapat dilakukan dengan melakukan pemetaan tak konformal untuk bidang persegi.

DAFTAR PUSTAKA

Churchill, R. V. 1960. *Complex Variables and Applications*,2nd Edition. McGraw-Hill Book Company. New York.

Gordon, L. I dan Sim Lasher. 1963. *Elements of Complex Variables*. Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Parhusip H. A., dan Sulistyono, Pemetaaan Konformal dan Modifikasinya untuk suatu Bidang Persegi, *Prosiding* Seminar Nasioanal Matematika UNPAR 5 September 2009, hal.MT 250-259, Vol 4. Th. 2009, ISSN 1907-3909.

Pustaka Web

web1. http://mathworld.wolfram.com/ConformalMapping.html