 ISBN : 978-979-16353-8-7

P – 5

KEMAMPUAN BERPIKIR MATEMATIS TINGKAT LANJUT (*ADVANCED MATHEMATICAL THINKING*) DALAM MATA KULIAH STATISTIKA MATEMATIKA 1

Andri Suryana
Universitas Indraprasta PGRI Jakarta
andri_unindra@yahoo.com

Abstrak

Materi matematika di tingkat perguruan tinggi semakin sulit untuk dipelajari. Perubahan dari berpikir elementer ke berpikir matematis tingkat lanjut melibatkan suatu transisi yang signifikan. Matematika di perguruan tinggi bergeser menuju kerangka formal sistem aksiomatik dan bukti matematika sehingga diperlukan kemampuan berpikir matematis tingkat lanjut. Salah satu mata kuliah yang membutuhkan pemikiran matematika tingkat lanjut adalah statistika matematika 1. Sulitnya mempelajari materi Statistika Matematika 1 karena konsep-konsep yang tertuang dalam mata kuliah tersebut terlalu abstrak, maka mahasiswa membutuhkan pemikiran matematika tingkat lanjut untuk mempelajarinya. Kemampuan berpikir Matematika tingkat Lanjut (*Advance Mathematical Thinking*) meliputi kemampuan representasi matematis, kemampuan abstraksi matematis, menghubungkan kemampuan representasi dan abstraksi matematis, kemampuan berpikir kreatif matematis, serta kemampuan menyusun bukti matematis.

Kata Kunci : kemampuan berpikir matematis tingkat lanjut, kemampuan representasi matematis, kemampuan abstraksi matematis, kemampuan berpikir kreatif matematis, kemampuan menyusun bukti matematis, statistika matematika 1

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Pendidikan merupakan suatu usaha manusia untuk menuju ke arah hidup yang lebih baik. Agar tujuan pendidikan bisa tercapai dengan seoptimal mungkin, maka dosen sebagai pendidik dituntut untuk selalu mengembangkan proses pembelajaran agar sesuai dengan kondisi dan zaman sekarang. Salah satu kecakapan hidup (*life skill*) yang perlu dikembangkan melalui proses pendidikan adalah keterampilan berpikir (Depdiknas, 2004), karena kemampuan seseorang untuk dapat berhasil dalam kehidupannya antara lain ditentukan oleh keterampilan berpikirnya, terutama dalam upaya memecahkan masalah-masalah dalam kehidupan yang dihadapi. Perubahan orientasi pendidikan saat ini dengan menempatkan mahasiswa sebagai pusat perhatian menuntut para dosen untuk lebih kreatif dalam mengelola kegiatan pembelajaran. Dosen dituntut mampu menggeser penekanan kegiatan pembelajaran dari apa bahan yang akan dipelajari mahasiswa ke bagaimana memperkaya pengalaman belajar mahasiswa.

Salah satu cara yang dapat dilakukan untuk mencapai tujuan tersebut adalah dengan mengembangkan program pendidikan yang berfokus pada pengembangan kemampuan berpikir. Pengembangan kemampuan tersebut antara lain dapat dilakukan melalui matematika yang secara substansial dapat mendorong pengembangan kemampuan berpikir mahasiswa. Karena konsep-konsep matematika tersusun secara hierarkis,

ISBN : 978-979-16353-8-7

terstruktur, logis, dan sistematis mulai dari konsep yang paling sederhana sampai pada konsep yang paling kompleks sehingga memerlukan kemampuan berpikir matematis yang baik untuk mengatasinya.

Untuk tingkat perguruan tinggi, materi matematika semakin sulit untuk dipelajari. Artigue (1998) dan Cornu (1991) mengemukakan bahwa pembelajaran matematika sering dinilai negatif oleh mahasiswa dan mereka memiliki kesulitan yang cukup besar terhadap beberapa proses matematika seperti penalaran, pemecahan masalah yang tidak rutin, dan membuktikan. Menurut Tall (1991), perubahan dari berpikir elementer ke berpikir matematis tingkat lanjut melibatkan suatu transisi yang signifikan, yaitu dari mendeskripsikan ke mendefinisikan, dari meyakinkan ke membuktikan secara logika berdasarkan pada suatu definisi. Proses peralihan tersebut merupakan suatu masalah bagi mahasiswa. Matematika di sekolah dapat dipandang sebagai kombinasi dari representasi visual, termasuk geometri dan grafik, bersama-sama dengan perhitungan dan manipulasi simbolis, sedangkan matematika di perguruan tinggi bergeser menuju kerangka formal sistem aksiomatik dan bukti matematika. Oleh karena itu, mahasiswa membutuhkan pemikiran matematika tingkat lanjut.

