

## **BAB II**

### **DASAR TEORI**

#### **A. Dasar Teori**

##### **1. Sifat Magnet Bahan**

Semua bahan dapat dibagi menjadi dua kelas sesuai dengan sifat magnetnya, yaitu memiliki momen magnet permanen atau tidak. Dalam kelompok bahan yang mengandung momen magnet permanen, bisa dibedakan antara yang mempunyai *long range order* atau *short range order*, dan antara momen magnet yang saling sejajar (di bawah suhu kritis) dan yang tidak (saling berlawanan).

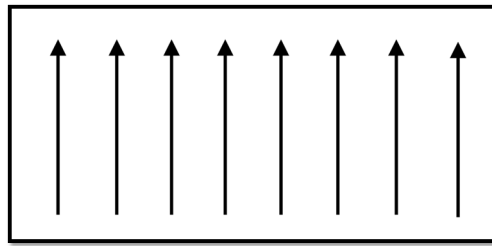
Bahan yang tidak dapat dipengaruhi oleh medan magnet eksternal disebut sebagai diamagnet. Hampir semua bahan di bumi bersifat diamagnet. Medan magnet eksternal menginduksi momen magnet sehingga melawan medan magnet yang mengenai bahan tersebut.

Kekuatan magnet bahan diamagnet jauh lebih lemah dibandingkan kekuatan magnet bahan ferromagnet ataupun paramagnet. Bahan yang disebut diamagnet umumnya berupa benda yang disebut 'non-magnet', termasuk di antaranya air, kayu, senyawa organik seperti minyak bumi dan beberapa jenis plastik, serta beberapa logam seperti tembaga, merkuri, emas, dan bismut.

Bahan yang terdiri dari momen magnet permanen tetapi tidak berada pada *long-range* spontan disebut dengan paramagnet. Pada kesetimbangan termal tanpa pengaruh

medan magnet, saat itu terjadi orientasi secara acak sehingga momen magnet yang ditampilkan tidak teratur. Pengaruh dari medan magnet eksternal kemudian menyebabkan spin memiliki arah yang sama dan menghasilkan momen magnet total. Pada saat medan magnet eksternal dihilangkan, momen magnet akan kembali pada posisi acak. Contoh dari bahan paramagnet adalah magnesium, molybdenum, lithium, dan tantalum.

Ferromagnet adalah suatu bahan di mana momen magnetnya memiliki kecenderungan untuk selaras satu sama lain di bawah pengaruh medan magnet. Tetapi yang membedakan dengan paramagnet adalah pada saat pengaruh dari medan magnet luar dihilangkan maka arah dari momen magnetnya akan tetap sejajar. Contoh dari ferromagnet adalah besi, baja, nikel, kobalt.

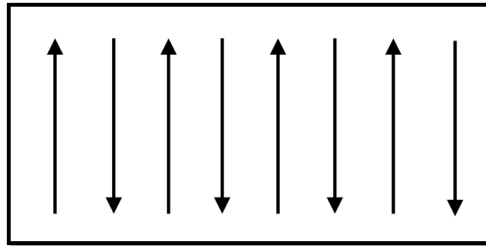


Gambar 2: Skema momen magnet paralel pada ferromagnet

Pada beberapa bahan, arah spin antara titik kekisi yang saling berdekatan berada pada arah yang berbeda. *Long-range* yang diberikan dapat digambarkan dengan dua subkekisi ferromagnet yang saling berlawanan. Jika magnetisasi total dari dua subkekisi adalah sama, bahan tersebut disebut antiferromagnet. Jika magnetisasi total tidak sama, bahan disebut sebagai ferrimagnet. Secara umum, ferrimagnet tidak terbatas pada dua subkekisi. Karakteristik yang membedakan adalah setidaknya ada medan magnet pada subkekisi saling berlawanan.

Menurut Henley (2007), keadaan antiferromagnet yang paling sederhana adalah antiferromagnet Néel, yang mana arah dari spin saling bergantian. Kejadian ini terjadi ketika spin berada pada kisi *bipartite*. Kisi *bipartite* adalah keadaan saat *spin up* dan *spin down* saling berselang seling secara bergantian. Contoh dari spin *bipartite* ini adalah posisi spin pada kisi persegi dan kekisi kubus sederhana.

Antiferromagnet, di sisi lain berperilaku seperti paramagnet. Ketika tidak ada medan eksternal, kemagnetan dari dua subkisi saling meniadakan, sehingga tidak menghasilkan magnetisasi (Stancil & Phabakar, 2009: 4).



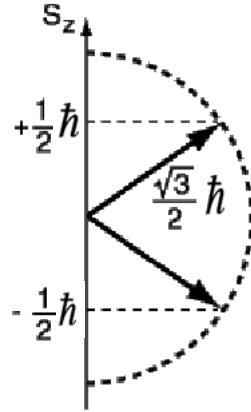
Gambar 3: Skema momen magnet dengan arah anti-paralel pada antiferromagnet

Pada antiferromagnet, konstanta interaksi tukar bernilai negatif, yang berarti  $J < 0$ , sehingga momen magnet untuk tetangga terdekat anti-paralel satu sama lain (Blundell, 2001: 92).

