

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS TERREDUKSI REGULER DALAM ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL

Siswanto¹, Ari Suparwanto², M. Andy Rudhito³

¹Mahasiswa S3 Matematika FMIPA UGM dan Staff Pengajar FMIPA UNS Surakarta,

²Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada Yogyakarta

³FKIP, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta

e-mail : ¹ sis.mipauns@yahoo.co.id, ²ari_suparwanto@yahoo.com, ³arudhito@yahoo.co.id

Abstrak

Misalkan \mathfrak{R} himpunan bilangan real. Aljabar Max-Plus adalah himpunan $\mathfrak{R}_{\max} = \mathfrak{R} \cup \{-\infty\}$ dilengkapi dengan operasi maksimum " \oplus " dan plus " \otimes ". Dibentuk himpunan $I(\mathfrak{R})_{\max}$ yaitu himpunan yang anggotanya merupakan interval-interval tertutup dalam \mathfrak{R}_{\max} . Himpunan $I(\mathfrak{R})_{\max}$ dilengkapi dengan operasi " $\bar{\oplus}$ " dan " $\bar{\otimes}$ " disebut aljabar Max-Plus interval. Selanjutnya, dapat dibentuk himpunan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya merupakan anggota himpunan $I(\mathfrak{R})_{\max}$ ditulis $I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$. Misalkan $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ dan $[\underline{A}, \bar{A}] \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})_b$ dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$, matriks interval A dikatakan tak tereduksi jika untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$ tak tereduksi. Jika tidak demikian matriks interval A dikatakan tereduksi. Dalam penelitian ini akan dibahas tentang nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks interval tereduksi reguler.

Kata kunci : Aljabar Max-Plus interval, nilai eigen, vektor eigen, matriks tereduksi reguler.

PENDAHULUAN

Aljabar Max-Plus adalah himpunan $\mathfrak{R}_{\max} = \mathfrak{R} \cup \{\varepsilon\}$, $\varepsilon = -\infty$ dilengkapi dengan operasi maksimum " \oplus " dan plus " \otimes " merupakan semiring idempoten yang komutatif. Aljabar Max-Plus telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah perencanaan, komunikasi, produksi, sistem antrian dengan kapasitas berhingga, komputasi paralel, dan lalu lintas. (Baccelli, *et.al* [1]). Untuk menyelesaikan masalah jaringan dengan waktu aktifitas bilangan kabur seperti penjadwalan kabur dan sistem antrian kabur, aljabar Max-Plus telah digeneralisasi menjadi aljabar Max-Plus interval dan aljabar Max-Plus bilangan kabur. Aljabar Max-Plus interval yaitu himpunan $I(\mathfrak{R})_{\max}$ dilengkapi dengan operasi " $\bar{\oplus}$ " dan " $\bar{\otimes}$ ", sedangkan aljabar Max-Plus bilangan kabur yaitu himpunan $F(\mathfrak{R})_{\max}$ dilengkapi dengan operasi " \boxplus " dan " \boxotimes " (Rudhito [6]).

Dari himpunan \mathfrak{R}_{\max} dapat dibentuk himpunan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya merupakan elemen \mathfrak{R}_{\max} , dinotasikan dengan $\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$. Himpunan ini

dilengkapi dengan operasi maksimum " \oplus " dan plus " \otimes " merupakan semiring yang idempoten (Akian, *et. al.*, [1], Butkovic [3], Konigsberg [5]). Demikian juga, $\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n}$ yaitu himpunan matriks berukuran $m \times n$ dalam aljabar Max-Plus. Khusus untuk $n = 1$, diperoleh himpunan vektor dalam aljabar Max-Plus ditulis \mathfrak{R}_{\max}^m (Farlow [4]).

Misalkan $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$, graf komunikasi dari A ditulis $G(A)$. Jika $G(A)$ terhubung kuat maka matriks A dikatakan tak tereduksi. Sebaliknya, jika $G(A)$ tak terhubung kuat maka matriks A dikatakan tereduksi (Farlow [4], Konigsberg [5]). Farlow [4] dan Tam K. P [10] telah membahas di dalam aljabar Max-Plus beserta tafsirannya dalam teori graf, bahwa nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks masing-masing adalah periode dan barisan dari suatu waktu aktifitas. Farlow [4] membahas khusus untuk matriks tak tereduksi, sedangkan Konigsberg [5] dan Schutter [7] selain membahas matriks tak tereduksi juga matriks tereduksi. Berkaitan dengan nilai eigen dan vektor eigen, Siswanto [8] dan Subiono [9] telah membahas tentang algoritma untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks dalam aljabar Max-Plus.

Sejalan pada aljabar Max-Plus, muncul pula matriks dalam aljabar Max-Plus interval yaitu $I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n})$ dan matriks dalam aljabar Max-Plus bilangan kabur yaitu $F(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n})$, serta nilai eigen dan vektor eigen matriks dalam aljabar Max-Plus interval dan aljabar Max-Plus bilangan kabur. Rudhito [6] telah membahas tentang nilai eigen dan vektor eigen matriks atas aljabar Max-Plus interval khusus untuk matriks tak tereduksi. Dalam makalah ini akan dibahas tentang nilai eigen dan vektor eigen matriks tereduksi dalam aljabar Max-Plus interval. Sebelum dibahas hasil utama dari makalah ini, terlebih dahulu akan ditinjau beberapa konsep dasar dan hasil-hasil yang mendukung pembahasan.

Definisi 1.1. Diberikan barisan $\{x(k) \mid k \in \square\}$ yang dibangkitkan oleh sistem persamaan linear $x(k+1) = A \otimes x(k)$ dengan $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ dan $x(0) \in \mathfrak{R}^n$ sebagai nilai awal. Misalkan $x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) \in \mathfrak{R}_{\max}^n$ sehingga untuk $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\tau_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_j(k)}{k}$ ada. Vektor $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ disebut vektor waktu siklus. Jika semua τ_i sama maka nilai ini disebut laju pertumbuhan asimtotik barisan $x(k)$.