Salah satu mata kuliah yang membutuhkan pemikiran matematika tingkat lanjut adalah statistika matematika 1. Statistika Matematika 1 merupakan salah satu mata kuliah yang wajib ditempuh oeh mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dengan bobot 3 SKS. Prasyarat untuk menempuh mata kuliah ini adalah Kalkulus dan Statistika Dasar. Kalkulus berguna untuk penguatan nalar dan logika, sedangkan statistika dasar mengenalkan ilmu dasar statistika, meliputi probabilitas; peubah acak dan distribusi probabilitas; sampling dan distribusi sampling; estimasi titik; estimasi interval; serta uji hipotesis.

Mata kuliah Statistika Matematika 1 mempelajari teori himpunan sebagai pengantar, peluang dan distribusi, distribusi multivariat, beberapa jenis distribusi, distribusi dari fungsi peubah acak, serta konsep limit dalam distribusi. Dalam mempelajari mata kuliah tersebut, dilakukan proses pemecahan masalah. Oleh karena itu dibutuhkan pemahaman konsep (kalkulus dan statistika), definisi formal, kemampuan pemodelan matematika, teorema-teorema yang berkaitan, serta pembuktian.

Dalam praktiknya di kelas, mahasiswa mengalami kesulitan dalam mempelajarinya. Awal pembelajaran Mata Kuliah Statistika Matematika 1 langsung diberikan teori himpunan sebagai pengantar. Teori himpunan dalam mata kuliah ini disajikan dalam bentuk teoritis meliputi definisi formal, teorema, bukti, contoh kasus serta latihan soal dalam tingkat tinggi, dengan asumsi beberapa konsep dasar sudah dijelaskan pada mata kuliah Kalkulus dan Statistika Dasar. Sebagai contoh: "untuk setiap himpunan A yang memiliki 1 dimensi dan terintegralkan, misalkan $Q(A)=\int_A f(x)dx$ dengan $f(x)=6x(1-x)$, $0<x<1$ dan $Q(A)$ terdefinisi. Jika $A=\left\{x \middle| \frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}\right\}$, tentukan $Q(A)$!".

Untuk menyelesaikan soal tersebut, diperlukan pemahaman kalkulus integral. Mahasiswa masih banyak yang mengalami kesalahan dalam mengintegralkannya, baik dalam teknik pengintegralannya maupun menentukan batas integralnya. Selain itu, apabila mahasiswa disuruh menjelaskan hasil perhitungannya, mereka mengalami kebingungan dalam merepresentasikan dan mengabstraksikannya. Selain itu, mahasiswa kurang kreatif dalam menjawab soal, mereka hanya mengikuti alur yang biasa. Untuk soal pembuktian pun mereka cenderung malas dan bingung untuk memulainya.

Sulitnya mempelajari materi Statistika Matematika 1 karena konsep-konsep yang tertuang dalam mata kuliah tersebut terlalu abstrak, maka mahasiswa membutuhkan pemikiran matematika tingkat lanjut untuk mempelajarinya.

Rumusan Masalah

Adapun masalah yang dikaji dalam makalah ini adalah bagaimana kemampuan berpikir matematis tingkat lanjut dalam mata kuliah Statistika Matematika 1?

Tujuan

Tujuan dari kajian ini adalah untuk mengetahui kemampuan berpikir matematis tingkat lanjut dalam mata kuliah Statistika Matematika 1.

Manfaat

Diharapkan dengan cara mengkaji mengenai kemampuan berpikir matematis tingkat lanjut dalam mata kuliah Statistika Matematika 1, dapat menjadi suatu referensi serta wacana bagi para praktisi pendidikan matematika dalam upaya meningkatkan kualitas pembelajaran agar lebih efektif dan efisien dan hasil belajar matematika menjadi lebih baik.

