ISBN : 978-979-16353-8-7

A-13

SECOND ORDER CONE (SOC) DAN SIFAT-SIFAT KENDALA *SECOND ORDER CONE PROGRAMMING* DENGAN NORMA 1

Caturiyati[1], Ch. Rini Indrati[2], Lina Aryati[2]
[1]Mahasiswa Program Studi S3 Matematika FMIPA UGM dan
dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
[2]Dosen Jurusan Matematika FMIPA UGM
wcaturiyati@yahoo.com, rinii@ugm.ac.id, lina@ugm.ac.id

Abstrak

Pada makalah ini dikembangkan pengertian *Second Order Cone* (SOC) dan sifat sifat kendala *Second Order Cone Programming* dengan Norma 1.

Kata kunci: *Second Order Cone* (SOC), *Second Order Cone Programming*

PENDAHULUAN

Cone order dua (*second order cone*/SOC) [9] didefinisikan sebagai

$$L^m = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \middle| x_m \geq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{m-1}^2} \right\}, m \geq 2,$$

dan program *cone* order dua (*Second-order cone programming*/SOCP) adalah masalah *conic*:

meminimumkan $\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} | \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} \geq_K \mathbf{0}\}$,

dengan *cone* K merupakan hasil kali langsung (*direct product*) dari beberapa *cone* order dua:

$$K = L^{m_1} \times L^{m_2} \times \dots \times L^{m_k}$$

dan $\geq_K$ menyatakan urutan *conic*, yaitu $\boldsymbol{a} \geq_K \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \geq_K \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in K$.

Pada masalah program *cone* order dua, suatu fungsi linear diminimumkan atas irisan himpunan *afine* dan hasil kali langsung beberapa *cone* order dua. SOCP merupakan masalah konveks nonlinear dengan program linear dan program kuadratik (konveks) sebagai kasus khusus [2,5,8]. Dalam beberapa tahun terakhir, masalah SOCP mendapat perhatian para peneliti karena jangkauan aplikasinya yang luas [1,2]. Masalah optimisasi *cone* order dua secara teori dapat diselesaikan secara efisien menggunakan metode titik interior.

Dalam perkembangan penelitian di bidang optimisasi terdapat pergeseran-pergeseran struktur. Kwak [7] mengajukan metode *principal component analysis* (PCA) berdasarkan teknik optimisasi yang dikerjakan dengan norma L_1. Metode tersebut merupakan pengembangan dari PCA konvensional berdasarkan norma L_2. Metode PCA yang dikerjakan Kahl lebih sederhana dan mudah diimplementasikan. Perkembangan penelitian optimisasi akhir-akhir ini mempunyai kecenderungan menggantikan norma L_2 dengan norma L_1 [10].

Sementara itu Kahl [6] menyajikan kerangka kerja baru untuk menyelesaikan struktur geometri dan masalah gerakan berdasar pada norma L_∞ daripada menggunakan fungsi *cost* norma L_2. Kerangka kerja ini menghasilkan komputasi estimasi global yang efisien, dalam arti solusinya invarian terhadap transformasi proyektif pada sistem koordinat dunia dan similaritas transformasi dalam bidang *image*, karena metrik jarak image dari *error reproyektif* juga invarian terhadap transformasi yang dimaksud. Dengan kata lain tidak memerlukan normalisasi koordinat image. Selain itu berbagai masalah struktur dan gerakan, seperti triangulasi, *resection* kamera dan estimasi homografi dapat dinyatakan ulang sebagai masalah optimisasi quasi konveks yang dapat diselesaikan menggunakan program *cone* order dua (SOCP).