## 2. Spin Elektron

Dalam mekanika kuantum spin dianggap sebagai momentum sudut khusus yang berhubungan dengan partikel. Sebagai contoh, partikel dasar seperti elektron mempunyai momentum sudut instrinsik dan momen magnet. Kuantisasi ruang spin elektron ditentukan oleh bilangan kuantum magnetik spin  $m_s$ . Momentum sudut spin elektron

dapat memiliki arah (orientasi)  $m_s = +\frac{1}{2}$  (untuk *spin up*) dan  $m_s = -\frac{1}{2}$  (untuk *spin down*).



Gambar 4: Dua buah orientasi momentum sudut spin (Nave, 2007)

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh Stern dan Gerlach pada tahun 1922 tentang berkas atom, ditemukan bahwa berkas atom perak atau atom natrium yang memiliki satu elektron pada kulit terluarnya berpisah membentuk dua garis karena adanya pengaruh medan magnet tidak homogen. Eksperimen ini memberikan gambaran bahwa sebuah elektron memiliki sebuah momen magnet (Nave, 2007).

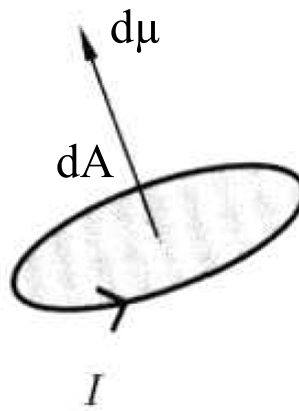
Besar momentum sudut spin berdasarkan Gambar (4) memenuhi persamaan:

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)} \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \quad (1)$$

### 3. Momen Magnet

Setiap elektron dalam atom mempunyai momen magnet yang berasal dari dua sumber, salah satunya berasal dari gerakan elektron mengelilingi inti. Elektron yang mengelilingi inti ini dapat dianggap sebagai loop arus kecil, yang menghasilkan medan magnet yang kecil pula, dan mempunyai momen magnet sepanjang sumbu rotasinya yang disebut sebagai momen magnet orbital (Hasan, 2008: 4).



Gambar 5: Arah momen magnet terhadap elemen luasan (Blundell, 2001: 2)

Berdasarkan Gambar (5), jika ada arus  $I$  di sekitar elemen luasan  $|dA|$ , momen magnet yang timbul adalah

$$d\vec{\mu} = I d\vec{A} \quad (2)$$

Satuan dari momen magnet adalah  $\text{Am}^2$ . Arus loop terjadi karena gerakan satu atau lebih muatan listrik. Muatan tersebut adalah kumpulan partikel bermuatan yang mempunyai massa. Kemudian ada gerakan orbital yang mengakibatkan timbulnya momentum sudut dari partikel bermuatan pada semua arus loop. Momen magnet berhu-

bungan dengan momentum anguler yang terjadi.

#### 4. Interaksi Tukar

Interaksi tukar menjadi basis keteraturan *long range* bahan magnet. Interaksi tukar tak lain merupakan interaksi elektrostatik.

Berdasarkan model sederhana dari dua elektron yang mempunyai koordinat  $\vec{r}_1$  dan  $\vec{r}_2$ , fungsi gelombang untuk  $\vec{r}_1$  dapat ditulis  $\psi_a(\vec{r}_1)$  dan untuk  $\vec{r}_2$  adalah  $\psi_b(\vec{r}_2)$ . Jika digabungkan maka akan menjadi  $\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2)$ , tetapi hal tersebut tidak memenuhi simetri tukar, karena jika ditukarkan kedua elektron menjadi  $\psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1)$  yang mana tidak digunakan.

Pada keadaan *singlet*, yang ditandai dengan arah spin yang saling berlawanan (*up* dan *down*), nilai  $S = 0$  dengan  $m_s = 0$ . Berbeda dengan keadaan *triplet*, pasangan spin akan berada pada arah yang sama (*up* atau *down*), maka  $S = 1$  dengan kemungkinan  $m_s = -1, 0, +1$ . Untuk keadaan *singlet* terjadi hubungan simetris dan untuk keadaan *triplet* terjadi hubungan antisimetris yang dapat dilihat pada persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned}\Psi_S &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) + \psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1)]\chi_S \\ \Psi_T &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) - \psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1)]\chi_T\end{aligned}\quad (3)$$

dengan  $\chi_S$  merupakan fungsi gelombang spin pada keadaan *singlet* dan  $\chi_T$  merupakan fungsi gelombang spin pada keadaan *triplet*. Dengan mengasumsikan bahwa  $\chi_S$  dan  $\chi_T$

ternormalisasi, energi dasar yang mungkin terjadi dapat dinyatakan:

$$E_S = \int \Psi_S^* \hat{H} \Psi_S d\vec{r}_1 d\vec{r}_2$$

$$E_T = \int \Psi_T^* \hat{H} \Psi_T d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \quad (4)$$

dengan asumsi bahwa spin dengan fungsi gelombang  $\chi_S$  dan  $\chi_T$  ternormalisasi. Maka selisih antara kedua energi adalah

$$E_S - E_T = 2 \int \Psi_a^*(\vec{r}_1) \Psi_b^*(\vec{r}_2) \hat{H} \Psi_a(\vec{r}_2) \Psi_b(\vec{r}_1) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \quad (5)$$