PEMBAHASAN

Berpikir (Solso, 1991) merupakan proses menghasilkan representasi mental yang baru melalui transformasi informasi yang melibatkan interaksi secara kompleks antara atribut-atribut mental seperti penilaian, abstraksi, imajinasi, dan pemecahan masalah. Berpikir matematis (Mustofa, 2009) merupakan kegiatan mental yang dalam prosesnya selalu menggunakan abstraksi atau generalisasi. Berpikir matematis (Sumarmo, 2009) diklasifikasikan ke dalam dua tingkatan, yaitu kemampuan berpikir matematis tingkat rendah dan berpikir matematis tingkat tinggi. Adapun klasifikasi berpikir matematis tingkat rendah dan tinggi menurut Webb & Coxford (dalam Sumarmo, 2009) meliputi mengerjakan operasi aritmetika sederhana, penggunaan aturan langsung, bekerja dengan tugas yang algoritmik untuk klasifikasi berpikir matematis tingkat rendah, sedangkan pemahaman yang bermakna, menyusun konjektur, membuat analogi dan generalisasi, penalaran logik, *problem solving*, serta komunikasi matematika dan koneksi sebagai klasifikasi berpikir matematis tingkat tinggi.

Menurut Henningsen dan Stein (dalam Suryadi, 2004), kemampuan berpikir matematis tingkat tinggi pada hakikatnya merupakan kemampuan berpikir non-prosedural yang antara lain mencakup hal-hal kemampuan mencari dan mengeksplorasi pola untuk memahami struktur matematik serta hubungan yang mendasarinya; kemampuan menggunakan fakta-fakta yang tersedia secara efektif dan tepat untuk memformulasikan serta menyelesaikan masalah; kemampuan membuat ide-ide matematik secara bermakna; kemampuan berpikir dan bernalar secara fleksibel melalui penyusunan konjektur, generalisasi, dan jastifikasi; serta kemampuan menetapkan bahwa suatu hasil pemecahan masalah bersifat masuk akal atau logis.

Menurut Sumarmo (2011), berpikir matematis tingkat lanjut (*Advanced Mathematical Thinking*) pasti memuat berpikir matematis tingkat tinggi. Namun tidak semua berpikir matematis tingkat tinggi memuat berpikir matematis tingkat lanjut (*Advanced Mathematical Thinking*). Berpikir matematis tingkat lanjut berkaitan dengan pengenalan definisi formal dan deduksi logis. Menurut Mason (dalam Sumarmo, 2011), tiga level verifikasi dalam berpikir matematis tingkat lanjut yaitu:

1) Meyakinkan diri sendiri (*convice yourself*): meyakinkan mengapa suatu pernyataan bernilai benar;

2) Meyakinkan teman (*convice a friend)*: meyakinkan orang lain disertai dengan argumen yang terorganisasi secara koheren;
3) Meyakinkan lawan (*convice an enemy)*: meyakinkan orang lain disertai dengan argumen yang terorganisasi secara koheren, dianalisis dan diperhalus sehingga siap untuk dikritisi.

Menurut Sumarmo (2011), berpikir Matematika Tingkat Lanjut (*Advance Mathematical Thinking*) adalah kemampuan yang meliputi representasi, abstraksi, menghubungkan representasi dan abstraksi, berpikir kreatif matematis, dan membuktikan matematis.

Kemampuan Representasi Matematis

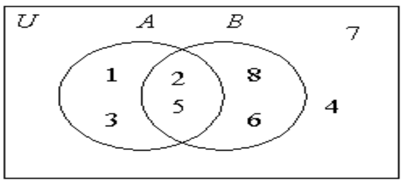
Cai, Lane dan Jakabcsin (dalam Suparlan, 2005) menyatakan bahwa representasi merupakan cara yang digunakan seseorang untuk mengemukakan jawaban atau gagasan matematis yang bersangkutan. Ragam representasi yang sering digunakan dalam mengkomunikasikan matematika antara lain tabel (*tables*), gambar (*drawing*), grafik (*graph*), ekspresi atau notasi matematis (*mathematical expressions*), serta menulis dengan bahasa sendiri, baik formal maupun informal (*written text*). Sebagai contoh dalam teori himpunan, penyajian himpunan direpresentasikan dalam bentuk :

a) Enumerasi
Contoh :
$R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$

b) Simbol-simbol Baku
Contoh :
Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }
Q = himpunan bilangan rasional
R = himpunan bilangan real

c) Notasi pembentuk himpunan
Contoh :
A adalah himpunan bilangan bulat positif yang kurang dari 5, maka notasinya adalah
$A = \{ x \mid x$ adalah bilangan bulat positif yang kurang dari 5}
atau
$A = \{ x \mid x < 5,\ x \in P\}$

d) Diagram Venn
Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8}, A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}, maka diagram Vennnya adalah



Gambar 1. Diagram Venn

Mudzakir (2006) dalam penelitiannya mengelompokkan representasi matematis ke dalam tiga ragam representasi yang utama, yaitu 1) representasi visual berupa diagram, grafik, atau tabel, dan gambar; 2) Persamaan atau ekspresi matematika; dan 3) Kata-kata atau teks tertulis. Adapun indikatornya adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Indikator Kemampuan Representasi Matematis