Definisi 1.2. Suatu matriks dikatakan regular jika memuat paling sedikit satu unsur yang tidak sama dengan ε dalam setiap baris.

Definisi 1.3. Norma l^∞ untuk vektor $v \in \mathfrak{R}^n$ didefinisikan oleh $\|v\|_\infty = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |v_i|$.

Lema 1.4. [4] Jika $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{m \times n}$ matriks regular dan $u, v \in \mathfrak{R}^m$ maka $\|(A \otimes u) - (A \otimes v)\|_\infty \leq \|u - v\|_\infty$.

Teorema 1.5. [4] Diberikan sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$ untuk $k \geq 0$, $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ reguler dan nilai awal $x(0)$. Jika $x(0)$ nilai awal sehingga $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k, x(0))}{k}$ ada maka nilai limit ini sama untuk sebarang nilai awal $y(0) \in \mathfrak{R}^n$.

Lema 1.6. [4] Diberikan sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$ untuk $k \geq 0$, $A \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ tak tereduksi dengan v vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda \in \mathfrak{R}$ maka

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_j(k, x(0))}{k} = \lambda \text{ untuk semua } j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ dan } x(0) \in \mathfrak{R}^n.$$

Teorema 1.7. [8,9] Jika untuk sebarang nilai awal $x(0) \neq (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$ sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$ memenuhi $x(m) = c \otimes x(n)$ untuk bilangan bulat $m > n \geq 0$ dan bilangan real c maka $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} = (\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$ dengan $\lambda = \frac{c}{m-n}$. Selanjutnya, λ

adalah suatu nilai eigen dari matriks A dengan vektor eigen diberikan oleh $v = \bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{(m-n-1)} \otimes x(m+i-1))$.

Selanjutnya, dibicarakan konsep aljabar Max-Plus interval dan matriks di dalamnya [6]. Interval tertutup x dalam \mathfrak{R}_{\max} adalah suatu himpunan bagian dari \mathfrak{R}_{\max} yang berbentuk $x = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathfrak{R}_{\max} \mid \underline{x} \preceq_m x \preceq_m \bar{x}\}$. Interval x dalam \mathfrak{R}_{\max} disebut interval Max-Plus. Suatu bilangan $x \in \mathfrak{R}_{\max}$ dapat dinyatakan sebagai interval $[x, x]$.

Definisi 1.8. Dibentuk $I(\mathfrak{R})_{\max} = \{x = [\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathfrak{R}, \varepsilon \prec_m \underline{x} \preceq_m \bar{x}\} \cup \{\varepsilon\}$, dengan $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$. Pada himpunan $I(\mathfrak{R})_{\max}$ didefinisikan operasi " \oplus " dan " \otimes " dengan $x \oplus y = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$ dan $x \otimes y = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \bar{x} \otimes \bar{y}]$ untuk setiap $x, y \in I(\mathfrak{R})_{\max}$. Himpunan $I(\mathfrak{R})_{\max}$ dilengkapi dengan operasi \oplus dan \otimes merupakan semiring idempoten komutatif dengan elemen netral $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan $\bar{0} = [0, 0]$. Selanjutnya disebut aljabar Max-Plus interval dan dinotasikan dengan $I(\bar{\mathfrak{R}})_{\max} = (I(\mathfrak{R})_{\max}; \oplus, \otimes)$.

Definisi 1.10. Himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen dalam $I(\mathfrak{R})_{\max}$ dinotasikan dengan $I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$ yaitu $I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n} = \{A = [A_{ij}] \mid A_{ij} \in I(\mathfrak{R})_{\max}; i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n\}$. Matriks anggota $I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$ disebut matriks interval Max-Plus. Selanjutnya matriks interval Max-Plus cukup disebut dengan matriks interval.

Definisi 1.11. Struktur aljabar dari $I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ yang dilengkapi dengan operasi $\bar{\oplus}$ dan $\bar{\otimes}$ dinotasikan dengan $I(\bar{\mathfrak{R}})_{\max}^{n \times n} = (I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}; \bar{\oplus}, \bar{\otimes})$ merupakan dioid (semiring yang idempoten), sedangkan $I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$ merupakan semimodul atas $I(\mathfrak{R})_{\max}$.

Definisi 1.12. Untuk $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$ didefinisikan matriks $\underline{A} = [\underline{A}_{ij}] \in \mathfrak{R}_{\max}^{m \times n}$ dan $\bar{A} = [\bar{A}_{ij}] \in \mathfrak{R}_{\max}^{m \times n}$ masing-masing disebut matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks interval A.

Definisi 1.13. Diberikan matriks interval $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$, dengan \underline{A} dan \bar{A} masing-masing adalah matriks batas bawah dan matriks batas atas dari matriks A. Didefinisikan interval matriks dari A yaitu $[\underline{A}, \bar{A}] = \{A \in \mathfrak{R}_{\max}^{m \times n} \mid \underline{A} \preceq_m A \preceq_m \bar{A}\}$ dan $I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n})_b = \{[\underline{A}, \bar{A}] \mid A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}\}$.

Definisi 1.14.

1. Untuk $\alpha \in I(\mathfrak{R})_{\max}$, $[\underline{A}, \bar{A}], [\underline{B}, \bar{B}] \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n})_b$ didefinisikan
 - i. $\alpha \bar{\otimes} [\underline{A}, \bar{A}] = [\alpha \otimes \underline{A}, \alpha \otimes \bar{A}]$
 - ii. $[\underline{A}, \bar{A}] \bar{\oplus} [\underline{B}, \bar{B}] = [\underline{A} \oplus \underline{B}, \bar{A} \oplus \bar{B}]$
2. Untuk $[\underline{A}, \bar{A}] \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times k})_b$, $[\underline{B}, \bar{B}] \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{k \times n})_b$ didefinisikan $[\underline{A}, \bar{A}] \bar{\otimes} [\underline{B}, \bar{B}] = [\underline{A} \otimes \underline{B}, \bar{A} \otimes \bar{B}]$.