Becker [3] membangun suatu kerangka kerja untuk menyelesaikan berbagai masalah *cone* konveks dengan pendekatan sebagai berikut: pertama, menentukan formulasi conic dari masalah; kedua, menentukan dualnya; ketiga, aplikasi *smoothing*; keempat, menyelesaikan menggunakan suatu metode optimal order satu. Kegunaan pendekatan ini adalah fleksibilitasnya. Suatu estimator yang dipandang efektif secara teori dan praktek adalah *selector* Dantzig [4], yang ide prosedur sederhananya: mendapatkan estimasi yang konsisten dari data observasi dan mempunyai norma l_1 yang minimum. *Selector* Dantzig adalah solusi program konveks

meminimumkan $\|\boldsymbol{x}\|_1$, dengan kendala $\|\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\|_\infty \leq \delta$,

dengan δ skalar dan diasumsikan kolom matriks A dinormalisasikan.

Berdasarkan referensi yang diuraikan tersebut dan terutama berdasarkan paper Lobo, et. al. [8] yang menguraikan masalah program *cone* order dua maka pada paper ini akan dibahas masalah SOCP dengan mengubah fungsi kendala menjadi fungsi norma 1 dengan domain $\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}}$**.**

PEMBAHASAN

1. *Second Order Cone*

Sebelum membicarakan *second order conic programming* (SOCP), akan dibicarakan terlebih dahulu mengenai SOC sebagai berikut. Untuk itu akan dibicarakan dulu beberapa hal terkait SOC.

Ben Tal dan Nemirovski mengatakan suatu *cone* $K = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m | \boldsymbol{a} \succeq \boldsymbol{0}\}$, dengan $\boldsymbol{a} \succeq \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \succeq \boldsymbol{0}$ dan $\succeq$ suatu urutan parsial, adalah suatu *pointed convex cone* yang memenuhi syarat-syarat berikut:

1. K tak kosong dan tertutup terhadap penjumlahan, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in K \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' \in K$
2. K himpunan *conic*, $\boldsymbol{a} \in K, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda\boldsymbol{a} \in K$
3. K *pointed*, $\boldsymbol{a} \in K$ dan $-\boldsymbol{a} \in K \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Dengan urutan parsial pada himpunan K di $\mathbb{R}^m$ terdapat tiga macam *cone* berikut:

1. Ortan nonnegatif, $\mathbb{R}_+^m = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m)^T | x_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$
2. *Cone* order dua
$$C_m = \left\{\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)^T \in \mathbb{R}^m \middle| x_m \geq \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{m-1} x_i^2}\right\}.$$
3. *Cone* semidefinit positif, S_+^m , cone dalam ruang S^m yaitu ruang matriks berukuran $m \times m$ dan memuat semua matriks semidefinit positif $\boldsymbol{A}$ berukuran $m \times m$.

2. *Second Order Cone Programming*

Diberikan definisi program *conic* berikut dari Ben Tal dan Nemirovski. Misalkan K suatu *cone* di $\mathbb{R}^m$ (*convex*, *pointed*, *closed*, dan dengan interior tak kosong). Diberikan $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n$, matriks kendala $\boldsymbol{A}$ berukuran $m \times n$, dan vektor ruas kanan $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, masalah optimisasi berikut disebut dengan program *conic*,

$$\text{meminimumkan } \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}, \text{ dengan kendala } \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} \geq_K \boldsymbol{0}$$

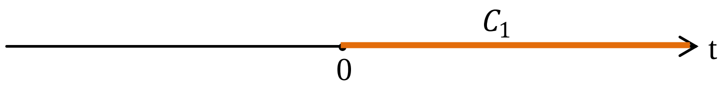
dengan $\geq_K$ urutan parsial pada himpunan *cone* K. Jika K adalah *direct product* beberapa SOC, maka masalah program *conic* di atas disebut dengan masalah *second order cone programming* (SOCP). Secara umum SOCP dimodelkan sebagai berikut (Lobo et al),

$$\begin{aligned} &\text{meminimumkan } \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}, \\ &\text{dengan kendala } \|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_2 \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i \ (i = 1, \dots, N) \end{aligned} \qquad (1)$$

dengan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ variabel keputusan, dan parameter $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1)\times n}, \boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$ dan $d_i \in \mathbb{R}$. Kendala $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\| \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_i$ disebut kendala SOC berdimensi n_i. Berdasarkan definisi, SOC standar berdimensi m didefinisikan sebagai,

$$C_m = \{(\boldsymbol{u}, t) | \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m-1}, t \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_2 \leq t\}.$$

Untuk $m = 1$, $C_1 = \{t | t \in \mathbb{R}, 0 \leq t\}$, dan secara geometris dapat digambarkan seperti Gambar 1 berikut.

