ISBN : *978-979-16353-8-7*

A-10

OPTIMISASI JADWAL PEMESANAN BAKPIA PATHOK JAYA “25” DAERAH ISTIMEWA YOGYAKARTA DENGAN SISTEM LINEAR MAX-PLUS WAKTU INVARIANT

Mustofa Arifin[1] dan Musthofa[2]
[1]*Mahasiswa Program Studi Matematika Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta*
[2]*Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta*
Email: mustofamath08@gmail.com, musthofa@uny.ac.id

Abstrak

Sistem linear max-plus waktu invariant (SLMI) merupakan Sistem Event Diskret (SED), yang waktu aktifitasnya berupa bilangan real. Dalam sistem linear max-plus waktu invariant (SLMI) terdapat ketidakpastian dalam waktu aktifitasnya, sehingga waktu aktifitas ini dimodelkan sebagai bilangan real. Tujuan makalah ini adalah mengoptimisasi jadwal pemesanan Bakpia Pathok Jaya “25” Daerah Istimewa Yogyakarta dengan menggunakan Sistem Linear Max-Plus Waktu Invariant. Langkah-langkah dalam mengoptimisasi jadwal pemesanan Bakpia Pathok “25” dengan SLMI yakni menentukan pemodelan SLMI terlebuh dahulu, kemudian menentukan subpenyelesaian terbesar, dan delta serta menentukan minimasi simpangan maksimum dari SLMI sistem tersebut. Makalah ini membuktikan bahwa dengan menentukan subpnyelesaian terbesar dari SLMI, maka jadwal pemesanan Bakpia Pathok Jaya “25” dapat dioptimisasi sehingga pemesanan bakpia dapat dilayani tepat waktu.

Kata kunci: Optimisasi, jadwal pemesanan, sistem linear max-plus waktu invariant.

PENDAHULUAN

Yogyakarta merupakan kota wisata dengan latar belakang budaya yang kuat. Kuatnya budaya Jawa, banyaknya makanan khas, barang kerajinan, dan tempat wisata menjadi daya tarik tersendiri bagi wisatawan. Makanan khas dari kota Yogyakarta merupakan oleh-oleh yang banyak dicari oleh wisatawan, salah satunya adalah Bakpia Pathok yang menjadi makanan khas kota Yogyakarta dan banyak para wisatawan membelinya sebagai oleh-oleh (buah tangan). Setiap industri Bakpia Pathok tersebut mempunyai merk dagang mereka sendiri, misalnya Bakpia Pathok Jaya “25”.

Perusahaan Bakpia Pathok Jaya “25” merupakan suatu perusahaan yang bergerak di bidang industri yaitu salah satunya memproduksi bakpia pathok. Adanya tingkat persaingan yang semakin kompetitif mengharuskan perusahaan ini untuk merencanakan atau menentukan jumlah produksinya agar dapat memenuhi pemesanan pasar dengan tepat waktu dan jumlah yang sesuai. Dengan demikian, harapan dari pemilik usaha ialah meningkatnya keuntungan perusahaan.

Kegiatan produksi Perusahaan Bakpia Pathok Jaya "25" erat kaitannya dengan efektifitas penggunaan waktu dan jumlah tenaga kerja. Berdasarkan permasalahan itu, Aljabar *Max-Plus* diharapkan dapat menjadi cara untuk mengoptimisasi jadwal pemesanan Bakpia Pathok Jaya "25", sehingga waktu produksi dapat digunakan secara efisien dan efektif. Terkait dengan masalah ini, teori Aljabar *Max-Plus* merupakan salah satu kajian teori yang dapat digunakan untuk pemodelan, analisis, dan kontrol dalam sistem produksi. Alasan utama digunakannya Aljabar *Max-Plus* (himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan $\mathbb{R}$ himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum, dinotasikan dengan $\oplus$ dan operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan $\otimes$) karena kemudahannya dalam menyelesaikan proses sinkronisasi.