No.	Representasi	Bentuk-bentuk Operasional
1	Representasi visual a) Diagram, tabel, atau grafik	• Menyajikan kembali data atau informasi dari suatu representasi ke representasi diagram, grafik, atau tabel • Menggunakan representasi visual untuk menyelesaikan masalah
	b) Gambar	• Membuat gambar pola-pola geometri • Membuat gambar untuk memperjelas masalah dan memfasilitasi penyelesaiannya
2	Persamaan atau ekspresi matematis	• Membuat persamaan atau model matematika dari representasi lain yang diberikan • Membuat konjektur dari suatu pola bilangan • Menyelesaikan masalah dengan melibatkan ekspresi matematis
3	Kata-kata atau teks tertulis	• Membuat situasi masalah berdasarkan data atau representasi yang diberikan • Menuliskan interpretasi dari suatu representasi • Menuliskan langkah-langkah penyelesaian masalah matematika dengan kata-kata • Menyusun cerita yang sesuai dengan suatu representasi yang disajikan • Menjawab soal dengan menggunakan kata-kata atau teks tertulis

Kemampuan Abstraksi Matematis

Tall (1991) berpendapat bahwa abstraksi adalah proses penggambaran situasi tertentu ke dalam suatu konsep yang dapat dipikirkan (*thinkable concept*) melalui sebuah konstruksi. Konsep yang dapat dipikirkan tersebut kemudian dapat digunakan pada level berpikir yang lebih rumit dan kompleks. Menurutnya, proses abstraksi dapat terjadi dalam beberapa keadaan, tetapi terdapat tiga keadaan yang biasa memunculkan proses abstraksi dalam proses belajar matematika. Keadaan yang pertama dapat muncul ketika individu memfokuskan perhatiannya pada karakteristik dari objek-objek yang dicermatinya, kemudian memberikan nama melalui suatu proses pengklasifikasian berdasarkan kategori ke dalam beberapa kelompok.

Sebagai contoh dalam Kalkulus integral sebagai dasar mata kuliah Statistika Matematika 1, yaitu "hitunglah $\int \left[\frac{x-9}{(x+5)(x-2)} \right] dx$!". Untuk menyelesaikan soal tersebut, mahasiswa harus mengetahui teknik pengintegralan apa yang digunakan, apakah integral substitusi 1, integral parsial, integral substitusi 2, integral substitusi 3, atau integral fungsi rasional dengan fraksi parsial. Setelah melalui proses pencermatan, akhirnya soal tersebut dapat diselesaikan dengan teknik integral fungsi rasional dengan fraksi parsial sesuai dengan karakteristiknya. Di sini terlihat adanya proses pengklasifikasian berdasarkan kategori ke dalam kelompok tertentu dan memberi nama teknik pengintegralan apa yang digunakan untuk menyelesaikan soal tersebut.

Keadaan yang kedua ketika memfokuskan perhatian pada tindakan-tindakan yang diberlakukan pada objek-objek, yang mengarahkan kepada pemampatan menjadi simbol-simbol yang dapat dikomputasikan secara aritmatika, simbol-simbol yang dapat dimanipulasi dalam aljabar, dan simbol-simbol dalam kalkulus. Sebagai contoh pada materi Statistika Matematika 1 adalah sebagai berikut: “Peubah acak adalah peubah yang mengkarakterisasikan setiap elemen dalam ruang sampel dengan suatu bilangan real”. Definisi peubah acak tersebut dapat diabstraksikan sebagai berikut: “Suatu peubah acak X adalah suatu fungsi $X:\Omega\to\mathbb{R}$ dengan sifat $\{\omega\in\Omega: X(\omega)\le x\}\in\mathcal{F}$ untuk setiap $x\in\mathbb{R}$”.

Keadaan yang ketiga, terjadi ketika memformulasikan sebuah himpunan teoritis tentang konsep untuk mengonstruksi sebuah konsep yang dapat dipikirkan melalui serangkaian bukti matematis.

Nurhasanah (2010) menjelaskan bahwa indikasi terjadinya proses abstraksi dalam belajar dapat dicermati dari beberapa aktivitas berikut:

a) Mengidentifikasi karakteristik objek melalui pengamatan langsung
b) Mengidentifikasi karakteristik objek yang dimanipulasikan atau diimajinasikan.
c) Membuat generalisasi
d) Merepresentasikan gagasan matematika dalam simbol-simbol matematika
e) Melepaskan sifat-sifat kebendaan dari sebuah objek atau melakukan idealisasi.
f) Membuat hubungan antar proses atau konsep untuk membentuk suatu pengertian baru.
g) Mengaplikasikan konsep pada konteks yang sesuai
h) Melakukan manipulasi objek matematis yang abstrak.