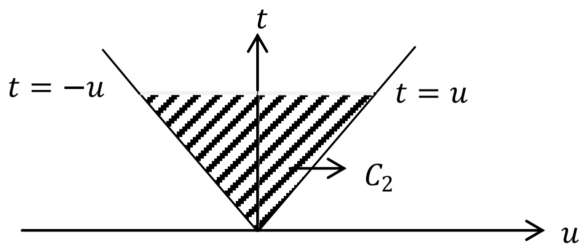


Gambar 1. SOC C_1

Untuk $m = 2$,

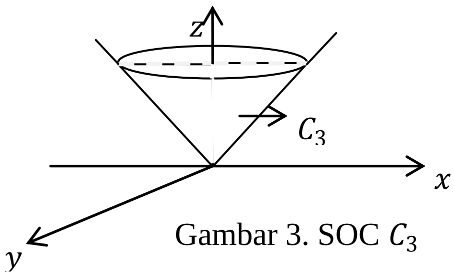
$$\begin{aligned} C_2 &= \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \|u\|_2 \leq t\} \\ &= \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, |u| \leq t\} = \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, -t \leq u \leq t\}, \end{aligned}$$

dan secara geometris digambarkan seperti Gambar 2 berikut.



Gambar 2. SOC C_2

Untuk $m = 3$, $C_3 = \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \|(x, y)\|_2 \leq t\}$
$= \left\{(x, y, t) \middle| (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq t\right\}$, dan secara geometris digambarkan seperti Gambar 3 berikut.



Gambar 3. SOC C_3

ISBN : 978-979-16353-8-7

Lemma 1. *Himpunan titik-titik yang memenuhi kendala cone order dua adalah image invers dari cone order dua satuan terhadap pemetaan affine*:

$$\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i\|_2 \le \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_i\\ \boldsymbol{c}_i^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_i\\ d_i\end{bmatrix}\in C_3$$

dan konveks, i=1,2,...,N.

Bukti: Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan $N=1, n_i=2=n$, $\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{b}$, $d_i=d\in\mathbb{R}$, maka parameter masalah SOCP berdimensi 2 adalah

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^T=(x_1,x_2)^T.$$

Kendala masalah SOCP berdimensi 2: $\|\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{b}\|_2\le \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}+d$

$$\Leftrightarrow \left\|\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}\right\|_2 \le [h_1 \quad h_2]^T\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+d$$

$$\Leftrightarrow \left\|\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+g_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+g_2\end{bmatrix}\right\|_2 \le h_1x_1+h_2x_2+d$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a_{11}x_1+a_{12}x_2+g_1)^2+(a_{21}x_1+a_{22}x_2+g_2)^2}\le h_1x_1+h_2x_2+d$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+g_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+g_2\\ h_1x_1+h_2x_2+d\end{bmatrix}\in C_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{c}^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}\\ d\end{bmatrix}\in C_3. \blacksquare$$

3. *Second Order Cone* (SOC) pada SOCP dengan Norma 1

Diberikan masalah SOCP (1). Apabila norma pada fungsi kendala masalah SOCP (1) diubah menjadi fungsi kendala bernorma 1, maka diperoleh masalah SOCP:

meminimumkan $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}$,

dengan kendala $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i\|_1\le \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}+d_i \ (i=1,\dots,N)$ (2)

dengan $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ adalah variabel keputusan, dan parameter $\boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i\in\mathbb{R}^{(n_i-1)\times n}, \boldsymbol{b}_i\in\mathbb{R}^{n_i-1}, \boldsymbol{c}_i\in\mathbb{R}^n$ dan $d_i\in\mathbb{R}$. Sebelum membahas masalah SOCP (2), perlu didefinisikan pengertian SOC norma 1 sebagai berikut:

$$C_m^*=\{(\boldsymbol{u},t)|\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^{m-1}, t\in\mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_1\le t\}.$$