Tetapan tukar  $J$  dapat dituliskan sebagai:

$$J = \frac{E_S - E_T}{2} = \int \Psi_a^*(\vec{r}_1) \Psi_b^*(\vec{r}_2) \hat{H} \Psi_a(\vec{r}_2) \Psi_b(\vec{r}_1) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \quad (6)$$

Jika  $J > 0$ ,  $E_S > E_T$  menyokong keadaan *triplet*  $S = 1$ . Jika  $J < 0$ ,  $E_S < E_T$  menyokong keadaan *singlet*  $S = 0$  (Blundell, 2001: 75).

## 5. Model Heisenberg

Pada tahun 1928 Werner Heisenberg memformulasikan sebuah model untuk menjelaskan interaksi antara spin yang bertetangga yang mengacu pada panjang interval orde ferromagnet. Berbeda dengan model Weiss, yang mana interaksi diletakkan pada medan rerata, model Heisenberg menyatakan secara mikroskopik interaksi berpasangan antara spin pada tempat kisi yang berbeda (Mohn, 2006: 63). Persamaan Hamiltonannya dapat ditulis sebagai berikut

$$H = \sum_{RR'} J(R - R') S_R \cdot S_{R'} \quad (7)$$

dengan  $S_R$  dan  $S_{R'}$  adalah operator spin, dan  $J(R - R')$  adalah konstanta tukar untuk interaksi antara  $S_R$  yang terletak pada  $R$  dan  $S_{R'}$  yang terletak pada  $R'$ . Konstanta tukar bersifat simetris, sehingga:

$$J(R - R') = J(R' - R) \quad (8)$$

Jika  $J > 0$  maka hamiltoniannya mempresentasikan sistem ferromagnet yang spinnya bersifat paralel. Untuk  $J < 0$  maka hamiltoniannya mempresentasikan sistem antiferromagnet yang spinnya bersifat anti-paralel.

Pada model Heisenberg, spin sebagai operator vektor berada pada ruang tiga dimensi dapat dituliskan sebagai:

$$\vec{S}_R = S_R^x \hat{x} + S_R^y \hat{y} + S_R^z \hat{z} \quad (9)$$

dengan  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ , dan  $\hat{z}$  merupakan vektor unit pada koordinat kartesius.

Transformasi dari komponen operator vektor spin operator kreasi dan annihilasi untuk magnon telah dipaparkan oleh Holstein dan Primakoff pada tahun 1940 dengan memformulasikan operator boson  $a^+$ ,  $a^-$  yang digunakan untuk mempresentasikan operator spin. Operator spinnya mempunyai hubungan komutasi  $[S_x, S_y] = iS_z$ , sehingga (Mohn, 2006: 64)

$$S_R^+ = S_R^x + iS_R^y, \quad S_R^- = S_R^x - iS_R^y \quad (10)$$



Kemudian Hamiltonian dari Model Heisenberg dapat ditulis

$$H = \sum_{RR'} J(R-R') \left\{ \frac{1}{2} (S_R^+ S_{R'}^- + S_R^- S_{R'}^+) + S_R^z S_{R'}^z \right\} \quad (11)$$

Jika diberikan medan magnet luar pada arah  $z$  Persamaan (11), maka Hamiltonian-nya menjadi

$$H = \sum_{RR'} J(R-R') \left\{ \frac{1}{2} (S_R^+ S_{R'}^- + S_R^- S_{R'}^+) + S_R^z S_{R'}^z \right\} - g\mu_B B \sum_R S_R^z \quad (12)$$

#### a. Teori Gelombang Spin

Pada ferromagnet, semua spin paralel satu sama lain, dapat dianggap arah spin sebagai arah  $+z$ . Pada suhu tertentu, keteraturan terganggu dan spin mulai berosilasi di sekitar arah tersebut. Osilasi ini kemudian menghasilkan gelombang pada kisi magnet yang kemudian dikenal sebagai gelombang spin. Pada suhu rendah, gelombang spin terkuantisasi sebagai magnon, kuasi partikel tipe boson yang mirip fonon pada getaran kekisi akibat panas.

