

**APLIKASI SISTEM PERSAMAAN LINEAR ALJABAR *MAX-PLUS*
DALAM MENGOPTIMALISASI WAKTU PRODUKSI
BAKPIA PATHOK JAYA “25” DAERAH ISTIMEWA YOGYAKARTA**

SKRIPSI

**Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan
guna Memperoleh Gelar Sarjana *Sains***



**oleh:
Mustofa Arifin
08305144013**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2012**

PERSETUJUAN

SKRIPSI

**APLIKASI SISTEM PERSAMAAN LINEAR ALJABAR MAX-PLUS
DALAM MENGOPTIMALISASI WAKTU PRODUKSI
BAKPIA PATHOK JAYA '25" DAERAH ISTIMEWA YOGYAKARTA**

Disusun oleh :

Nama : Mustofa Arifin

NIM : 08305144013

Prodi : Matematika

Skripsi yang berjudul "Aplikasi Sistem Persamaan Linear Aljabar *Max-Plus* Dalam Mengoptimisasi Waktu Produksi Bakpia Pathok Jaya "25" Daerah Istimewa Yogyakarta" ini telah disetujui oleh pembimbing untuk diujikan.

Disetujui pada tanggal :

28 September 2012

Dosen Pembimbing



Musthofa M.Sc

NIP. 19801107 200604 1 001

PENGESAHAN
SKRIPSI DENGAN JUDUL
APLIKASI SISTEM PERSAMAAN LINEAR ALJABAR *MAXPLUS*
DALAM MENGOPTIMALISASI WAKTU PRODUKSI
BAKPIA PATHOK JAYA "25" DAERAH ISTIMEWA YOGYAKARTA

Yang Disusun Oleh:

Nama : Mustofa Arifin

NIM : 08305144013


Prodi : Matematika

Skripsi ini telah diuji di depan Dewan Penguji Skripsi
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
pada tanggal 10 Oktober 2012 dan dinyatakan LULUS

DEWAN PENGUJI

Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
<u>Musthofa M.Sc</u> NIP. 198011072006041001	Ketua Penguji		19-10-2012
<u>Nur Hadi W., M.Eng</u> NIP. 197801192003121002	Sekretaris Penguji		16-10-2012
<u>Dr. Agus Maman A.</u> NIP. 197008281995021001	Penguji Utama		19-10-2012
<u>Dr. Sugiman</u> NIP. 196502281991011001	Penguji Pendamping		16-10-2012

Yogyakarta, Oktober 2012
Fakultas MIPA
Universitas Negeri Yogyakarta
Dekan


Dr. Hartono
NIP. 196203291987021002

SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya :

Nama : Mustofa Arifin

NIM : 08305144013

Fakultas : MIPA

Program Studi / Jurusan : Matematika / Pendidikan Matematika

Judul TAS : Aplikasi Sistem Persamaan Linear Aljabar *Max-Plus* Dalam Mengoptimisasi Waktu Produksi Bakpia Pathok Jaya “25” Daerah Istimewa Yogyakarta

Menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya tidak berisi materi yang telah dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian studi di perguruan tinggi lain kecuali pada bagian-bagian tertentu yang saya ambil sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang telah lazim. Apabila ternyata terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya dan saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan peraturan yang berlaku.

Yogyakarta, 28 September 2012

Yang menyatakan,



Mustofa Arifin

NIM. 08305144013

MOTTO

“Barang siapa berjalan disuatu jalan untuk menuntut ilmu maka Allah akan mempermudah jalan ke Syurga”

(HR Muslim)

“... Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat.”

(Q.S Al-Mujaadilah :11)

“Kesempatan datangnya seperti awan berlalu, Karena itu pergunakanlah selagi dia Nampak di hadapanmu.”

(Ali Bin Abi Thalib)

“Aku tidak bermaksud kecuali (mendatangkan) perbaikan selama aku masih berkesanggupan. Dan tidak ada taufik bagiku melainkan dengan (pertolongan) Allah” (QS. Hud: 88) “

PERSEMBAHAN

Syukur Alhamdulillah kupanjatkan kepada Allah SWT

Dan

Kupersembahkan karya ini untuk kalian yang sangat berarti dalam hidupku

Bapak, Ibu Tercinta...