Namun dengan pengubahan tersebut terdapat perbedaan antara SOC standar (norma 2) dengan SOC norma 1 sebagai berikut:

Untuk $m=1$, $C_1^*=\{t|t\in\mathbb{R}, \|0\|_1\le t\}=\{t|t\in\mathbb{R}, 0\le t\}=C_1$.

Untuk $m=2$, $C_2^*=\{(u,t)|u\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}, \|u\|_1\le t\}$
$=\{(u,t)|u\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}, |u|\le t\}=C_2$.

Untuk $m=3$, $C_3^*=\{(x,y,t)|(x,y)\in\mathbb{R}^2, t\in\mathbb{R}, \|(x,y)\|_1\le t\}$
$=\{(x,y,t)|(x,y)\in\mathbb{R}^2, t\in\mathbb{R}, |x|+|y|\le t\}\ne C_3$.

Contoh 1. Merupakan suatu *counter example*.

Ambil $x=\frac{1}{2}, y=\frac{3}{4}, t=1, x,y,t\in\mathbb{R}$. Akan ditunjukkan $C_3^*\ne C_3$.

Untuk $(x,y,t)\in C_3$, berlaku

$$\sqrt{x^2+y^2}\le t\Leftrightarrow\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{9}{16}\right)}=\sqrt{\tfrac{13}{16}}<1. \quad (3)$$

Sementara itu untuk $(x,y,t)\in C_3^*$ berlaku $\left|\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{3}{4}\right|=\frac{5}{4}>1$. (4)

Dari (3) dan (4) terbukti $C_3^*\ne C_3$. $\blacksquare$

Lemma 2. *Jika C_1, C_2, C_3 adalah SOC norma $\|.\|_2$ dan C_1^*, C_2^*, C_3^* adalah SOC norma $\|.\|_1$, maka berlaku $C_1^*=C_1, C_2^*=C_2$, tetapi $C_3^*\ne C_3$.*

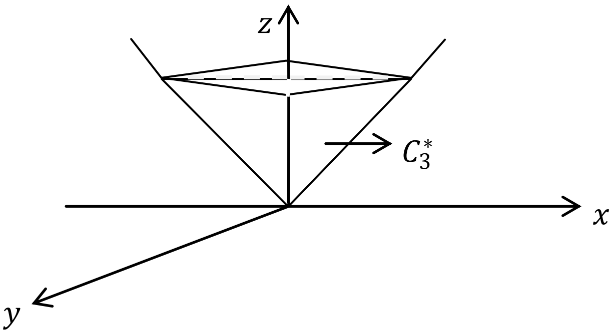
Bukti: Jelas $C_1^*=C_1$ dan $C_2^*=C_2$, sedangkan untuk C_3^* menurut definisinya

$$C_3^*=\{(x,y,t)|(x,y)\in\mathbb{R}^2, t\in\mathbb{R}, \|(x,y)\|_1\le t\}$$

$= \{(x,y,t)|(x,y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, |x| + |y| \le t\} \ne C_3.$

Terbukti $C_1^* = C_1, C_2^* = C_2$, tetapi $C_3^* \ne C_3$. ■

Secara geometris perbedaan antara C_3^* dan C_3 terlihat seperti Gambat 4 berikut:



Gambar 4. SOC C_3^*

Lemma 3. *Diberikan $x, y, t \in \mathbb{R}$ berlaku $\sqrt{x^2 + y^2} \le t \nLeftrightarrow |x| + |y| \le t$.*

Bukti: (dengan *counter example*) pada Contoh 1.