Teorema 1.15. [9] Struktur aljabar dari $I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})_b$ yang dilengkapi dengan operasi $\bar{\oplus}$ dan $\bar{\otimes}$ dinotasikan dengan $I(\bar{\mathfrak{R}}_{\max}^{n \times n})_b = (I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})_b; \bar{\oplus}, \bar{\otimes})$ merupakan dioid (semiring yang idempoten), sedangkan $I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n})_b$ merupakan semimodul atas $I(\mathfrak{R})_{\max}$.

Semiring $I(\bar{\mathfrak{R}}_{\max}^{n \times n}) = (I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}); \bar{\oplus}, \bar{\otimes})$ isomorfis dengan semiring $I(\bar{\mathfrak{R}}_{\max}^{n \times n})_b = (I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})_b; \bar{\oplus}, \bar{\otimes})$ dengan pemetaan $f : I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n} \rightarrow I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})^*$ $f(A) = [\underline{A}, \bar{A}]$, $\forall A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$. Sedangkan semimodul $I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$ atas $I(\mathfrak{R})_{\max}$ isomorfis dengan semimodul $I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n})_b$ atas $I(\mathfrak{R})_{\max}$. Dengan demikian untuk setiap matriks interval A selalu dapat ditentukan interval matriks $[\underline{A}, \bar{A}]$ dan sebaliknya untuk setiap interval matriks $[\underline{A}, \bar{A}] \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})_b$ dengan $\underline{A}, \bar{A} \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ dapat ditentukan matriks interval $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ dimana $[\underline{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}] = I(\mathfrak{R})_{\max}$ untuk setiap i dan j . Dengan demikian matriks interval $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$ dapat dipandang sebagai interval matriks $[\underline{A}, \bar{A}] \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{m \times n})_b$. Interval matriks $[\underline{A}, \bar{A}] \in I(\mathfrak{R}_{\max}^{n \times n})_b$ disebut interval matriks yang bersesuaian dengan matriks interval $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ dan dilambangkan dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$. Akibat isomorfisme di atas maka berlaku $\alpha \bar{\otimes} A \approx [\underline{\alpha} \otimes \underline{A}, \bar{\alpha} \otimes \bar{A}]$, $A \bar{\oplus} B \approx [\underline{A} \oplus \underline{B}, \bar{A} \oplus \bar{B}]$ dan $A \bar{\otimes} B \approx [\underline{A} \otimes \underline{B}, \bar{A} \otimes \bar{B}]$.

Definisi 1.16. Didefinisikan

$I(\mathfrak{R})_{\max}^n = \left\{ x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \mid x_i \in I(\mathfrak{R})_{\max}; i = 1, 2, \dots, n \right\}$. Himpunan $I(\mathfrak{R})_{\max}^n$ dapat dipandang sebagai $I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times 1}$. Unsur-unsur dalam $I(\mathfrak{R})_{\max}^n$ disebut vektor interval atas $I(\mathfrak{R})_{\max}$. Vektor interval x bersesuaian dengan interval vektor yaitu $x \approx [\underline{x}, \bar{x}]$.

Definisi 1.17. Diberikan $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$. Skalar interval $\lambda \in I(\mathfrak{R})_{\max}$ disebut nilai eigen Max-Plus interval matriks interval A jika terdapat suatu vektor interval $v \in I(\mathfrak{R})_{\max}^n$ dengan $v \neq \varepsilon_{n \times 1}$ sehingga $A \bar{\otimes} v = \lambda \bar{\otimes} v$. Vektor v disebut vektor eigen Max-Plus interval matriks interval A yang bersesuaian dengan λ . Berikut diberikan suatu teorema yang memberikan eksistensi nilai eigen interval Max-Plus suatu matriks interval.

Teorema 1.18. [9] Diberikan $A \in I(\mathcal{R})_{\max}^{n \times n}$ dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Skalar interval $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]$, merupakan suatu nilai eigen Max-Plus interval matriks interval A , dimana $\lambda_{\max}(\underline{A})$ dan $\lambda_{\max}(\overline{A})$ berturut-turut adalah bobot rata-rata maksimum sirkuit elementer dalam $G(\underline{A})$ dan $G(\overline{A})$.

Definisi 1.19. Suatu matriks interval $A \in I(\mathcal{R})_{\max}^{n \times n}$ dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$, dikatakan tak tereduksi jika setiap matriks $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ tak tereduksi.

Teorema 1.20. [9] Suatu matriks interval $A \in I(\mathcal{R})_{\max}^{n \times n}$, dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$, tak tereduksi jika dan hanya $\underline{A} \in \mathcal{R}_{\max}^{n \times n}$ tak tereduksi.

Akibat 1.21. [9] Diberikan $A \in I(\mathcal{R})_{\max}^{n \times n}$, dengan $A \approx [\underline{A}, \overline{A}]$. Jika matriks interval A tak tereduksi maka $\lambda_{\max}(A) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]$ merupakan nilai eigen interval Max-Plus tunggal matriks interval A .

PEMBAHASAN

Misalkan $x(k+1) = A \otimes x(k)$ yaitu sistem persamaan dalam aljabar Max-Plus interval. Akan dibahas hasil penelitian yaitu tentang nilai eigen dan vektor eigen matriks interval tereduksi reguler. Pembahasan ini berkaitan dengan perilaku periodik dari suatu sistem persamaan dalam aljabar Max-Plus interval, sedangkan perilaku periodik dari suatu sistem persamaan berkaitan dengan vektor interval waktu siklus.

Definisi 2.1. Diberikan barisan $\{x(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]^T \in I(\mathcal{R})_{\max}^n \mid k \in \square\}$,

\square himpunan bilangan asli yaitu barisan yang dibangkitkan oleh $x(k+1) = A \otimes x(k)$

sehingga untuk $x_j(k) = [\underline{x}_j, \overline{x}_j]$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\frac{x_j(k)}{k} = \left[\frac{\underline{x}_j}{k}, \frac{\overline{x}_j}{k} \right]$ dan bahwa

$\tau_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_j(k)}{k}$ ada. Vektor $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n]^T$ disebut vektor interval waktu siklus.