Menghubungkan Representasi dan Abstraksi

Ferrari (2003) mengungkapkan keterkaitan yang erat antara representasi dan abstraksi. Menurut Ferrari (2003), representasi memiliki peran yang penting dalam proses generalisasi (proses pengenalan beberapa karakteristik umum dalam sebuah himpunan objek-objek mental dan proses ekspansi struktur pengetahuan), dekontekstualisasi (suatu proses yang membawa pengetahuan keluar dari konteksnya atau memisahkan suatu konsep dengan konteksnya) dan reifikasi (suatu proses kognitif ketika konsep-konsep atau proses matematis dapat dilihat strukturnya atau dipandang sebagai objek, konsep-konsep dan proses tersebut kemudian dapat digunakan pada level berpikir yang lebih tinggi) yang merupakan bagian dari proses abstraksi yag lebih kompleks.

Menurut Dreyfus (dalam Tall, 1991), “merepresentasikan” dan “mengabstraksikan” adalah dua proses berlawanan yang saling melengkapi. Di satu sisi, sebuah konsep seringkali diabstraksikan dari beberapa bentuk representasinya, dan di sisi lain, bentuk representasi selalu merupakan representasi dari beberapa konsep yang lebih abstrak.

Van oers (2007) mengatakan bahwa abstraksi dapat dimaknai sebagai suatu proses pemusatan perhatian pada hubungan-hubungan antara objek-objek, dan mengabaikan perbedaan kualitas dari objek-objek tersebut. Proses pemusatan perhatian ini dapat dijelaskan sebagai sebuah kontruksi dari sebuah objek mental yang dapat dipresentasikan sebagai sebuah model simbolik yang abstrak.

Sebagai contoh, hubungan representasi dan abstraksi matematis pada materi Statistika Matematika 1 adalah sebagai berikut:

Soal :

Diketahui fungsi densitas gabungan

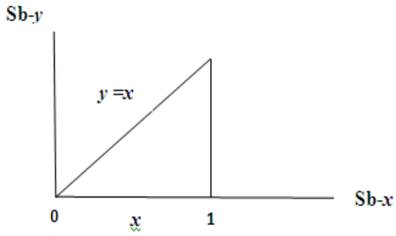
$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{selainnya}\end{cases}$$

Tentukan fungsi densitas dari $f_X(x)$!

 ISBN : 978-979-16353-8-7

Solusi :

Untuk mencari fungsi densitas dari $f_X(x)$, kita tentukan terlebih dahulu fungsi distribusi kumulatifnya. Sebelum kita tentukan fungsi distribusi kumulatifnya, kita gambar terlebih dahulu daerahnya untuk mempermudah perhitungan sebagai bentuk dari representasi. Adapun gambarnya adalah sebagai berikut:



Gambar 2. Daerah $f_{XY}(x,y)$

Dengan memperhatikan daerah dalam gambar tersebut yang berbentuk segi tiga siku-siku, maka fungsi distribusi kumulatifnya dapat diformulasikan sebagai berikut sebagai bentuk abstraksi:

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(u,v)\,dv\,du \\
&= \int_{u=0}^{u=x}\int_{v=0}^{v=u} 8uv\,dv\,du \\
&= \int_{0}^{x} 8u\left(\int_{0}^{u} v\,dv\right)du \\
&= 8\int_{0}^{x} u\left(\left.\tfrac{1}{2}v^2\right]_0^u\right)du \\
&= 8\int_{0}^{x} u\left(\tfrac{1}{2}u^2-0\right)du \\
&= 8\int_{0}^{x} \tfrac{1}{2}u^3\,du \\
&= 4\int_{0}^{x} u^3\,du \\
&= 4\left[\tfrac{1}{4}u^4\right]_0^x \\
&= 4\left[\tfrac{1}{4}x^4-0\right] \\
&= x^4
\end{aligned}
$$

sehingga fungsi distribusi kumulatifnya adalah

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^4, & 0\le x\le 1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

Adapun fungsi densitas dari $f_X(x)$ diperoleh dengan cara mendiferensialkan fungsi distribusi kumulatifnya, yaitu:

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 4x^3, & 0\le x\le 1\\ 0, & x\ge 1\end{cases}$$

Dengan kata lain,

$$f_X(x)=\begin{cases}4x^3, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{selainnya}\end{cases}$$

Dengan melihat proses perhitungan di atas, maka dapat digeneralisasi bahwa untuk $x\neq[0,1]$, maka berlaku:

$$x\neq[0,1]\begin{cases}F_X(x)=0, \text{untuk } x<0\\ F_X(x)=1, \text{ untuk } x>1\end{cases}$$

Selain itu, dapat digeneralisasi juga bahwa fungsi distribusi kumulatif berkaitan erat dengan fungsi densitas. Untuk memperoleh fungsi densitas dari fungsi distribusi kumulatif, maka fungsi tersebut didiferensialkan/diturunkan, sedangkan untuk memperoleh fungsi distribusi kumulatif dari fungsi densitas, maka fungsi tersebut diintegralkan disesuaikan dengan batas-batasnya.

Kemampuan Berpikir Kreatif Matematis

Munandar (1999) mengatakan bahwa berpikir kreatif (juga disebut berpikir divergen) ialah memberikan macam-macam kemungkinan jawaban berdasarkan informasi yang diberikan dengan penekanan pada keragaman jumlah dan kesesuaian. Adapun contoh pertanyaan divergen adalah sebagai berikut:

a) Rumus fungsi manakah yang mempunyai domain $\{x|x>5\}$!
b) Bentuk pertidaksamaan manakah yang mempunyai himpunan penyelesaian $\{x|\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4}\}$!
c) Bentuk persamaan manakah yang himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong!

Kepekaan berpikir kreatif dapat diukur dengan indikator-indikator yang telah ditentukan para ahli, salah satunya menurut Torrance. Menurut Torrance (dalam Herdian, 2010), kemampuan berpikir kreatif terbagi menjadi tiga hal, yaitu :

a) *Fluency* (kelancaran), yaitu menghasilkan banyak ide dalam berbagai kategori/ bidang.
b) *Originality* (Keaslian), yaitu memiliki ide-ide baru untuk memecahkan persoalan.
c) *Elaboration* (Penguraian), yaitu kemampuan memecahkan masalah secara detail.

Menurut Guilford (dalam Herdian, 2010), terdapat lima indikator berpikir kreatif, yaitu:

ISBN : 978-979-16353-8-7

a) Kepekaan (*problem sensitivity*), adalah kemampuan mendeteksi, mengenali, dan memahami serta menanggapi suatu pernyataan, situasi, atau masalah;
b) Kelancaran (*fluency*), adalah kemampuan untuk menghasilkan banyak gagasan;
c) Keluwesan (*flexibility*), adalah kemampuan untuk mengemukakan bermacam-macam pemecahan atau pendekatan terhadap masalah;
d) keaslian (*originality*), adalah kemampuan untuk mencetuskan gagasan dengan cara-cara yang asli, tidak klise, dan jarang diberikan kebanyakan orang;
e) Elaborasi (*elaboration*), adalah kemampuan menambah suatu situasi atau masalah sehingga menjadi lengkap, dan merincinya secara detail, yang didalamnya terdapat berupa tabel, grafik, gambar, model dan kata-kata.

Pada bagian berikut diberikan contoh soal materi Statistika Matematika 1 yang terkait dengan kemampuan berpikir kreatif mahasiswa.

Soal :

Diberikan R adalah peubah acak dengan fungsi distribusi F dan berlaku $P\{a < R \le b\} = F(b) - F(a)$ untuk $a < b$. Tentukan $P\{a \le R \le b\}$ dengan berbagai cara!

Solusi :

Soal tersebut dapat diselesaikan dengan dua cara, yaitu:

Cara 1:

$$\begin{aligned} P\{a \le R \le b\} &= P\{R \le b\} - P\{R < a\} \\ &= F(b) - \left[P\{R \le a\} - P\{R = a\}\right] \\ &= F(b) - \left[F(a) - \left(F(a) - F(a-)\right)\right] \\ &= F(b) - \left[F(a) - F(a) + F(a-)\right] \\ &= F(b) - F(a-) \end{aligned}$$

Cara 2:

$$\begin{aligned} P\{a \le R \le b\} &= P\{a < R \le b\} + P\{R = a\} \\ &= \left[F(b) - F(a)\right] + \left[F(a) - F(a-)\right] \\ &= F(b) - F(a-) \end{aligned}$$

Kemampuan Membuktikan Matematis

Hanna dan barbeau (dalam VanSpronsen, 2008) menyatakan bahwa bukti adalah langkah-langkah yang bersifat logis dari apa yang diketahui untuk mencapai suatu kesimpulan dengan menggunakan aturan inferensia yang dapat diterima. Pembuktian memainkan peranan penting dalam matematika. Secara tradisional, peran bukti adalah untuk memverifikasi kebenaran pernyataan matematika. Bukti ini digunakan untuk menghilangkan ketidakpastian tentang proposisi matematika dan meyakinkan suatu pernyataan.