Yang telah memberikan segalanya untuk putranya ini dengan penuh kasih sayang

Dari beliau semangat, motivasi, inspirasi, ini...

Dengan harapan semoga ini bisa membahagiakan kalian sebagai langkah awalku....

Uni Ngilmatus Erawati, Lilih Richati Chasanah, Dessy Amalia Saputri

Muttaqien Mafaza, Daryanto

Untuk segala saran, motivasi, nasehat kepada saudara laki-lakinya tersayang...

Novi Sri Purwaningsih, Hendra Listya Kurniawan, Nenda Kusuma Raharja

Setiawan Hidayat, Ridwan Putu Naja

Rahma Meigarini, Aulia Septiadi Dan kawan-kawan MatSwa'08 lainnya

Yang telah memberikan semangat, saran, dan kebahagiaan pada hari hariku....

Merekalah Sahabat-Sahabat Terbaikku...

Tiada kata yang bisa kuucapkan selain betapa beruntungnya diriku memiliki kalian....

**APLIKASI SISTEM PERSAMAAN LINEAR ALJABAR MAX-PLUS
DALAM MENGOPTIMALISASI WAKTU PRODUKSI
BAKPIA PATHOK JAYA “25” DAERAH ISTIMEWA YOGYAKARTA**

**Oleh
Mustofa Arifin
NIM 08305144013**

ABSTRAK

Bakpia Pathok Jaya “25” merupakan oleh-oleh khas Yogyakarta yang berkembang pesat dan banyak peminatnya. Dalam kegiatan produksinya, waktu merupakan hal penting yang erat hubungannya dengan hasil produksi bakpia. Pada produksi Bakpia Pathok Jaya “25”, waktu produksi yang digunakan kurang efektif dan efisien, sehingga hasil produksi tidak maksimal. Dari permasalahan tersebut dilakukan penelitian untuk mengoptimalkan waktu produksi, sehingga dapat meningkatkan hasil produksi Bakpia Pathok Jaya “25”.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah Sistem *Linear Max-Plus Waktu Invariant Satu Input Satu Output* (SLMI SISO). Penggunaan sistem ini bertujuan untuk mengoptimalkan waktu produksi Bakpia Pathok Jaya “25”, sehingga waktu produksi menjadi optimal. Proses perhitungan dalam penelitian ini menggunakan program *matlab*.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode tersebut dalam sistem produksi Bakpia Pathok Jaya “25” merupakan Sistem *Event Diskret* (SKD) Aljabar *Max-Plus*, yang dinyatakan dengan persamaan $\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k) \oplus B \otimes \mathbf{u}(k+1)$ dan $\mathbf{y}(k) = C \otimes \mathbf{x}(k)$ untuk $k = 1, 2, 3, \dots, 15$, dengan kondisi awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$, dan $C \in \mathbb{R}_{\max}^{l \times n}$. Vektor $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}_{\max}^n$ menyatakan keadaan (*state*), $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}_{\max}^m$ adalah vektor *input* dan $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}_{\max}^l$ adalah vektor *output* sistem saat waktu ke- k . *Input-Output* SLMI (A, B, C, \mathbf{x}_0) diberikan suatu bilangan bulat positif p . Jika vektor *output* $\mathbf{y} = [y(1), y(2), \dots, y(p)]^T$ dan vektor *input* $\mathbf{u} = [u(1), u(2), \dots, u(p)]^T$, maka $\mathbf{y} = K \otimes \mathbf{x}_0 \oplus H \otimes \mathbf{u}$. Untuk Penyelesaian masalah *input* paling lambat pada SLMI (A, B, C, \mathbf{x}_0) jika $C \otimes B \neq \varepsilon$ dan $K \otimes \mathbf{x}_0 \leq_m \mathbf{y}$, maka penyelesaian masalah *input* paling lambat pada SLMI (A, B, C, \mathbf{x}_0) diberikan oleh $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}(1), \hat{u}(2), \dots, \hat{u}(p)]^T$ dengan $-\hat{u}(k) = \max_{1 \leq i \leq p} (-y(i) + H_{i,k})$ untuk $k = 1, 2, 3, \dots, 15$, sehingga penyelesaian masalah minimasi simpangan maksimum *output* diberikan oleh $\tilde{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}} \otimes \frac{\delta}{2}$ dengan $\hat{\mathbf{u}}$ merupakan subpenyelesaian terbesar sistem $H \otimes \mathbf{u} = \mathbf{y}$ dan $\delta = \max_i |(y - H \otimes \hat{\mathbf{u}})_i|$. Setelah metode tersebut diaplikasikan pada sistem produksi ini, diperoleh bagan proses produksi, model matematis, jadwal periodik, dan jadwal pemesanan produksi Bakpia Pathok Jaya “25”, sehingga waktu produksi dapat dioptimalisasi.