Jika semua τ_i sama maka interval ini disebut laju pertumbuhan asimtotik barisan vektor interval $x(k)$.

Misalkan $\{x(k) \in I(\mathcal{R})_{\max}^n \mid k \in \square\}$ barisan yang dibangkitkan oleh sistem $x(k+1) = A \otimes x(k)$, dengan $A \in I(\mathcal{R})_{\max}^{n \times n}$ dan $x(0) \in I(\mathcal{R})^n$ sebagai nilai awal. Barisan $x(k)$ dapat ditulis $x(k) = A^{\otimes k} \otimes x(0)$. Jika A matriks interval tak tereduksi, laju pertumbuhan asimtotik sebarang $x_j(k)$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ merupakan nilai eigen interval yang tunggal dari A . Selanjutnya, untuk $A \in I(\mathcal{R})_{\max}^{n \times n}$ tak tereduksi dengan

nilai eigen interval λ dan vektor eigen interval v , maka nilai eigen interval dari $A^{\otimes k}$ adalah $\lambda^{\otimes k}$ dan vektor eigen intervalnya adalah v . Ini dinyatakan dalam lema berikut.

Lema 2.2. Jika v eigen vektor interval dari matriks tak tereduksi $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ dengan nilai eigen interval λ maka $A^{\otimes k} \otimes v = \lambda^{\otimes k} \otimes v$ untuk semua $k \geq 0$.

Bukti : Diperhatikan bahwa untuk $n \geq 0$ berlaku :

$$\begin{aligned} A \otimes (\lambda^{\otimes n} \otimes v) &= (A \otimes \lambda^{\otimes n}) \otimes v = (\lambda^{\otimes n} \otimes A) \otimes v = \lambda^{\otimes n} \otimes (A \otimes v) \\ &= \lambda^{\otimes n} \otimes (\lambda \otimes v) \\ &= \lambda^{\otimes (n+1)} \otimes v. \end{aligned}$$

Selanjutnya, bukti lema dilakukan dengan induksi matematika.

- i. Untuk $k = 1$, $A^{\otimes 1} \otimes v = \lambda^{\otimes 1} \otimes v \Leftrightarrow A \otimes v = \lambda \otimes v$
- ii. Dianggap benar untuk $k = n - 1$, yaitu $A^{\otimes (n-1)} \otimes v = \lambda^{\otimes (n-1)} \otimes v$
- iii. Untuk $k = n$, $A \otimes (\lambda^{\otimes (n-1)} \otimes v) = \lambda^{\otimes n} \otimes v \Leftrightarrow A \otimes (A^{\otimes (n-1)} \otimes v) = \lambda^{\otimes n} \otimes v$
 $\Leftrightarrow (A \otimes A^{\otimes (n-1)}) \otimes v = \lambda^{\otimes n} \otimes v$
 $\Leftrightarrow A^{\otimes n} \otimes v = \lambda^{\otimes n} \otimes v$

Dari i, ii dan iii terbukti, $A^{\otimes k} \otimes v = \lambda^{\otimes k} \otimes v$ untuk semua $k \geq 0$. ■

Dari lema 2.2, yaitu $A^{\otimes k} \otimes v = \lambda^{\otimes k} \otimes v$ dan dari $x(k) = A^{\otimes k} \otimes \bar{x}(0)$, jika $\bar{x}(0)$ dipilih v suatu vektor eigen interval maka $\bar{x}(k) = A^{\otimes k} \otimes \bar{x}(0) \Leftrightarrow x(k) = A^{\otimes k} \otimes v \Leftrightarrow x(k) = \lambda^{\otimes k} \otimes v$. Dengan menggunakan operasi di dalam aljabar konvensional bahwa, jika $\bar{\lambda} = [\lambda, \lambda, \dots, \lambda]^T$ maka $x(k) = k \bar{\lambda} + v \Leftrightarrow x(k) - v = k \bar{\lambda} \Leftrightarrow x(k) - v = [k\lambda, k\lambda, \dots, k\lambda]^T$ sehingga berlaku $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{x_j(k)}{k} - \frac{v_j}{k} \right) = \lambda$ atau

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_j(k)}{k} = \lambda$ untuk $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Oleh karena itu, jika $x(0) = v$ yang merupakan vektor eigen interval maka laju pertumbuhan asimtotik dari $x(k)$ adalah nilai eigen interval yang bersesuaian dengan vektor eigen interval v dari matriks interval A . Selanjutnya, bagaimana jika barisan $x(k)$ diberikan nilai awal selain vektor eigen interval dari A .

Untuk pembicaraan ini, diperlukan norma l^∞ yang dimodifikasi untuk vektor interval $v \in I(\mathfrak{R})^n$ dan beberapa lema.

Definisi 2.3. Untuk $n = 1$, berarti $v = [\underline{v}, \bar{v}] \in I(\mathfrak{R})$. Didefinisikan

$$\|v\|_\infty = \begin{cases} \bar{v} - \underline{v}, & \text{untuk } \underline{v} \neq \bar{v} \\ |\underline{v}| & \text{untuk } v = \underline{v} = \bar{v} \end{cases}$$

Lema 2.4. Misalkan $v = [\underline{v}, \bar{v}] \in I(\mathfrak{R})$ maka $\|v\|_\infty$ yang didefinisikan pada definisi 2.3 merupakan norma dari $v \in I(\mathfrak{R})$.