Sinkronisasi Aljabar *Max-Plus* memiliki beberapa kelebihan antara lain telah dapat digunakan dengan baik untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah-masalah jaringan, seperti masalah: penjadwalan (proyek), sistem antrian, teori graf, kombinatorik, teori sistem, teori antrian, dan proses stokastik, lebih detailnya dapat dilihat pada buku dan journal seperti B. De Schutter, *et.al* (1996), De Schutter B. and T. van den Boom. (2000), Bacelli,*et.al* (2001), Rudhito, A. (2003), Kasie G. Farlow, (2009), dan B. Heidergott, B., dkk.(2005), sehingga hal tersebut dijadikan pedoman pada penelitian ini. Secara khusus makalah ini akan membahas mengenai penerapan Sistem Linear *Max-Plus* Waktu *Invariant* dalam mengoptimisasi jadwal pemesanan Bakpia Pathok Jaya "25".

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sistem *Event* Diskret (SED) dan Sistem Linear *Max-Plus* Waktu *Invariant*

Aljabar *Max-Plus* dapat digunakan untuk menggambarkan secara *linear* dinamika waktu dari suatu sistem *nonlinear* dalam aljabar konvensional, sehingga pembahasan menjadi lebih mudah (Kasie G. Farlow, 2009:11). Menurut Necoara *et.al*. (2008: 1), dalam SED keadaan sistem pasti akan bergantung dengan waktu. Setiap waktu bertambah, maka keadaan sistem dipastikan berubah pula. Dengan kata lain, perubahan keadaan merupakan hasil dari kejadian sebelumnya. Sistem seperti ini disebut dengan sistem terkendali kejadian (*event-driven system*). Tujuan utama dari jenis sistem *event diskret* dapat dijabarkan menggunakan model Sistem Linear *Max-Plus* Waktu *invariant*. Sebuah sistem dikatakan waktu *invariant* jika respon terhadap suatu urutan input tertentu tidak tergantung pada waktu mutlak dan *deterministik* adalah sistem yang operasinya dapat diprediksi secara tepat. Berikut ini akan dibahas mengenai definisi dan teorema yang memenuhi SLMI:

Definisi 1 (Schutter, 1996 : 156)

Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant adalah SED (Sistem Event Diskret) yang dapat dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k) \oplus B \otimes \mathbf{u}(k+1) \ldots\ldots\ldots(1.1)$$

$$\mathbf{y}(k) = C \otimes \mathbf{x}(k) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.2)$$

untuk $k = 1, 2, 3, \ldots$ *, dengan kondisi awal* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$ *, dan* $C \in \mathbb{R}_{\max}^{l\times n}$*. Vektor* $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$ *menyatakan keadaan (state),* $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}_{\max}^{m}$ *adalah vektor input, dan* $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}_{\max}^{l}$ *adalah vektor output sistem saat waktu ke-k.*

SLMI seperti dalam definisi di atas secara singkat akan dituliskan dengan SLMI (A, B, C) dan dituliskan dengan SLMI ($A, B, C, \boldsymbol{x}_0$), jika kondisi awal $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ diberikan.

Teorema 1 (*Input-Output* SLMI ($A, B, C, \boldsymbol{x}_0$)) (Schutter, 1996 : 161)

Diberikan suatu bilangan bulat positip p. Jika vektor output $\boldsymbol{y} = [y(1), y(2), \dots, y(p)]^T$ *dan vektor input* $\boldsymbol{u} = [u(1), u(2), \dots, u(p)]^T$ *pada SLMI* ($A, B, C, \boldsymbol{x}_0$) *, maka*

$$\boldsymbol{y} = K \otimes \boldsymbol{x}_0 \oplus H \otimes \boldsymbol{u}$$

dengan

$$K = \begin{bmatrix} C \otimes A \\ C \otimes A^{\otimes 2} \\ \vdots \\ C \otimes A^{\otimes p} \end{bmatrix} \text{ dan } H = \begin{bmatrix} C \otimes B & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ C \otimes A \otimes B & C \otimes B & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes A^{\otimes p-1} \otimes B & C \otimes A^{\otimes p-2} \otimes B & \cdots & C \otimes B \end{bmatrix}$$

Dalam sistem produksi, Teorema 1 menunjukkan jika diketahui kondisi awal sistem dan barisan waktu saat bahan mentah dimasukkan ke sistem, maka dapat ditentukan barisan waktu saat produk selesai diproses dan meninggalkan sistem.