Model Heisenberg menggunakan operator kreasi dan anihilasi boson sebagai representasi operator spin yang disebut dengan representasi Holstein-Primakoff yang definisinya (Mohn, 2006: 64)

$$\begin{aligned} S_R^+ &= \sqrt{2S} \left( 1 - \frac{a_R^+ a_R^-}{2S} \right)^{\frac{1}{2}} a_R^- \\ S_R^- &= \sqrt{2S} a_R^+ \left( 1 - \frac{a_R^+ a_R^-}{2S} \right)^{\frac{1}{2}} \\ S_R^z &= S - a_R^+ a_R^- \end{aligned} \quad (13)$$

dengan  $a_R^+$  dan  $a_R^-$  adalah operator kreasi dan anihilasi boson yang memenuhi komutasi boson  $[a_R^-, a_R^+] = 1$  dan  $a_R^+ a_R^- = \hat{n}_R$  adalah operator cacah dari partikel boson.

Dengan mengabaikan magnon, Persamaan (13) dapat dijabarkan menggunakan deret binom sebagai berikut

$$\begin{aligned} S_R^+ &= \sqrt{2S} a_R^- - a_R^+ a_R^- a_R^- / 2\sqrt{2S} + \dots \\ S_R^- &= \sqrt{2S} a_R^+ - a_R^+ a_R^+ a_R^- / 2\sqrt{2S} + \dots \\ S_R^z &= S - a_R^+ a_R^- \end{aligned} \quad (14)$$

Pada Persamaan (14), persamaan dengan lebih dari dua operator boson akan memunculkan interaksi antar-boson. Karena yang akan diamati hanya pada temperatur rendah dengan cacah boson kecil, maka persamaan yang mengandung lebih dari dua operator boson akan diabaikan, sehingga representasi Holstein-Primakoff yang digunakan adalah

$$\begin{aligned} S_R^+ &= \sqrt{2S} a_R^- \\ S_R^- &= \sqrt{2S} a_R^+ \\ S_R^z &= S - a_R^+ a_R^- \end{aligned} \quad (15)$$

Teori gelombang spin linear diperoleh dengan mengabaikan interaksi boson tersebut.

## **b. Kasus Ferromagnet**

Dianggap sebuah kisi sederhana, misalnya kisi hiperkubik pada dimensi  $d$ . Untuk  $d = 1$ , akan berbentuk rantai spin 1-D sederhana, sementara untuk  $d = 2$ , kekisi sederhananya adalah kekisi persegi. Konstanta tukar untuk interaksi antar spin dan tetangga terdekat spin pada jarak  $\delta$  ditunjukkan oleh  $J$ . Merujuk pada Persamaan (11),

Hamiltonian ferromagnet kisi hiperkubik adalah

$$H = J \sum_{R,\delta} \frac{1}{2} (S_R^+ S_{R+\delta}^- + S_R^- S_{R+\delta}^+) + S_R^z S_{R+\delta}^z \quad (16)$$

Representasi Holstein pada Persamaan (15) digunakan untuk mengganti operator spin menjadi

$$H = JNS^2 \frac{z}{2} + JS \sum_{R,\delta} (a_R^+ a_{R+\delta}^- + a_R^- a_{R+\delta}^+ - a_R^+ a_R^- - a_{R+\delta}^+ a_{R+\delta}^-) \quad (17)$$

dengan  $z$  adalah cacah dari tetangga terdekat untuk kekisi hiperkubik yang berkaitan dengan dimensi kekisi  $z = 2d$ . Kemudian menggunakan transformasi Fourier

$$a_R^- = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{-ik \cdot R} a_k^-$$

$$a_R^+ = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ik \cdot R} a_k^+ \quad (18)$$

serta menggunakan hubungan komutasi boson, didapat

$$H = JNS^2 \frac{z}{2} - 2JS \sum_k \sum_{\delta} (1 - \cos(k \cdot \delta)) a_k^+ a_k^- \quad (19)$$

dengan  $\sum_R \exp^{i(k-k') \cdot R} = N \delta_{kk'}$ . Dengan mendefinisikan

$$\gamma_k = \frac{2}{z} \sum_{\delta} \cos(k \cdot \delta) \quad (20)$$

akhirnya Persamaan (19) dapat ditulis

$$H = JNS^2 \frac{z}{2} - \sum_k \omega_k a_k^+ a_k^- \quad (21)$$

dengan

$$\omega_k = JSz(1 - \gamma_k) \quad (22)$$

yang merupakan hubungan dispersi magnon pada kekisi hiperkubik ferromagnet.

Pada temperatur nol mutlak, tidak ada partikel boson (magnon) pada sistem ( $\langle a_k^+ a_k^- \rangle = 0$ ). Kemudian dari Persamaan (21), energi dasar sistem adalah

$$E_0 = JNS^2 z/2 \quad (23)$$

### c. Kasus Antiferromagnet

Pada sistem ini spin cenderung bersifat anti-paralel satu sama lain, berbeda dengan ferromagnet yang spinnya bersifat paralel. Pada kasus kekisi hiperkubik, kekisi dapat dipisahkan menjadi dua subkekisi, *spin up* dan *spin down*.