Bukti : Ambil $v = [\underline{v}, \bar{v}]$, $w = [\underline{w}, \bar{w}] \in I(\mathfrak{R})$ dan $\alpha \in \mathfrak{R}$.

i. a. Jika $v = [\underline{v}, \bar{v}]$ dengan $\underline{v} \neq \bar{v}$ maka

$$\|\alpha v\|_\infty = \|[\alpha \underline{v}, \alpha \bar{v}]\|_\infty = \alpha \bar{v} - \alpha \underline{v} = \alpha(\bar{v} - \underline{v}) = \alpha \|[\underline{v}, \bar{v}]\|_\infty = \alpha \|v\|_\infty.$$

b. Jika $v = [\underline{v}, \bar{v}]$ dengan $v = \underline{v} = \bar{v}$ maka

$$\|\alpha v\|_\infty = \|[\alpha \underline{v}, \alpha \bar{v}]\|_\infty = |\alpha v| = \alpha |v| = \alpha \|v\|_\infty.$$

Jadi $\|\alpha v\|_\infty = \alpha \|v\|_\infty$.

ii. a. Jika $v = [\underline{v}, \bar{v}]$, $w = [\underline{w}, \bar{w}] \in I(\mathfrak{R})$ dengan $\underline{v} \neq \bar{v}$ dan $\underline{w} \neq \bar{w}$ maka

$$\begin{aligned} \|v+w\|_\infty &= \|[\underline{v}, \bar{v}] + [\underline{w}, \bar{w}]\|_\infty = \|[\underline{v} + \underline{w}, \bar{v} + \bar{w}]\|_\infty = \bar{v} + \bar{w} - (\underline{v} + \underline{w}) \\ &= (\bar{v} - \underline{v}) + (\bar{w} - \underline{w}) \\ &= \|v\|_\infty + \|w\|_\infty. \end{aligned}$$

b. Jika $v = [\underline{v}, \bar{v}]$, $w = [\underline{w}, \bar{w}] \in I(\mathfrak{R})$ dengan $v = \underline{v} = \bar{v}$ dan $w = \underline{w} = \bar{w}$ maka

$$\|v+w\|_\infty = \|[\underline{v}, \bar{v}] + [\underline{w}, \bar{w}]\|_\infty = \|[\underline{v} + \underline{w}, \bar{v} + \bar{w}]\|_\infty = |v+w| \leq |v| + |w| = \|v\|_\infty + \|w\|_\infty.$$

c. Jika $v = [\underline{v}, \bar{v}]$, $w = [\underline{w}, \bar{w}] \in I(\mathfrak{R})$ dengan $\underline{v} \neq \bar{v}$ dan $w = \underline{w} = \bar{w}$ maka

$$\begin{aligned} \|v+w\|_\infty &= \|[\underline{v}, \bar{v}] + [\underline{w}, \bar{w}]\|_\infty = \|[\underline{v} + \underline{w}, \bar{v} + \bar{w}]\|_\infty = |\bar{v} + \bar{w} - (\underline{v} + \underline{w})| \\ &= |\bar{v} - \underline{v}| \\ &= \|v\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty \end{aligned}$$

Jadi, $\|v+w\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$.

iii. $\|v\|_\infty \geq 0$, $\forall v \in I(\mathfrak{R})$ dan $\|v\|_\infty = 0 \Leftrightarrow v = 0 = [0,0]$.

Selanjutnya untuk $n \geq 2$, disajikan definisi dan lema berikut.

Definisi 2.5. Untuk setiap vektor interval $v \in I(\mathfrak{R})^n$, $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ dengan

$v_i = [\underline{v}_i, \bar{v}_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ didefinisikan

$$\|v\|_\infty = \begin{cases} \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\underline{v}_i - \bar{v}_i|, & \text{jika } \exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni \underline{v}_i \neq \bar{v}_i \\ \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} |\bar{v}_i|, & \text{jika } \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni \underline{v}_i = \bar{v}_i \end{cases}.$$

Lema 2.6. Misalkan vektor interval $v \in I(\mathfrak{R})^n$, $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ dengan $v_i = [\underline{v}_i, \bar{v}_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ maka $\|v\|_\infty$ yang didefinisikan pada definisi 2.5 merupakan norma dari $v \in I(\mathfrak{R})^n$.

Bukti : Ambil $v, w \in I(\mathfrak{R})^n$ dan $\alpha \in \mathfrak{R}$ dengan $v = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$ dan $w = [[w_1, \bar{w}_1], [w_2, \bar{w}_2], \dots, [w_n, \bar{w}_n]]^T$

i. a. Untuk $v = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$ dimana $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni v_i \neq \bar{v}_i$.

Berarti,

$$\alpha v = [\alpha [v_1, \bar{v}_1], \alpha [v_2, \bar{v}_2], \dots, \alpha [v_n, \bar{v}_n]]^T = [[\alpha v_1, \alpha \bar{v}_1], [\alpha v_2, \alpha \bar{v}_2], \dots, [\alpha v_n, \alpha \bar{v}_n]]^T$$

$$\begin{aligned} \text{sehingga, } \|\alpha v\|_\infty &= \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} | \alpha \bar{v}_i - \alpha v_i | = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} | \alpha | | \bar{v}_i - v_i | \\ &= | \alpha | \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} | \bar{v}_i - v_i | = | \alpha | \|v\|_\infty. \end{aligned}$$

b. Untuk $v = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$ dimana $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni v_i = \bar{v}_i$.

Berarti,

$$\alpha v = [\alpha [v_1, \bar{v}_1], \alpha [v_2, \bar{v}_2], \dots, \alpha [v_n, \bar{v}_n]]^T = [[\alpha v_1, \alpha \bar{v}_1], [\alpha v_2, \alpha \bar{v}_2], \dots, [\alpha v_n, \alpha \bar{v}_n]]^T$$

$$\text{sehingga, } \|\alpha v\|_\infty = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} | \alpha \bar{v}_i | = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} | \alpha | | \bar{v}_i | = | \alpha | \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} | \bar{v}_i | = | \alpha | \|v\|_\infty.$$

$$\text{Jadi } \|\alpha v\|_\infty = \alpha \|v\|_\infty.$$

ii. a. Untuk $v = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$ dimana $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni v_i \neq \bar{v}_i$ dan dan $w = [[w_1, \bar{w}_1], [w_2, \bar{w}_2], \dots, [w_n, \bar{w}_n]]^T$ dimana $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni w_i \neq \bar{w}_i$.