Teorema 2 (Rudhito, 2003: 64)

Diberikan SLMI (A, B, C, x_0) *dengan* $C \otimes B \neq \varepsilon$. *Jika* $K \otimes \boldsymbol{x}_0 \leq_m y$, *maka penyelesaian masalah input paling lambat pada SLMI* (A, B, C, x_0) *diberikan oleh* $\hat{u} = [\hat{u}(1), \hat{u}(2), \dots, \hat{u}(p)]^T$ *dengan* $-\hat{u}(k) = \max_{1 \leq i \leq p}(-y(i) + H_{i,k})$, *untuk* $k = 1, 2, \dots, p$.

Pembahasan penyelesaian masalah minimasi simpangan maksimum *output* pada SLMI (A, B, C, ε) di atas juga dapat diperluas untuk SLMI (A, B, C, x_0) dengan $x_0 \neq \varepsilon$, seperti diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 3 (Rudhito, 2003: 67)

Diberikan SLMI (A, B, C, x_0) *dengan* $C \otimes B \neq \varepsilon$. *Jika* $K \otimes \boldsymbol{x}_0 \leq_m y$, *maka penyelesaian masalah minimasi simpangan maksimum output pada SLMI* (A, B, C, x_0) *diberikan oleh* $\tilde{u} = \hat{u} \otimes \frac{\delta}{2}$ *dengan* $\hat{u}$ *merupakan subpenyelesaian terbesar sistem* $H \otimes \boldsymbol{u} = y$ *dan* $\delta = \max_i |(y - H \otimes \hat{u})_i|$.

Asumsi-Asumsi Dalam Sistem Produksi Bakpia Pathok Jaya "25"

Penggunaan SLMI pada sistem produksi Bakpia Pathok Jaya "25" ini diasumsikan sebagai berikut:

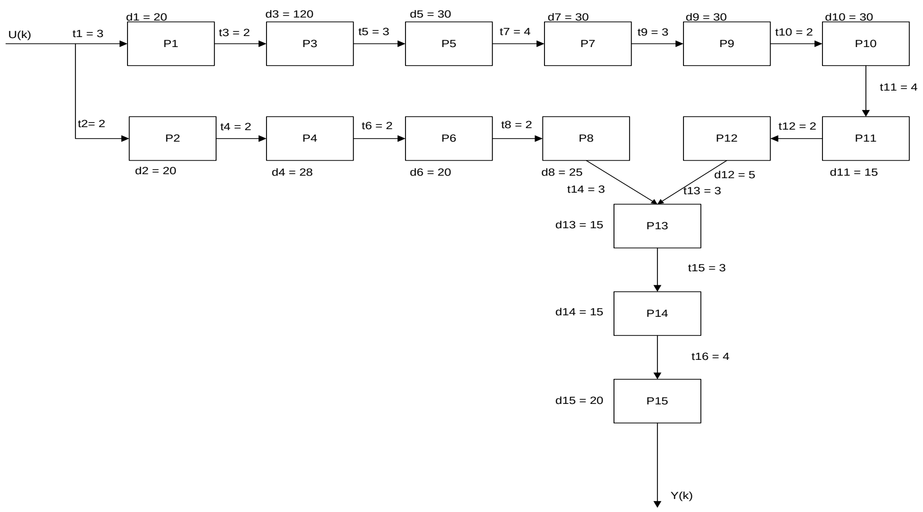
1. Waktu perhitungan dilakukan untuk proses produksi secara kontinu.
2. Waktu untuk mempersiapkan bahan-bahan yang akan diproses tidak diperhatikan atau dianggap 0 ($u(1) = 0$) dimana $k = 0$ sehingga k dimulai dari 1, 2, 3 …..