Metode pembuktian dikembangkan bertujuan untuk meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam memahami pembuktian, dan mengerjakan (membuktikan) suatu pernyataan matematika. Menurut Sumarmo (2011), terdapat dua kemampuan dalam pembuktian matematis, yaitu:

a) Kemampuan membaca bukti adalah kemampuan menemukan kebenaran dan/atau kesalahan dari suatu pembuktian serta kemampuan memberikan alasan setiap langkah pembuktian.

 ISBN : 978-979-16353-8-7

b) Kemampuan mengkonstruksi bukti adalah kemampuan menyusun suatu bukti pernyataan matematik berdasarkan definisi, prinsip, dan teorema serta menuliskannya dalam bentuk pembuktian lengkap (pembuktian langsung atau tak langsung).

Berikut ini diberikan contoh butir tes membaca bukti matematis untuk mata kuliah Statistika Matematika 1.

Bacalah argumen berikut baik-baik

Buktikan bahwa Nilai harapan dari peubah acak Binomial dengan parameter *n* dan *p* adalah *np*!

Bukti pernyataan tersebut adalah sebagai berikut:

Misalkan *X* adalah distribusi binomial dengan parameter *n* dan *p*, maka menurut definisi nilai harapan dari X, notasikan $E[X]$ adalah

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=0}^{n} ip(i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} i\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right) p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\right) p^i (1-p)^{n-i} \\
&= np\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}\right) p^{i-1} (1-p)^{n-i} \\
&= np\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \qquad \text{dengan } k = i-1 \\
&= np\left[p+(1-p)\right]^{n-1} \\
&= np
\end{aligned}$$

Dengan membaca bukti di atas, mahasiswa diharapkan dapat mengerti/memahami tiap langkah dan menjastifikasi bahwa bukti tersebut benar sesuai dengan kaidah yang telah ditetapkan.

Dalam mengkontruksi bukti matematis, mahasiswa harus memiliki kemampuan-kemampuan dalam proses pembuktian matematika. Adapun kemampuan tersebut menurut Sumarmo (2011) meliputi :

- mengidentifikasi premis beserta implikasinya dan kondisi yang mendukung;
- mengorganisasikan dan memanipulasi fakta untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan;
- membuat koneksi antara fakta dengan unsur dari konklusi yang hendak dibuktikan.

Contoh 1:

Buktikan, jika $E[X]$ adalah nilai harapan dari X dengan X merupakan peubah acak kontinu dari fungsi densitas $f(x)$, maka $E[aX+b] = aE[X]+b$ dengan a dan b konstanta!

 ISBN : 978-979-16353-8-7

Bukti:

Soal tersebut dapat dibuktikan dengan cara langsung. Bukti langsung ini biasanya diterapkan untuk membuktikan teorema yang berbentuk implikasi $p \Rightarrow q$. Di sini *p* sebagai hipotesis digunakan sebagai fakta yang diketahui atau sebagai asumsi. Selanjutnya, dengan menggunakan *p* kita harus menunjukkan berlaku *q*. Secara logika, pembuktian langsung ini ekuivalen dengan membuktikan bahwa pernyataan $p \Rightarrow q$ benar dimana diketahui *p* benar. Adapun uraian buktinya disajikan sebagai berikut:

Diketahui $E[X]$ adalah nilai harapan dari X dengan X merupakan peubah acak kontinu dari fungsi densitas $f(x)$, menurut definisi dapat dituliskan sebagai

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} E[aX+b] &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} axf(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} bf(x)\,dx \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= aE[X]+b \end{aligned}$$

Contoh 2:

Buktikan, jika $P(A) \neq 0$ dengan $A \subset \Omega$, maka $A \neq \varnothing$!

Bukti:

Pernyataan ini sangat sulit dibuktikan secara langsung. Mari kita coba saja. Karena $P(A) \neq 0$ maka $0 < P(A) \leq 1$. Selanjutnya untuk membuktikan $A \neq \varnothing$ membingungkan, sehingga bukti langsung tidak dapat digunakan. Kontraposisi dari pernyataan ini adalah $A = \varnothing$, maka $P(A) = 0$ dengan $A \subset \Omega$. Selanjutnya diterapkan bukti langsung pada kontraposisinya.