Berarti,

$$v + w = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$$

$$+ [[w_1, \bar{w}_1], [w_2, \bar{w}_2], \dots, [w_n, \bar{w}_n]]^T$$

$$= [[v_1 + w_1, \bar{v}_1 + \bar{w}_1], [v_2 + w_2, \bar{v}_2 + \bar{w}_2], \dots, [v_n + w_n, \bar{v}_n + \bar{w}_n]]^T$$

$$\text{sehingga, } \|v+w\|_\infty = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} | (\bar{v}_i + \bar{w}_i) - (v_i + w_i) |$$

$$= \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} | (\bar{v}_i - v_i) + (\bar{w}_i - w_i) |$$

$$\leq \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} | \bar{v}_i - v_i | + \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} | \bar{w}_i - w_i | = \|v\|_\infty + \|w\|_\infty.$$

b. Untuk $v = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$ dimana $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni v_i = \bar{v}_i$ dan dan $w = [[w_1, \bar{w}_1], [w_2, \bar{w}_2], \dots, [w_n, \bar{w}_n]]^T$ dimana $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni w_i = \bar{w}_i$.

Berarti,

$$v + w = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$$

$$+ [[w_1, \bar{w}_1], [w_2, \bar{w}_2], \dots, [w_n, \bar{w}_n]]^T$$

$$= [[v_1 + w_1, \bar{v}_1 + \bar{w}_1], [v_2 + w_2, \bar{v}_2 + \bar{w}_2], \dots, [v_n + w_n, \bar{v}_n + \bar{w}_n]]^T$$

$$\text{sehingga, } \|v+w\|_\infty = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} | \bar{v}_i + \bar{w}_i |$$

$$\leq \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} | \bar{v}_i | + \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} | \bar{w}_i | = \|v\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$$

c. Untuk $v = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$ dimana $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni v_i \neq \bar{v}_i$ dan

dan $w = [[w_1, \bar{w}_1], [w_2, \bar{w}_2], \dots, [w_n, \bar{w}_n]]^T$ dimana $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni w_i = \bar{w}_i$.

Berarti, $v + w = [[v_1, \bar{v}_1], [v_2, \bar{v}_2], \dots, [v_n, \bar{v}_n]]^T$

$$+ [[w_1, \bar{w}_1], [w_2, \bar{w}_2], \dots, [w_n, \bar{w}_n]]^T$$

$$= [[v_1 + w_1, \bar{v}_1 + \bar{w}_1], [v_2 + w_2, \bar{v}_2 + \bar{w}_2], \dots, [v_n + w_n, \bar{v}_n + \bar{w}_n]]^T$$

sehingga, $\|v+w\|_\infty = \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} |(\bar{v}_i + \bar{w}_i) - (v_i + w_i)|$

$$= \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} |(\bar{v}_i - v_i) + (\bar{w}_i - w_i)|$$

$$= \max_{i \in \{1,2,\dots,n\}} |\bar{v}_i - v_i| = \|v\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$$

Jadi, $\|v+w\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$.

iii. $\|v\|_\infty \geq 0, \forall v \in I(\mathfrak{R})^n$ dan $\|v\|_\infty = 0 \Leftrightarrow v = [[0,0],[0,0], \dots, [0,0]]^T$

Oleh karena itu, $\|v\|_\infty$ yang didefinisikan pada definisi 2.3 dan definisi 2.5 merupakan norma dari $v \in I(\mathfrak{R})^n$.

Definisi 2.7. Suatu matriks interval $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$, dikatakan regular jika untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$ regular.

Lema 2.8. Matriks interval $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$ dikatakan regular jika dan hanya jika $\underline{A} \in \mathfrak{R}_{\max}^{n \times n}$ regular.

Bukti : (\Rightarrow) Menurut definisi 2.7, karena $\underline{A} \in [\underline{A}, \bar{A}]$ maka \underline{A} regular.

(\Leftarrow) Diketahui \underline{A} regular, berarti memuat paling sedikit satu unsur yang tidak sama dengan ε dalam setiap baris. Ambil $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$ sebarang. berarti $\underline{A} \preceq_m A$. Oleh karena itu, A memuat paling sedikit satu unsur yang tidak sama dengan ε dalam setiap baris. Dengan kata lain A regular. Karena A sebarang maka setiap matriks $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$ regular.

Lema 2.9. Jika $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{m \times n}$ matriks regular dan $u, v \in I(\mathfrak{R})^m$ dengan $A \approx [\underline{A}, \bar{A}]$, $u \approx [\underline{u}, \bar{u}]$ dan $v \approx [\underline{v}, \bar{v}]$ maka $\| (A \otimes u) - (A \otimes v) \|_\infty \leq \|u - v\|_\infty$.

Bukti : Misalkan $A \otimes u$ dan $A \otimes v$ vektor interval berhingga dalam $I(\mathfrak{R})^m$ dengan $A \otimes u \approx [\underline{A} \otimes \underline{u}, \bar{A} \otimes \bar{u}]$ dan $A \otimes v \approx [\underline{A} \otimes \underline{v}, \bar{A} \otimes \bar{v}]$. Bukti diberikan untuk kasus jika $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni (\underline{A} \otimes \underline{u})_i \neq (\bar{A} \otimes \bar{u})_i$ dan $(\underline{A} \otimes \underline{v})_i \neq (\bar{A} \otimes \bar{v})_i$, sedangkan untuk kasus jika $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni (\underline{A} \otimes \underline{u})_i = (\bar{A} \otimes \bar{u})_i$ dan $(\underline{A} \otimes \underline{v})_i = (\bar{A} \otimes \bar{v})_i$ sejalan bukti Teorema 1.4. didefinisikan $\beta = \| (A \otimes u) - (A \otimes v) \|_\infty$. Berarti bahwa, ada $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$ sehingga $\beta = \left| [(\bar{A} \otimes \bar{u}) - (\bar{A} \otimes \bar{v})]_{i_0} - [(\underline{A} \otimes \underline{u}) - (\underline{A} \otimes \underline{v})]_{i_0} \right|$. Oleh

karena itu, i_0 adalah indeks dari elemen dalam $\left[(\bar{A} \otimes \bar{u}) - (\bar{A} \otimes \bar{v}) \right]_{i_0} - \left[(\underline{A} \otimes \underline{u}) - (\underline{A} \otimes \underline{v}) \right]_{i_0}$ dengan nilai mutlak maksimum.