 ISBN : 978-979-16353-8-7

3. Waktu dibatasi sampai barang siap untuk dipasarkan sehingga dalam hal ini *t* ke-16 bernilai 0.
4. Mesin-mesin bisa bekerja pada kondisi awal dan untuk berikutnya tidak perlu menunggu kedatangan input karena input sudah selalu tersedia.
5. Suatu unit pemrosesan hanya dapat mulai bekerja untuk suatu produk baru, jika ia telah menyelesaikan pemrosesan produk sebelumnya.
6. Matriks dalam sistem persamaan merupakan matriks konstan, yaitu tidak tergantung pada parameter *k* sehingga sistemnya merupakan sistem waktu *invariant*.
7. Dalam sekali produksi menggunakan 200 kg kacang hijau.
8. Proses produksi tidak mengalami gangguan dan tidak mengalami cacat pada produk.
9. Diasumsikan lama waktu yang dibutuhkan pada proses pengayakan tepung, pembungkusan bakpia, dan pengepakan bakpia sama untuk pemesanan bakpia dalam jumlah tertentu.
10. Pemesanan bakpia (*pack*) terbatas perharinya.
11. Waktu referensi yang digunakan untuk memulai kegiatan produksi Bakpia Pathok Jaya "25" adalah pukul 07.00 WIB.
12. Diasumsikan kegiatan Produksi Bakpia Pathok Jaya "25" tidak mendahului jadwal yang telah ditentukan.
13. Sistem kerja dibuat per-*shift*, sehingga tenaga pekerja tidak terlalu terforsir (waktu istirahat tersedia).

Bagan Pemodelan Produksi Bakpia Pathok "25"

Berdasarkan hasil penelitian produksi Bakpia Pathok Jaya dapat digambarkan dalam bentuk bagan seperti di bawah ini (Gambar 1).



Gambar 1. Bagan Pemodelan Produksi Bakpia Pathok Jaya "25"

Keterangan :

t_i = waktu proses pemindahan bahan yang akan diproses, i = 1,2, 3,….16

d_1 = waktu saat proses penggilingan kacang hijau
d_2 = waktu saat proses pengayakan tepung
d_3 = waktu saat proses perendaman kacang hijau
d_4 = waktu saat proses pencampuran adonan kulit bakpia
d_5 = waktu saat proses pemisahan kulit kacang hijau
d_6 = waktu saat proses pengepressan adonan kulit bakpia
d_7 = waktu saat proses pengukusan kacang hijau
d_8 = waktu saat proses pembentukan kulit bakpia
d_9 = waktu saat proses penggilingan kacang hijau yang telah dikukus
d_{10}=waktu saat proses pencampuran adonan kacang hijau dengan minyak, gula dan garam
d_{11} = waktu pendinginan 1 adonan kacang hijau
d_{12} = waktu pendinginan 2 adonan kacang hijau
d_{13}=waktu proses pembungkusan adonan kacang hijau dengan kulitnya
d_{14} = waktu proses pemanggangan bakpia
d_{15} = waktu proses pengepakan bakpia
P_1 = penggilingan kacang hijau
P_2 = pengayakan tepung
P_3 = perendaman kacang hijau
P_4 = pencampuran adonan kulit bakpia
P_5 = pemisahan kulit kacang hijau
P_6 = pengepressan adonan kulit bakpia
P_7 = pengukusan kacang hijau
P_8 = pembentukan kulit bakpia
P_9 = penggilingan kacang hijau yang telah dikukus
P_{10} = pencampuran adonan kacang hijau dengan minyak, gula dan garam
P_{11} = pendinginan 1 adonan kacang hijau
P_{12} = pendinginan 2 adonan kacang hijau
P_{13} = pembungkusan adonan kacang hijau dengan kulitnya
P_{14} = pemanggangan bakpia
P_{15} = pengepakan bakpia