Kata kunci: Sistem Persamaan Linear, Aljabar Max-Plus, Optimalisasi Produksi

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, dzat penguasa alam semesta yang telah melimpahkan atas segala karunia, rahmat, dan hidayah-Nya sehingga skripsi dengan judul "Aplikasi Sistem Persamaan Linear Aljabar Max-Plus dalam Mengoptimalkan Waktu Produksi Bakpia Pathok Jaya "25" Daerah Istimewa Yogyakarta" ini dapat diselesaikan. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu (S1) pada Program Studi Statistika, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta .

Tugas akhir ini dapat tersusun atas bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Hartono selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam yang telah memberikan kelancaran pelayanan dalam urusan akademik.
2. Bapak Dr. Sugiman selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY yang telah memberikan izin kepada penulis untuk menyusun skripsi dan memberikan kelancaran pelayanan dalam urusan akademik. Selain itu, selaku dosen penguji skripsi yang telah berkenan menguji dan memberikan saran serta kritikan yang membangun kepada penulis, sehingga dapat menyusun skripsi ini dengan lebih baik.
3. Bapak Dr. Agus Maman Abadi, M.Si. selaku Koordinator Program Studi Matematika FMIPA UNY yang telah memberikan izin penulis untuk membuat skripsi dan dosen penguji skripsi yang telah berkenan menguji dan memberikan saran serta kritikan yang membangun kepada penulis, sehingga dapat menyusun skripsi ini dengan lebih baik.
4. Dr. Dhoriva Urwatul Wutsqa selaku Pembimbing Akademik yang telah memberikan dukungan, saran, dan kritik yang memotivasi penulis untuk menjadi lebih baik dalam menjalani proses perkuliahan..
5. Musthofa, M.Si. selaku Dosen Pembimbing yang dengan penuh kesabaran dan kasih sayang telah memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis.

6. Nur Hadi W., M. Eng. selaku selaku dosen penguji skripsi yang telah berkenan menguji dan memberikan saran serta kritikan yang membangun kepada penulis sehingga dapat menyusun skripsi ini dengan lebih baik.
7. Bapak Arlen Sanjaya selaku pemilik Bakpia Pathok Jaya "25" Daerah Istimewa Yogyakarta dan segenap karyawannya yang telah banyak membantu, sehingga penelitian dan skripsi ini bisa berjalan dengan lancar.
8. Rekan-rekan Mahasiswa Matematika Swadana 2008 dan Teman-teman KKN 2008 Kromodangsari yang telah memberi bantuan dan motivasi.
9. Serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang telah banyak membantu penulis, sehingga skripsi ini bisa terselesaikan dengan baik.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangan, sehingga perlu dilakukan pembenahan lagi. Oleh karena itu, penulis mengharap saran dan kritik yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi para pembaca umumnya.