Tanpa kehilangan keumuman misalkan bahwa $\beta = \left[(\bar{A} \otimes \bar{u}) - (\bar{A} \otimes \bar{v}) \right]_{i_0} - \left[(\underline{A} \otimes \underline{u}) - (\underline{A} \otimes \underline{v}) \right]_{i_0} \geq 0$. Menurut perkalian matrik

dalam aljabar Max-Plus, berarti

$$\beta = \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} ((\bar{a}_{i_0 j} + \bar{u}_j) - (\bar{a}_{i_0 j} + \bar{v}_j)) - \max_{l \in \{1, 2, \dots, n\}} ((\underline{a}_{i_0 j} + \underline{u}_j) - (\underline{a}_{i_0 j} + \underline{v}_j)).$$

Oleh karena itu, ada suatu $j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ sehingga,

$$\begin{aligned} \beta &= ((\bar{a}_{i_0 j_0} + \bar{u}_{j_0}) - (\bar{a}_{i_0 j_0} + \bar{v}_{j_0})) - \max_{l \in \{1, 2, \dots, n\}} ((\underline{a}_{i_0 j} + \underline{u}_j) - (\underline{a}_{i_0 j} + \underline{v}_j)) \\ &\leq ((\bar{a}_{i_0 j_0} + \bar{u}_{j_0}) - (\bar{a}_{i_0 j_0} + \bar{v}_{j_0})) - ((\underline{a}_{i_0 j_0} + \underline{u}_{j_0}) - (\underline{a}_{i_0 j_0} + \underline{v}_{j_0})) \\ &= (\bar{u}_{j_0} - \bar{v}_{j_0}) - (\underline{u}_{j_0} - \underline{v}_{j_0}) \end{aligned}$$

Ini mengakibatkan bahwa,

$$\begin{aligned} \beta &\leq (\bar{u}_{j_0} - \bar{v}_{j_0}) - (\underline{u}_{j_0} - \underline{v}_{j_0}) \leq \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} (\bar{u}_j - \bar{v}_j) - (\underline{u}_j - \underline{v}_j) \\ &\leq \max_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} |(\bar{u}_j - \bar{v}_j) - (\underline{u}_j - \underline{v}_j)| = \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Terbukti, $\|(\bar{A} \otimes \bar{u}) - (\bar{A} \otimes \bar{v})\|_\infty \leq \|u - v\|_\infty$. ■

Dalam teorema berikutnya, dipandang $x(0)$ tidak perlu merupakan vektor eigen interval dari A . Notasi $x(k, x(0))$ menyatakan vektor interval $x(k)$ dimulai dengan $x(0)$.

Lema 2.10. Diberikan sistem $x(k+1) = A \bar{\otimes} x(k)$ untuk $k \geq 0$, $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ reguler dan nilai awal $x(0)$. Jika $x(0)$ mengakibatkan $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k, x(0))}{k}$ ada maka nilai limit ini sama untuk sebarang nilai awal $y(0) \in I(\mathfrak{R})^n$.

Bukti : Misalkan bahwa, $x(0) \in I(\mathfrak{R})^n$ dan $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k, x(0))}{k} = \tau$ dengan $\tau \in I(\mathfrak{R})^n$.

Oleh karena itu, untuk sebarang $y(0) \in I(\mathfrak{R})^n$ diperoleh,

$$0 \leq \left\| \frac{x(k, y(0))}{k} - \frac{x(k, x(0))}{k} \right\|_\infty \leq \frac{1}{k} \left\| (A \bar{\otimes}^k \bar{\otimes} y(0)) - (A \bar{\otimes}^k \bar{\otimes} x(0)) \right\|_\infty \leq \frac{1}{k} \|y(0) - x(0)\|_\infty$$

Untuk $k \rightarrow \infty$ maka $\frac{1}{k} \|y(0) - x(0)\|_\infty \rightarrow 0$ dan $\left\| \frac{x(k, y(0))}{k} - \frac{x(k, x(0))}{k} \right\|_\infty \rightarrow 0$.

Akibatnya $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k, y(0))}{k} = \tau$. ■

Menurut teorema ini, untuk suatu matriks interval regular jika vektor waktu sikel ada maka vektor ini tidak tergantung dari nilai awal. Selanjutnya, untuk suatu matriks tak tereduksi A , lema berikut menjamin eksistensi vektor waktu sikelnya. Menurut lema

2.10 dan lema 2.2, bahwa semua komponen vektor waktu sikelnya adalah λ untuk sebarang nilai awal.

Lema 2.11. Diberikan sistem $x(k+1) = A \bar{\otimes} x(k)$ untuk $k \geq 0$, $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ tak tereduksi dengan v vektor eigen interval yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda \in I(\mathfrak{R})$ maka $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_j(k, x(0))}{k} = \lambda$ untuk semua $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ dan $x(0) \in I(\mathfrak{R})^n$.