Pemodelan Sistem Produksi Bakpia Pathok Jaya "25" dengan SLMI

Sistem Produksi Bakpia Pathok Jaya "25" ini terdiri dari 15 unit pemrosesan P_1, P_2, P_3, P_4, ... P_{15}. Kacang hijau dimasukkan ke P_1 untuk digiling dan dikirimkan ke P_3 untuk dilakukan proses perendaman, dari P_3 kemudian dikirimkan sampai dengan P_{12} untuk diproses pendinginan. Tepung dimasukkan ke P_2 untuk dilakukan pengayakan dan dikirimkan sampai dengan P_8 untuk dilakukan pembentukan kulit bakpia. Waktu pemrosesan untuk P_1, P_2, P_3, P_4, ..., P_{15} berturut-turut adalah $d_1 = 20$, $d_2 = 20$, $d_3 = 120$, $d_4 = 28$, $d_5 = 30$, $d_6 = 20$, $d_7 = 30$, $d_8 = 25$, $d_9 = 30$, $d_{10} = 30$, $d_{11} = 15$, $d_{12} = 5$, $d_{13} = 15$, $d_{14} = 15$, dan $d_{15} = 20$ satuan waktu (menit).

Didefinisikan Proses Produksi Bakpia Pathok Jaya "25" sebagai berikut:

i) $u(k+1)$: waktu saat bahan baku kacang hijau dan tepung dimasukkan ke sistem untuk pemrosesan ke-$(k+1)$,

ii) $x_i(k)$: waktu saat bahan kacang hijau maupun tepung di dilakukan pemrosesan ke-i dan mulai bekerja untuk pemrosesan ke-k,

iii) $y(k)$: waktu saat produk bakpia ke-k yang diselesaikan meninggalkan sistem.

Waktu saat P_1 mulai bekerja untuk pemrosesan ke-$(k+1)$ dapat ditentukan sebagai berikut. Unit pemrosesan P_1 hanya dapat mulai bekerja pada sejumlah bahan baku baru segera setelah menyelesaikan pemrosesan sebelumnya, yaitu sejumlah bahan baku untuk pemrosesan ke-k. . Jika bahan mentah dimasukkan ke sistem untuk pemrosesan ke-(k+1), maka bahan mentah ini tersedia pada input unit pemrosesan P_1 pada waktu $t = u(k+1) + 3$. P_1 hanya dapat mulai bekerja pada sejumlah bahan baku baru segera setelah menyelesaikan pemrosesan sebelumnya, yaitu sejumlah bahan baku untuk pemrosesan ke-k. Waktu pemrosesan pada P_1 adalah $d_1 = 20$ satuan waktu (menit), maka produk setengah-jadi ke-k akan meninggalkan P_1 pada saat $t = x_1(k) + 20$. Menggunakan operasi Aljabar *Max-Plus* maka diperoleh:

$\boldsymbol{x_1(k+1)} = \mathbf{max}\ (u(k+1) + 3, x_1(k) + 20)$ untuk $k = 1, 2, 3, \ ...15$

Dengan alasan yang sama untuk P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14},dan P_{15} waktu saat produk ke-k yang diselesaikan meninggalkan sistem, diperoleh:

$\boldsymbol{x_2(k+1)} = \mathbf{max}\ (u(k+1) + 2, x_2(k) + 20)$

$\boldsymbol{x_3(k+1)} = \mathbf{max}\ (x_1(k) + 42, x_3(k) + 120, u(k+1) + 25)$

$\boldsymbol{x_4(k+1)} = \mathbf{max}\ (x_2(k) + 44, x_4(k) + 28, u(k+1) + 24)$

$\vdots$

$\boldsymbol{x_{15}(k+1)} = \mathbf{max}\ (u(k+1) + 343, x_1(k) + 360, x_3(k) + 337, x_5(k) + 225, x_7(k) + 191, x_9(k) + 157, x_{10}(k) + 126, x_{11}(k) + 76, x_{12}(k) + 50, x_2(k) + 161, x_4(k) + 135, x_6(k) + 96, x_8(k) + 90, x_{13}(k) + 52, x_{14}(k) + 34, x_{15}(k) + 20)$