Ada dua cara untuk mengaplikasikan representasi Holstein-Primakoff ke model Heisenberg antiferromagnet. Cara pertama adalah menggunakan representasi Holstein-Primakoff yang berbeda untuk setiap subkekisi. Untuk subkekisi *spin up*, digunakan Persamaan (13), dan untuk subkekisi *spin down* digunakan

$$S_R^+ = \sqrt{2S} b_R^+ \left( 1 - \frac{b_R^+ b_R^-}{2S} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$S_R^- = \sqrt{2S} \left( 1 - \frac{b_R^+ b_R^-}{2S} \right)^{\frac{1}{2}} b_R^-$$

$$S_R^z = -S + b_R^+ b_R^- \quad (24)$$

dengan  $b_R^+$  dan  $b_R^-$  adalah operator boson yang mematuhi peraturan yang sama dengan operator boson pada Persamaan (13).

Cara yang kedua adalah dengan merotasi subkekisi *spin down* ke kerangka lokalnya, semua spin langsung ke arah  $+z$ , sehingga dapat digunakan Persamaan (13) untuk kedua sub-kekisi. Transformasi rotasi memenuhi (Aurbach, 1994: 124)

$$\begin{aligned} \tilde{S}_R^z &= -S_R^z \\ \tilde{S}_R^x &= S_R^x \\ \tilde{S}_R^y &= -S_R^y \end{aligned} \quad (25)$$

kemudian didapat

$$\begin{aligned} \tilde{S}_R^- &= S_R^+ \\ \tilde{S}_R^+ &= S_R^- \end{aligned} \quad (26)$$

Dengan menggunakan representasi rotasi, Hamiltonian dari model Heisenberg antiferromagnet, dan berdasarkan Persamaan (11) dapat ditulis

$$H = J \sum_{R,\delta} S_R^z \tilde{S}_R^z - \frac{1}{2} (S_R^+ \tilde{S}_{R+\delta}^- + S_R^- \tilde{S}_{R+\delta}^+) \quad (27)$$

pada kasus antiferromagnet, konstanta pertukaran bernilai negatif ( $J < 0$ ).

Subtitusikan representasi Holstein-Primakoff (Persamaan (15)), Hamiltoniannya adalah:

$$H = JNS^2 \frac{z}{2} - JS \sum_{R,\delta} (a_R^+ a_R^- + a_{R+\delta}^+ a_{R+\delta}^- + a_R^- a_{R+\delta}^- + a_R^+ a_{R+\delta}^+) \quad (28)$$

Persamaan yang memiliki lebih dari dua operator boson kembali dieliminasi. Dengan menggunakan transformasi Fourier didapat

$$H = JNS^2z/2 - JSz \sum_k (a_k^+ a_k^- + \frac{1}{2} \gamma_k (a_k^- a_{-k}^- + a_k^+ a_{-k}^+)) \quad (29)$$

dengan  $\gamma_k$  didefinisikan oleh

$$\gamma_k = \frac{2}{z} \sum_{\delta} e^{i(k \cdot \delta)} \quad (30)$$

Untuk mendapatkan hubungan dispersi, Hamiltonian dapat diubah dengan menggunakan transformasi Bogoliubov

$$\begin{aligned} a_k^- &= \cosh(\theta_k) \alpha_k^- + \sinh(\theta_k) \alpha_{-k}^+ \\ a_k^+ &= \cosh(\theta_k) \alpha_k^+ + \sinh(\theta_k) \alpha_{-k}^- \end{aligned} \quad (31)$$

dan menggunakan aturan komutasi boson  $[\alpha_k^-, \alpha_{k'}^+] = \delta_{kk'}$  ;  $[\alpha_k^-, \alpha_{k'}^-] = [\alpha_k^+, \alpha_{k'}^+] = 0$ , didapatkan:

$$\begin{aligned} H = & JNS^2z/2 - JSz \sum_k [(\cosh(2\theta_k) + \gamma_k \sinh(2\theta_k)) \alpha_k^+ \alpha_k^- \\ & + \frac{1}{2} (\sinh(2\theta_k) + \gamma_k \cosh(2\theta_k)) (\alpha_k^+ \alpha_{-k}^+ + \alpha_k^- \alpha_{-k}^-) \\ & + \sinh^2(\theta_k) + \frac{1}{2} \gamma_k \sinh(2\theta_k)] \end{aligned} \quad (32)$$

dengan  $\cosh^2(\theta_k) - \sinh^2(\theta_k) = 1$  dan  $\cosh^2(\theta_k) + \sinh^2(\theta_k) = \cosh(2\theta_k)$ .