Diketahui $A = \varnothing$ dan $A^c = \Omega$, maka

$$\begin{aligned} P(A)+P(A^c) &= 1 \\ P(A) &= 1-P(A^c) \\ P(A) &= 1-1=0 \end{aligned}$$

KESIMPULAN

Belajar matematika untuk tingkatan yang lebih tinggi (Mata Kuliah Statistika Matematika 1) tidaklah mudah. Dibutuhkan waktu untuk memahami matematika sebagai bahasa logika. Selain itu, dibutuhkan juga wawasan matematika yang luas untuk memiliki kemampuan dalam hal merepresentasi, mengabstraksi, menghubungkan representasi dan abstraksi, berpikir kreatif serta membuktikan fakta-fakta yang lebih rumit yang tercakup dalam kemampuan berpikir matematis tingkat lanjut (*advanced mathematical thinking*).

DAFTAR PUSTAKA

Artigue, M. (1998). ***Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies***. In Tinsley & Johson (Eds), *Information and Communications Technologies in School Mathematics* (pp. 121–129). IFIP: Chapman & Hall.

Ash, R.B. (2008). ***Basic Probability Theory***. New York : Dover Publications.

Cornu, B. (1991). ***Advanced Mathematical Thinking Limits***. In D. O. Tall (Ed.), (pp. 153-166). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Depdiknas. (2004). **Kurikulum Pendidikan Dasar**. Jakarta: Depdiknas

Ferrari, P. (2003). ***Abstraction in Mathematics***. Italy: The Royal Society

Herdian (2010). **Kemampuan berfikir kreatif siswa**. [Online]. Tersedia: www.herdy07.wordpress.com/2010/05/27/kemampuan-berfikir-kreatif-siswa/. html [1 Juli 2012]

Hogg, R. V. dan A. T. Craig. (1995). ***Introduction to Mathematics Statistics***. Ed. ke-5. New Jersey : Prentice Hall, Englewood Cliffs.

Mudzakir, A. (2006). **Psikologi Pendidikan**. Bandung: Pustaka setia

Munandar, U. (1999). ***Pengembangan Kreativitas Anak Berbakat***. Jakarta: Rineca Cipta.

Mustofa, A. (2009). **Strategi pemecahan Masalah matematika**. [Online] Tersedia: http://kangguru.wordpress.com/.../teknik-pemecahan-masalah-ala-g-polya . htlm [1 Juli 2012]

Nurhasanah, F. (2010). **Abstraksi Siswa SMP dalam Belajar Geometri Melalui Penerapan Model van Hiele dan Geometers' Sketchpad**. Tesis PPS UPI Bandung: Tidak diterbitkan

Solso, R.L. (1995). ***Cognitive Psychology***. Boston: A Simon & Schuster Company

Stewart, J. 2003. **Kalkulus Jilid 1**. Ed. Ke-4. Jakarta : Erlangga.

Suparlan (2005). **Dimensi Mutu Pendidikan**. Tersedia: www.suparlan.com/v5/pages/posts/dimensi-mutu-pendidikan. html [1 Juli 2012]

Suryadi, D. (2004). **Landasan Teoritik Pembelajaran Berpikir Matematika**. Tersedia : www.didi_suryadi.staf.upi.edu . html [16 Maret 2012]

Sumarmo, U. (2003). **Pembelajaran Keterampilan Membaca Matematika pada Siswa Sekolah Menengah**. Disampaikan pada Seminar Nasional Pendidikan MIPA di FPMIPA UPI.

………. (2009). ***High Level Mathematical Thinking: Experiments With High School and Under Graduate Students Using Various Approaches and Strategies.*** Makalah yang disampaikan pada Seminar di UPI. Bandung: UPI.

……….. (2011). **Advanced Mathematical Thinking dan Habit of Mind Mahasiswa (Bahan Kuliah).** PPS UPI Bandung: tidak diterbitkan

Tall, D. (1991). ***Advanced mathematical thinking***. *Mathematics Education Library*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group

Van Oers, K. (2007). ***The need for interdisciplinary research in personality studies – invited commentary***. Eur. J. Personality 21: 635-637

Van Spronsen, H. D. (2008). ***Proof Processes of Novice Mathematics Proof Writers.*** Disertasi pada The University of Montana Missoula: Tidak dipublikasikan.