$\boldsymbol{y(k)} = x_{15}(k) + 20 + 0$ untuk $k = 1, 2, 3, \ ... .$

Menggunakan operasi Aljabar *Max-Plus*, persamaan-persamaan dalam model sistem produksi sederhana di atas dapat dituliskan sebagai berikut (setelah di urutkan) :

$\boldsymbol{x_1(k+1)} = 20 \otimes x_1(k) \oplus 3 \otimes u(k+1)$

$\boldsymbol{x_2(k+1)} = 20 \otimes x_2(k) \oplus 2 \otimes u(k+1)$

$\boldsymbol{x_3(k+1)} = 42 \otimes x_1(k) \oplus 120 \otimes x_3(k) \oplus 25 \otimes u(k+1)$

$\boldsymbol{x_4(k+1)} = 44 \otimes x_2(k) \oplus 28 \otimes x_4(k) \oplus 24 \otimes u(k+1)$

$\vdots$

$\boldsymbol{x_{15}(k+1)} = 360 \otimes x_1(k) \oplus 337 \otimes x_3(k) \oplus 225 \otimes x_5(k) \oplus 191 \otimes x_7(k) \oplus 157 \otimes x_9(k) \oplus 126 \otimes x_{10}(k) \oplus 77 \otimes x_{11}(k) \oplus 50 \otimes x_{12}(k) \oplus 161 \otimes x_2(k) \oplus 135 \otimes x_4(k) \oplus 97 \otimes x_6(k) \oplus 90 \otimes x_8(k) \oplus 52 \otimes x_{13}(k) \oplus 34 \otimes x_{14}(k) \oplus 20 \otimes x_{15}(k) \oplus 343 \otimes u(k+1)$

$\boldsymbol{y(k)} = 20 \otimes x_{15}(k)$.

Penentuan subpenyelesaian terbesar, input paling lambat dan minimasi simpangan input paling lambat pada Sistem Produksi Bakpia Pathok Jaya "25"

Berdasarkan pemodelan Sistem Persamaan Linear Aljabar *Max-Plus* tersebut dapat dituliskan persamaan matriks dalam Sistem Linear *Max-Plus* Waktu *Invariant*, persamaan-persamaannya menjadi:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}
20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
42 & \varepsilon & 120 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & 44 & \varepsilon & 28 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
165 & \varepsilon & 143 & \varepsilon & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & 74 & \varepsilon & 58 & \varepsilon & 20 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
199 & \varepsilon & 177 & \varepsilon & 64 & \varepsilon & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & 96 & \varepsilon & 70 & \varepsilon & 42 & \varepsilon & 25 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
232 & \varepsilon & 210 & \varepsilon & 97 & \varepsilon & 63 & \varepsilon & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
264 & \varepsilon & 242 & \varepsilon & 129 & \varepsilon & 95 & \varepsilon & 62 & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
298 & \varepsilon & 276 & \varepsilon & 163 & \varepsilon & 129 & \varepsilon & 96 & 64 & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
315 & \varepsilon & 292 & \varepsilon & 180 & \varepsilon & 146 & \varepsilon & 112 & 81 & 32 & 5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
323 & 124 & 300 & 98 & 188 & 60 & 154 & 53 & 120 & 89 & 40 & 13 & 15 & \varepsilon & \varepsilon \\
341 & 142 & 318 & 116 & 206 & 78 & 172 & 71 & 138 & 107 & 58 & 31 & 33 & 15 & \varepsilon \\
360 & 161 & 337 & 135 & 225 & 97 & 191 & 90 & 157 & 126 & 77 & 50 & 52 & 34 & 20
\end{bmatrix}\otimes x(k)\oplus\begin{bmatrix}3\\2\\25\\24\\148\\54\\182\\76\\215\\247\\281\\298\\306\\324\\343\end{bmatrix}\otimes u(k+1)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 20\end{bmatrix}\otimes x(k)$$

untuk k = 1, 2, 3, ..., 15 dengan $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k), x_5(k), x_6(k), x_7(k), x_8(k), x_9(k), x_{10}(k), x_{11}(k), x_{12}(k), x_{13}(k), x_{14}(k), x_{15}(k)]^T$.