Berikut ini akan ditunjukkan hubungan kendala SOCP standar dengan kendala SOCP norma 1 dan hubungannya dengan pemetaan *affine*.

Lemma 4. *Untuk kendala SOCP (1) dan kendala SOCP (2) terhadap pemetaan affine berlaku hubungan sebagai berikut:*

(i) $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_1 \le \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_i \\ \boldsymbol{c}_i^T \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_3^*$

(ii) $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_2 \le \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i \nLeftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_i \\ \boldsymbol{c}_i^T \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_3^*$.

Bukti: Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan $N = 1, n_i = 2 = n, \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}, d_i = d \in \mathbb{R}$, maka parameter masalah SOCP berdimensi 2 adalah

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2)^T.$$

(i) Diperoleh

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\|_1 \le \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + d \Leftrightarrow |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1| + |a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2| \le h_1x_1 + h_2x_2 + d \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \\ h_1x_1 + h_2x_2 + d \end{bmatrix} \in C_3^* \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c}^T \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ d \end{bmatrix} \in C_3^*.$$

(ii) Didapatkan

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\|_2 \le \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + d \Leftrightarrow \sqrt{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2)^2} \le h_1x_1 + h_2x_2 + d$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \\ h_1x_1 + h_2x_2 + d \end{bmatrix} \in C_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c}^T \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ d \end{bmatrix} \in C_3.$$

Sementara telah diketahui $C_3 \ne C_3^*$, sehingga kendala SOCP (1) tidak ekuivalen dengan pemetaan *affine* di C_3^*. ■

KESIMPULAN

a. $C_1^* = C_1, C_2^* = C_2$, *tetapi* $C_3^* \ne C_3$.

b. Kendala SOCP (1) tidak ekuivalen dengan pemetaan *affine* di C_3^*.
c. Masalah SOCP (2) memerlukan sejumlah teori tambahan agar teori-teori pada SOCP (1) berlaku pada SOCP (2).

DAFTAR PUSTAKA

Alizadeh, F. and Goldfarb, D., Second-order *Cone* programming, *Math. Program*, 95, 3-51, 2003.

Andersen, E.D., Roos, C., and Terlaky, T., Notes on duality in second order and p-order *Cone* optimization, *A Journal of Mathematical Programming and Operation Research*, Volume 51, Issue 4, pages 627-643, 2002.

Becker, S., Candes, E.J. and Grant, M., Templates for convex *Cone* problems with applications to sparse signal recovery, *Mathematical Programming Computation*, Vol 3, Number 3, 165-218, 2011.

Ben Tal, A. and Nemirovski, A., *Lectures on Modern Convex Optimization : Analysis, Algorithms, and Engineering applications*, MPS SIAM series on Application, Philadelphia, 2001.Candes, E.J. and Tao, T., The Dantzig selector: statistical estimation when p is much larger than n, *Annals of Statistics*, pages 2313-2351, 2005.

Cao, Q., Yu, Z., and Wang, A., A Boxed Optimization Reformulation for the Convex Second Order *Cone* Programming, *AMO-Advanced Modeling and Optimization*, Volume 12, Number 1, 2010.

Kahl, F. And Hartley, R., Multiple View Geometry Under the L_∞ -norm, *IEEE Transactions Analysis Machine Intelligence*, Volume: 30, Issue: 9, pages 1603-1617, 2008.

Kwak, N., Principal Component Analysis based on L_1 -norm Maximization, *IEEE Transactions Analysis Machine Intelligence*, Volume: 30, Issue: 9, pages 1672-1680, 2008.

Lobo, M.S., Vandenberghe, L., Boyd, S., and Lebret, H., Applications of second-order *Cone* programming, *Linear Algebra and its Applications* 284, 193-228, 1998.

Schmidt, M., Least squares optimization with L_1-norm regularization, 2005. Diunduh dari http://www.di.ens.fr/~mschmidt/Software/lasso.pdf tanggal 20 Mei 2012