Bukti : Misalkan v suatu vektor eigen dari matriks interval A . Jika dipilih $x(0) = v \in I(\mathfrak{R})^n$ diperoleh $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_j(k, x(0))}{k} = \lambda$ untuk semua j . Karena A tak tereduksi maka A reguler dan v berhingga. Menurut lema 2.10, vektor waktu sikel ada dan tidak tergantung dari $x(0)$. Dengan kata lain semua komponen vektor waktu sikelnya adalah λ untuk sebarang nilai awal. ■

Berdasarkan uraian sebelumnya, eksistensi nilai eigen interval dan vektor eigen interval untuk matriks interval tereduksi diberikan oleh teorema berikut :

Teorema 2.12. Jika untuk sebarang nilai awal $x(0) \neq [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]^T$ sistem $x(k+1) = A \bar{\otimes} x(k)$ memenuhi $x(m) = c \bar{\otimes} x(n)$ untuk bilangan bulat $m > n \geq 0$ dan interval c maka $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} = [\lambda, \lambda, \dots, \lambda]^T$ dengan $\lambda = \frac{c}{m-n}$. Selanjutnya, λ adalah suatu nilai eigen interval dari matriks A dengan vektor eigen diberikan oleh

$$v = \bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{(m-n-1)} \bar{\otimes} x(n+i-1)).$$

Bukti : Diketahui bahwa untuk sebarang nilai awal $x(0) \neq [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]^T$ sistem $x(k+1) = A \bar{\otimes} x(k)$ memenuhi $x(m) = c \bar{\otimes} x(n)$ untuk bilangan bulat $m > n \geq 0$ dan interval c . Misalkan $l = m - n$, sehingga

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x(n+il)}{n+il} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{c^{\bar{\otimes} i} \bar{\otimes} x(n)}{n+il} = \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{c^{\bar{\otimes} i}}{n+il} \right) \bar{\otimes} \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x(n)}{n+il} \right) \\ &= \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{ci}{n+il} \right) \bar{\otimes} \left(\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x(n)}{n+il} \right) = \frac{c}{l} \bar{\otimes} \bar{0} = \frac{c}{m-n} \bar{\otimes} \bar{0}. \end{aligned}$$

Jadi jika $\lambda = \frac{c}{m-n}$ maka

vektor waktu sikelnya adalah $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(k)}{k} = [\lambda, \lambda, \dots, \lambda]^T$.

Selanjutnya, jika $v = \bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\otimes (m-n-1)} \bar{\otimes} x(n+i-1))$ maka

$$\begin{aligned} A \bar{\otimes} v &= A \bar{\otimes} \left(\bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\otimes (m-n-1)} \bar{\otimes} x(n+i-1)) \right) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{m-n} (A \bar{\otimes} (\lambda^{\otimes (m-n-1)} \bar{\otimes} x(n+i-1))) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\otimes (m-n-1)} \bar{\otimes} (A \bar{\otimes} x(n+i-1))) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\otimes (m-n-1)} \bar{\otimes} (x(n+i))) \\ &= \bigoplus_{i=2}^{m-n+1} (\lambda^{\otimes (m-n-i-1)} \bar{\otimes} x(n+i-1)) \\ &= \lambda \bar{\otimes} \left(\bigoplus_{i=2}^{m-n+1} (\lambda^{\otimes (m-n-i)} \bar{\otimes} x(n+i-1)) \right) \\ &= \lambda \bar{\otimes} \left(\bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\otimes (m-n-i)} \bar{\otimes} x(n+i-1)) \right) = \lambda \bar{\otimes} v. \blacksquare \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema ini, berikut adalah langkah-langkah yang digunakan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A \in I(\mathfrak{R})_{\max}^{n \times n}$ dilakukan secara berulang dari sistem $x(k+1) = A \bar{\otimes} x(k)$ sebagai berikut :

Ambil sebarang vektor $x(0) \neq [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]^T$.

- i. Lakukan iterasi sistem $x(k+1) = A \bar{\otimes} x(k)$ sampai terdapat bilangan bulat $m > n \geq 0$ dan interval sehingga perilaku periodik terjadi yaitu $x(m) = c \bar{\otimes} x(n)$.
- ii. Hitung nilai eigen $\lambda = \frac{c}{m-n}$.
- iii. Vektor eigen $v = \bigoplus_{i=1}^{m-n} (\lambda^{\otimes (m-n-1)} \bar{\otimes} x(n+i-1))$.

KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa :

- a. Matriks interval tereduksi regular A mempunyai nilai eigen interval dan vektor eigen interval jika vektor interval waktu sikelnnya merupakan laju pertumbuhan asimtotik barisan $x(k)$ dari sistem persamaan linear $x(k+1) = A \otimes x(k)$.
- b. Batas bawah dan batas atas nilai eigen interval tersebut berturut-turut adalah nilai eigen Max-Plus matriks batas bawah dan nilai eigen Max-Plus matriks batas atas dari matriks intervalnya.
- c. Batas bawah dan batas atas vektor eigen interval tersebut berturut-turut adalah vektor eigen matriks batas bawah dan vektor eigen matriks batas atas dari matriks intervalnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Akian, M., Cohen, G., Gaubert, S., Quadrat, J. P., and Viot, M. 1994. Max-Plus Algebra and Applications to System Theory and Optimal Control. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Zurich, Switzerland.
- [2] Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., Quadrat, J. P. 2001. *Synchronization and Linearity*, New York : John Wiley & Sons.
- [3] Butkovic, P., Tam K. P., 2009. On Some Properties of The Image of a Max Linear Mapping. *Contemporary Mathematics*. Volume 495.
- [4] Farlow, K. G. 2009. *Max-Plus Algebra*. Master's Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Masters in Mathematics.
- [5] Konigsberg Z. R. 2009. A Generalized Eigenmode Algorithm for Reducible Regular Matrices over the Max-Plus Algebra. *International Mathematical Forum*, 4. 24. 1157 – 1171.
- [6] Rudhito, Andy. 2011. *Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian*. Disertasi : Program Studi S3 Matematika FMIPA UGM. Yogyakarta.
- [7] Schutter, B. D. 1996. *Max Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*. Ph.D Thesis, Katholike Universiteit Leuven, Departement Elektrotechniek.
- [8] Siswanto. 2012. *Nilai Eigen dan Vektor Eigen suatu Matriks Tereduksi dalam Aljabar Max-Plus*. Prosiding Seminar Nasional Aljabar 2012 Jurusan Matematika UNDIP. 152 – 161.
- [9] Subiono. 2000. *On Classes of Min-Max-Plus Systems and Their Applications*, Published by Delf University Press.
- [10] Tam. K. P. 2010. *Optimizing and Approximating Eigenvectors In Max-Algebra*. A thesis Submitted to the University of Birmingham for The Degree of Doctor of Philosophy (PHD).