Untuk menghilangkan  $\alpha_k^+ \alpha_{-k}^+$  dan  $\alpha_k^- \alpha_{-k}^-$  pada Persamaan (32), maka

$$\sinh(2\theta_k) + \gamma_k \cosh(2\theta_k) = 0$$

dengan

$$\gamma_k = -\tanh(2\theta_k) \quad (33)$$

Kemudian persamaan Hamiltoniannya menjadi

$$H = JNS^2z/2 - JSz \sum_k \left[ \frac{1}{\text{sech}(2\theta_k)} (1 - \gamma_k^2) (\alpha_k^+ \alpha_k^- + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \right] \quad (34)$$

Dengan memasukkan Persamaan (33) ke Hamiltonian dan menggunakan  $\tanh^2(2\theta_k) = 1 - \text{sech}^2(2\theta_k)$ , maka Hamiltonian dapat ditulis

$$H = JNS(S+1)z/2 - \sum_k \omega_k (\alpha_k^+ \alpha_k^- + \frac{1}{2}) \quad (35)$$

dengan

$$\omega_k = JSz \sqrt{1 - \gamma_k^2} \quad (36)$$

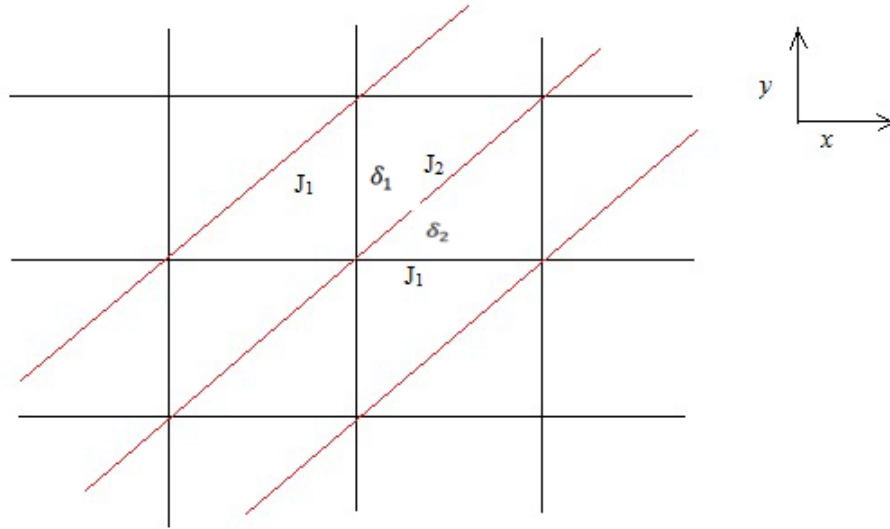
adalah hubungan dispersi magnon pada kisi hiperkubik antiferromagnet.

Energi dasar antiferromagnet dengan model Heisenberg kemudian didapat dengan rumus:

$$E_0 = JNS(S+1)z/2 - \frac{1}{2} \sum_k \omega_k \quad (37)$$

#### 4. Kasus Antiferromagnet Kekisi Segitiga

Pada kajian ini, yang dikaji adalah spin kekisi antiferromagnet yang berbentuk segitiga anisotropik. Kekisi segitiga anisotropik yang diteliti dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 6: Kekisi segitiga anisotropik

Berdasarkan Gambar (6) model Heisenberg dapat diberikan dengan rumus

$$H = \sum_R J_2 S_R \cdot S_{R+\delta_1+\delta_2} + J_1 S_R \cdot S_{R+\delta_1} + J_1 S_R \cdot S_{R+\delta_2} \quad (38)$$

Pada kekisi balik interaksi tukar dapat ditulis

$$J(k) = \sum_{\delta} J(\delta) e^{-ik \cdot (\delta)} \quad (39)$$

dengan  $k$  merupakan vektor gelombang pada zona Brillouin kekisi, yang didapat dari

$$k_x = 2\pi \frac{n_1}{N_1} \quad \text{dan} \quad k_y = 2\pi \frac{n_2}{N_2} \quad (40)$$

dengan  $n_1 = -\frac{N_1}{2}, \dots, \frac{N_1}{2} - 1$  dan  $n_2 = -\frac{N_2}{2}, \dots, \frac{N_2}{2} - 1$



Berdasarkan Gambar (6) dan Persamaan (39) didapatkan penyelesaian  $J(k)$

$$J(k) = J_2 \cos(k_x + k_y) + J_1 \cos(k_x) + J_1 \cos(k_y) \quad (41)$$

dengan  $k = Q$  merupakan vektor gelombang keteraturan. Nilai  $Q$  dapat ditentukan dari

$$\frac{\partial J(Q)}{\partial Q_x} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial J(Q)}{\partial Q_y} = 0 \quad (42)$$

Untuk menyelesaikan persamaan di atas dapat digunakan metode Newton-Raphson.