Yogyakarta, 13 Oktober 2012

Yang menyatakan,

Mustofa Arifin
NIM. 08305144013

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
SURAT PERNYATAAN	iv
MOTTO.....	v
PERSEMBAHAN.....	vi
ABSTRAK.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR TABEL.....	xiv
DAFTAR LAMPIRAN.....	xv
DAFTAR SIMBOL.....	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Identifikasi Masalah	3
C. Pembatasan Masalah.....	3
D. Perumusan Masalah.....	5
E. Tujuan	5
F. Manfaat Penelitian	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
A. Aljabar <i>Max-Plus</i>	7
1. Pengertian Aljabar <i>Max-Plus</i>	7
2. Matriks dan Vektor Aljabar <i>Max-Plus</i>	7
a. Matriks Aljabar <i>Max-Plus</i>	8
b. Vektor Aljabar <i>Max-Plus</i>	10

B. Matriks Atas Aljabar <i>Max-Plus</i>	10
C. Semimodul Atas Aljabar <i>Max-Plus</i>	13
D. Sistem Persamaan Linear <i>Max</i> $A \otimes x = b$	23
E. Sistem <i>Event</i> Diskret	34
F. Sistem Linear <i>Max-Plus Waktu Invariant</i>	44

BAB III METODE PENELITIAN

A. Waktu Dan Tempat Penelitian.....	54
B. Desain (Rancangan) Penelitian.....	54
C. Penentuan Objek Penelitian.....	55
D. Metode Penelitian.....	55
1. Jenis Penelitian.....	55
2. Sifat Penelitian.....	55
3. Pengumpulan Data.....	56
a. Observasi.....	56
b. Wawancara atau <i>interview</i>	56
4. Pendekatan Penelitian.....	57
5. Analisis Data.....	57

BAB IV PEMBAHASAN

A. Hasil Penelitian.....	58
B. Bagan Pemodelan Produksi Bakpia Pathok Jaya “25”.....	62
C. Asumsi-Asumsi Dalam Sistem Produksi Bakpia Pathok Jaya “25”.....	64
D. Pemodelan Sistem Produksi Bakpia Pathok Jaya “25” dengan SLMI Aljabar <i>Max-Plus</i>	65
E. Analisis <i>Input-Output</i> Waktu Produksi Bakpia Pathok Jaya “25”.....	75

BAB V PENUTUP

A. Kesimpulan 86

B. Saran..... 87

DAFTAR PUSTAKA..... 88

LAMPIRAN..... 90

.

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 1 : Contoh Sistem Produksi Sederhana (De Schutter,1996:5)..	35
Gambar 2 : Sistem Produksi Seri.....	39
Gambar 3 : Sistem Produksi Assembly.....	40
Gambar 4 : Sistem Produksi Splitting.....	40
Gambar 5 : Sistem Produksi Paralel.....	41
Gambar 6 : Sistem Produksi Flexibel dengan beberapa aktifitas.....	42
Gambar 7 : Ruang Etalase Bakpia Pathok Jaya “25”.....	54
Gambar 8 : Bagan Pemodelan Produksi Bakpia Pathok Jaya “25...”	62

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 1 : Hasil Perhitungan Waktu Keadaan dan <i>Input–Output</i> Sistem Produksi Bakpia Pathok Jaya “25”	79
Tabel 2 : Jadwal Periodik Produksi Bakpia Pathok Jaya “25”	81
Tabel 3 : Jadwal Pemesanan Bakpia Pathok Jaya “25” dengan Waktu Mulai Memasukan Bahan Sampai Waktu Pengambilan Produk.....	84
Tabel 4 : Data Sistem Produksi Bakpia Pathok Jaya “25” Hari ke-1....	90
Tabel 5 : Data Sistem Produksi Bakpia Pathok Jaya “25” Hari ke-2.....	90
Tabel 6 : Data Sistem Produksi Bakpia Pathok Jaya “25” Hari ke-3.....	91
Tabel 7 : Data Sistem Produksi Bakpia Pathok Jaya “25” Hari ke-4.....	92
Tabel 8 : Data Sistem Produksi Bakpia Pathok Jaya “25” Hari ke-5....	92
Tabel 9 : Data Sistem Produksi Bakpia Pathok Jaya “25” Hari ke-6.....	93
Tabel 10: Data Sistem Produksi Bakpia Pathok Jaya “25” Hari ke-7.....	94

DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 : Data Hasil Penelitian Bakpia Pathok Jaya “25” Untuk Memproduksi 1250 <i>Pack</i> Bakpia Isi 20.....	90
Lampiran 2 : Hasil Output Program Matlab (file: maxio.m).....	95
Lampiran 3 : Hasil Output Program Matlab (file: kx0.m)	97
Lampiran 4 : Hasil Output Program Matlab (file: Hu.m)	99
Lampiran 5 : Hasil Output Program Matlab (file:maxioopt.m).....	101
Lampiran 6 : Daftar Pertanyaan Wawancara.....	104
Lampiran 7 : Transkrip Hasil Wawancara.....	106
Lampiran 8 : <i>List Program Matlab</i>	111

DAFTAR SIMBOL

$(\mathbb{R}, +, \times)$: Himpunan tak kosong \mathbb{R} yang dilengkapi dengan dua operasi biner $+$ dan \times .
$(S, +, \times)$: Himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan dua operasi biner $+$ dan \times .
\mathbb{R}_e	: $\mathbb{R} \cup \{e\}$
\mathbb{R}_ε	: Himpunan bilangan real digabung dengan $\{-\infty\}$: $\mathbb{R}_\varepsilon := \mathbb{R} \cup \{e\}$
\mathbb{R}_{\max}	: Aljabar max-plus yang dilengkapi dengan dua operasi biner \oplus dan \otimes : $\mathbb{R}_{\max} := (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$
$(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus)$: Semigrup komutatif dengan elemen netral
$(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \otimes)$: Semigrup komutatif dengan elemen identitas 0
\mathbb{R}	: Himpunan semua bilangan real.
\oplus	: Operasi max.
\otimes	: Operasi plus (+).
\cup	: Gabungan
ε	: Elemen netral terhadap operasi maksimum ($\varepsilon := -\infty$).
e	: Elemen satuan terhadap operasi \times ($e := 0$).
$x^{\otimes n}$: Pangkat n dari x dalam aljabar max-plus.
$x^{\otimes -1}$: Invers dari x dalam aljabar max-plus
\leq_m	: Relasi “kurang dari atau sama dengan” dalam aljabar max-plus.
$\mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$: Himpunan matriks aljabar max-plus berordo $m \times n$.
$A^{\otimes k}$: Pangkat k pada matriks aljabar max-plus.
$\mathcal{E}_{m \times n}$: Matriks nol aljabar max-plus.
$E_{n \times n}$: Matriks identitas aljabar max-plus.
δ	: Delta
A_{ij}	: Matriks A
B_{ij}	: Matriks B
C_{ij}	: Matriks C
\underline{m}	: batas bawah interval m
\underline{n}	: batas bawah interval n
\forall	: Setiap
\exists	: Ada
\mathbb{N}	: himpunan bilangan asli
\in	: Elemen
α, β	: Skalar

$x \leq y$: x berelasi dengan y
$x < y$: x berelasi dengan y dan x tidak sama dengan y
$x \leq_m y$: Relasi yang didefinisikan pada \mathbb{R}_{\max} : $x \leq_m y$ $\Leftrightarrow x \oplus y = y$
x'	: Penyelesaian terbesar persamaan linear
\hat{x}	: Subpenyelesaian terbesar persamaan linear maxplus
$\ \cdot \ _{\infty}$: Maximum Absolute (Norm)
$u(k)$: Vektor input
$y(k)$: Vektor output
$x(k)$: Vektor keadaan (state)
\hat{u}	: Barisan input paling lambat
\tilde{u}	: Barisan input minimasi simpangan maksimum
\hat{y}	: Barisan output paling lambat
\tilde{y}	: Barisan output minimasi simpangan maksimum
y^T	: Transpose vektor output y
u^T	: Transpose vektor input u
SLMI	: Sistem Linear Max-Plus Invariant
MIMO	: Multi Input Multi Output
SISO	: Satu Input Satu Output