Matriks A sebagai sistem produksi Bakpia Pathok Jaya “25” yang sedang berlangsung, matriks B waktu transfer dari awal bahan baku masuk ke sistem produksi sebelum kejadian ke-i, lalu matriks C waktu kejadian akhir dan waktu *transfer* sebelum produk Bakpia Pathok Jaya “25” dapat diambil atau selesai dikerjakan, dan matriks x sebagai deadline waktu untuk tiap pemroses (mesin/manual) bahan sesuai bahan yang dimasukkan.

Menggunakan perhitungan *matlab kx0 dan Hu* diperoleh bahwa:

$K\otimes x_0=[380,410,519,639,759,879,999,1119,1239,1359,1479,1599,1719,1839,1959]^T$

$H\otimes u=[363,393,502,622,742,862,982,1102,1222,1342,1462,1582,1702,1822,1942]^T$ maka

$y=[380,410,519,639,759,879,999,1119,1239,1359,1479,1599,1719,1839,1959]^T$ karena $K\otimes x_0 > H\otimes u$

Sesuai hasil tersebut, y digunakan sebagai batas minimal untuk mengoptimisasi waktu produksi bakpia pada program *matlab maxioopt*, $K \otimes \mathbf{x}_0 \leq_m y$. Syarat tersebut digunakan produsen bakpia dapat menentukan waktu optimal memulai produksi Bakpia Pathok Jaya “25” agar dapat memenuhi permintaan konsumen yang telah melakukan pemesanan bakpia dengan menentukan waktu pengambilan bakpia sebelum proses produksi dimulai. Permasalahan tersebut dapat diatasi dengan menggunakan Aljabar *Max-Plus*. Waktu produksi bakpia dapat dilakukan optimisasi dengan menggunakan program *matlab maxioopt*. Misalkan konsumen memesan bakpia berturut-turut dengan waktu (menit) yang telah ditentukan yakni y = [390, 420, 529, 739, 859, 979, 1099, 1219, 1339, 1459, 1479, 1699, 1919, 2039, 2459]^T maka sebelum produsen menentukan waktu optimal (subpenyelesaian terbesar) memulai kegiatan produksi, dengan perhitungan *matlab* (penerapan definisi 1, teorema 1, teorema 2 dan teorema 3) diperoleh *output maxioopt* yang dapat dilihat seperti di bawah ini :

$$\hat{u} = H^T \otimes (-y)$$
$$= [17, 57, 166, 376, 496, 616, 736, 856, 976, 1086, 1116, 1336, 1556, 1676, 2096]^T$$
$$\hat{y} = K \otimes x(0) \oplus H \otimes \hat{u}$$
$$= [380, 420, 529, 739, 859, 979, 1099, 1219, 1339, 1449, 1479, 1699, 1919, 2039, 2459]^T$$
$$\tilde{u} = [22, 62, 171, 381, 501, 621, 741, 861, 981, 1091, 1121, 1341, 1561, 1681, 2101]^T$$
$$\tilde{y} = K \otimes x(0) \oplus H \otimes \tilde{u}$$
$$= [385, 425, 534, 744, 864, 984, 1104, 1224, 1344, 1454, 1484, 1704, 1924, 2044, 2464]^T$$

Perhitungan tersebut mempermudah produsen dalam menentukan waktu memulai proses Produksi Bakpia Pathok Jaya “25”, dalam hal ini $\hat{u}$ dan $\tilde{u}$ merupakan subpenyelesaian terbesar sekaligus waktu memulai produksi. $\hat{u}$ dan $\tilde{u}$ digunakan untuk menentukan jadwal pemesanan Bakpia Pathok Jaya “25” sehingga waktu produksi Bakpia Pathok Jaya “25” dapat dioptimisasi.