Pada sistem keadaan dasar, spin ditransformasi ke dalam kerangka acuan lokal  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  sehingga arah spin klasik berada pada arah  $\bar{z}$ . Transformasi spin adalah sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} S_R^x \\ S_R^y \\ S_R^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(Q.R) & -\sin(Q.R) \\ 0 & \sin(Q.R) & \cos(Q.R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_R^{\bar{x}} \\ S_R^{\bar{y}} \\ S_R^{\bar{z}} \end{pmatrix} \quad (43)$$

Dengan menggunakan transformasi di atas, maka Hamiltonian sistem akan menjadi:

$$\begin{aligned} H = & J_1 \sum_R [S_R^{\bar{x}} S_{R+\delta_1}^{\bar{x}} + (S_R^{\bar{z}} S_{R+\delta_1}^{\bar{z}} + S_R^{\bar{y}} S_{R+\delta_1}^{\bar{y}}) \cos(Q.\delta_1) \\ & + (S_R^{\bar{y}} S_{R+\delta_1}^{\bar{y}} - S_R^{\bar{z}} S_{R+\delta_1}^{\bar{z}}) \sin(Q.\delta_1) \\ & + S_R^{\bar{x}} S_{R+\delta_2}^{\bar{x}} + (S_R^{\bar{z}} S_{R+\delta_2}^{\bar{z}} + S_R^{\bar{y}} S_{R+\delta_2}^{\bar{y}}) \cos(Q.\delta_2) \\ & + S_R^{\bar{y}} S_{R+\delta_2}^{\bar{y}} - S_R^{\bar{z}} S_{R+\delta_2}^{\bar{z}}) \sin(Q.\delta_2)] \\ & + J_2 \sum_R [S_R^{\bar{x}} S_{R+\delta_1+\delta_2}^{\bar{x}} + (S_R^{\bar{z}} S_{R+\delta_1+\delta_2}^{\bar{z}} + S_R^{\bar{y}} S_{R+\delta_1+\delta_2}^{\bar{y}}) \cos(Q.(\delta_1 + \delta_2)) \end{aligned}$$

$$+(S_R^{\bar{y}}S_{R+\delta_1+\delta_2}^{\bar{y}}-S_R^{\bar{z}}S_{R+\delta_1+\delta_2}^{\bar{z}})\sin(Q\cdot(\delta_1+\delta_2))-B\sum_R S_R^{\bar{z}} \quad (44)$$

Persamaan di atas kemudian dikalkulasikan dengan menggunakan representasi Holstein-Primakoff dan transformasi Fourier kekisi. Dikarenakan interaksi boson-boson diabaikan, maka representasi Holstein-Primakoff dapat disederhanakan menjadi:

$$H = NS^2J_Q + NSJ_Q - NBS + S\sum_k A_k(a_k^+a_k^- + a_{-k}^-a_{-k}^+) - B_k(a_{-k}^+a_k^+ + a_{-k}^-a_k^-) \quad (45)$$

dengan

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{2}J_k + \frac{1}{4}J_{Q-k} + \frac{1}{4}J_{Q+k} - J_Q + \frac{1}{2}(B/S) \\ B_k &= \frac{1}{2}J_k - \frac{1}{4}J_{Q-k} + \frac{1}{4}J_{Q+k} \end{aligned} \quad (46)$$

dan  $J_Q = J(Q)$  yang telah didefinisikan oleh Persamaan (41).

Dengan menggunakan transformasi Bogoliubov berikut

$$\begin{aligned} a_k^- &= u_k\alpha_k^- + v_k\alpha_{-k}^+ \\ a_k^+ &= v_k\alpha_k^- + u_k\alpha_{-k}^+ \end{aligned} \quad (47)$$

Akhirnya diperoleh persamaan Hamiltonian

$$H = NS^2J_Q + NSJ_Q - NBS - \frac{1}{2}NB + \sum_k \omega_k(\alpha_k^+\alpha_k^- + \frac{1}{2}) \quad (48)$$

dengan

$$\omega_k = 2S\sqrt{A_k^2 - B_k^2} \quad (49)$$

yang merupakan hubungan dispersi magnon pada kekisi segitiga anisotropik. Hubung-

an dispersi akan bernilai nol saat  $k = 0$  atau  $k = \pm Q$  untuk nilai  $B = 0$ . Kemudian untuk mendapatkan nilai energi dasar digunakan rumus :

$$E_0 = NS^2J_Q + NSJ_Q - NBS - \frac{1}{2}NB + \frac{1}{2}\sum_k \omega_k \quad (50)$$

dengan  $N$  = jumlah titik kekisi;  $S$  = spin;  $J_Q$  = interaksi tukar vektor gelombang keteraturan;  $B$  = medan magnet luar;  $\omega_k$  = hubungan dispersi magnon.

Untuk mendapatkan magnetisasi subkekisi, Persamaan (44) diturunkan terhadap medan magnet

$$\frac{\partial H}{\partial B} = -\sum_R S_R^z \quad (51)$$

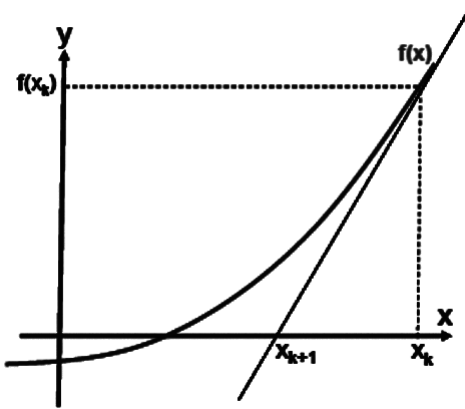
Dengan menggunakan teori Hellman-Feynman, dapat diubah menjadi :

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial B} \right\rangle = \frac{dE}{dB} \quad (52)$$

Persamaan (52) di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Euler yang merupakan metode numerik sederhana dari persamaan diferensial biasa.

## 6. Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson merupakan metode yang paling banyak digunakan untuk menentukan akar persamaan. Metode ini melakukan pendekatan terhadap kurva  $f(x)$  dengan garis singgung (gradien) pada suatu titik nilai awal. Nilai taksiran selanjutnya adalah titik potong antara garis singgung (gradien) kurva dengan sumbu x (Purwanto, 2010).



Gambar 7: Penggambaran grafis metode Newton-Raphson (Purwanto, 2010)

Berdasarkan Gambar (7) didapatkan

$$m = f'(x_k) = \frac{y}{x} = \frac{f'(x_k) - 0}{x_k - x_{k+1}}$$

sehingga

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (53)$$

Persamaan (53) kemudian disebut sebagai rumus Newton-Raphson.

## 7. Metode Euler

Metode Euler adalah salah satu dari metode penurunan persamaan diferensial biasa yang paling sederhana. Metode Euler diturunkan dari deret Taylor. Contohnya fungsi  $y_i$  adalah fungsi yang kontinu, maka dengan menggunakan deret Taylor (Supriyanto, 2006: 1)

$$y_{i+1} = y_i + y'_i \frac{\Delta x}{1!} + y''_i \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots \quad (54)$$

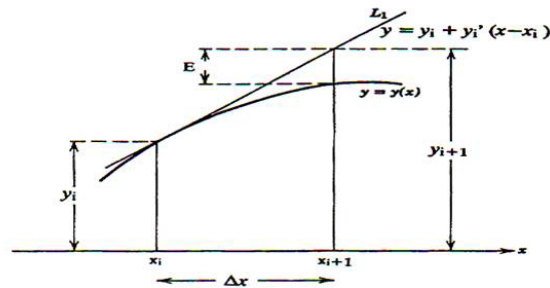
Apabila nilai  $\Delta x$  kecil, maka suku yang mengandung pangkat lebih tinggi dari dua adalah sangat kecil dan dapat diabaikan, sehingga persamaan dapat disederhanakan menjadi :

$$y_{i+1} = y_i + y'_i \Delta x \quad (55)$$

Dengan membandingkan Persamaan (54) dan Persamaan (55) dapat disimpulkan bahwa  $y'_i = f(x_i, y_i)$ , sehingga Persamaan (55) dapat ditulis menjadi:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \Delta x \quad (56)$$

dengan  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Nilai  $y_{i+1}$  dapat diprediksi dengan menggunakan gradien fungsi di titik  $x_i$  untuk di plot linier pada jarak  $\Delta x$ . Secara grafis dapat dilihat pada gambar



Gambar 8: Metode Euler (Supriyanto, 2006: 1)

## B. Kerangka Pikir

Model yang digunakan dalam kajian ini adalah model Heisenberg yang menyatakan secara mikroskopik interaksi berpasangan antara spin pada tempat kisi yang berbeda. Pada model Heisenberg, spin sebagai operator vektor ditinjau dalam ruang tiga dimensi, tetapi pada kajian kali ini spin ditinjau dalam ruang dua dimensi dengan

orientasi sumbu  $z$ . Untuk menyelesaikan kasus antiferromagnet kemudian digunakan metode *Linear Spin Wave*.

Dalam menentukan energi keadaan dasar sistem antiferromagnet kekisi segitiga anisotropik, persamaan Hamiltonian model Heisenberg yang digunakan adalah Persamaan (48). Sebelumnya persamaan Hamiltonian tersebut dikenakan terhadap representasi Holstein-primakoff, transformasi Fourier dan transformasi Bogoliubov. Persamaan Hamiltonian tersebut kemudian dikenakan terhadap fungsi keadaan  $\psi$  untuk mendapatkan persamaan energi keadaan dasarnya. Untuk mendapatkan persamaan magnetisasi, Persamaan (44) dideferensialkan terhadap medan magnet luar sehingga magnetisasi merupakan penjumlahan dari nilai spin pada orientasi sumbu  $z$ . Untuk mempermudah perhitungan, persamaan Hamiltonian tersebut disederhanakan menggunakan teori Hellman-Feynman sehingga nilai magnetisasi dapat dihitung dengan mendeferensialkan energi keadaan dasar terhadap medan magnet luarnya. Adapun medan magnet luar yang diberikan dalam perhitungan nilai magnetisasi ini adalah sebesar 0,001.