Tabel 3. Jadwal Pemesanan Bakpia Pathok Jaya “25” dengan Waktu Mulai Memasukan Bahan Sampai Waktu Pengambilan Produk dalam jangka waktu satu hari (WIB)

Pemesanan Bakpia	Waktu pengambilan (y)	Waktu tercepat memulai produksi $\hat{u}$	Waktu produksi selesai tercepat $\hat{y}$	Waktu terlama memulai produksi $\tilde{u}$	Waktu produksi selesai terlama $\tilde{y}$
1	Pukul 13.30	Pukul 07.17	Pukul 13.20	Pukul 07.22	Pukul 13.25
2	Pukul 14.00	Pukul 07.57	Pukul 14.00	Pukul 08.02	Pukul 14.05
3	Pukul 15.49	Pukul 09.46	Pukul 15.49	Pukul 09.51	Pukul 15.54
4	Pukul 19.19	Pukul 13.16	Pukul 19.19	Pukul 13.21	Pukul 19.24

Bagi produsen untuk memulai proses Produksi dari tabel 3 untuk pemesanan 1 yakni dengan memilih $\tilde{u}$ karena dengan memulai produksi pada pukul 07.22 maka konsumen yang telah memesan Bakpia Pathok Jaya “25” dapat mengambil pesanannya pada pukul 13.25 wib atau setelahnya, dari hal tersebut produsen dapat melayani konsumen tepat waktu dengan menggunakan tabel tersebut sebagai acuan memulai produksi. Selain itu produsen juga bisa memenuhi pemesanan 2 dan 3 tepat waktu dengan memilih $\hat{u}$ sebagai waktu memulai produksi (subpenyelesaian terbesar). Produksi keempat dan seterusnya tidak bisa dijadikan acuan karena telah melewati waktu kerja dalam produksi yaitu pukul 07.00-17.00 wib (kecuali ada kerja lembur). Penjadwalan yang telah dilakukan seperti pada tabel 3 merupakan penjadwalan yang digunakan produsen untuk mengoptimisasi waktu *input* (memasukan bahan-bahan) dan waktu *output* (penyelesaian produk bakpia) sehingga tabel tersebut dapat digunakan sebagai salah satu acuan memulai produksi sehingga jadwal pemesanan bakpia dapat dioptimisasi sehingga pemesanan bakpia untuk waktu tertentu (ditentukan pemesan/konsumen) dapat dilayani tepat waktu.

KESIMPULAN

Dari makalah ini Metode Sistem *Linear Max-Plus* Waktu *Invarian* Satu *Input* Satu *Output* (SLMI SISO) pada Sistem *Event* Diskret (SED) Aljabar *Max-Plus* dapat diterapkan untuk mengoptimisasi Jadwal Pemesanan Bakpia Pathok Jaya "25 sehingga disimpulkan bahwa persamaan $\boldsymbol{x}(k+1) = A \otimes \boldsymbol{x}(k) \oplus B \otimes \boldsymbol{u}(k+1)$ dan $\boldsymbol{y}(k) = C \otimes \boldsymbol{x}(k)$ untuk k = 1, 2, 3, ...15, dapat digunakan untuk memodelkan proses Produksi Bakpia Pathok Jaya "25" (pemodelan sesuai halaman 7). Cara mengoptimalisasi waktu Produksi Bakpia Pathok Jaya "25" dengan metode Sistem Linear *Max-Plus* Waktu *Invarian* (SLMI) ada 2 cara yakni bagi produsen dapat menentukan waktu mulai produksi dengan memilih diantara $\hat{u}$ atau $\tilde{u}$ sehingga waktu penyelesaian produk $\hat{y}$ atau $\tilde{y}$ yang mendekati waktu pengambilan pemesanan yang telah ditentukan oleh konsumen (seperti tabel 3). Jadi, produsen dapat memilih $\hat{u}$ atau $\tilde{u}$ (subpenyelesaian terbesar SLMI pada sistem produksi ini) agar dapat mengoptimalisasi waktu Produksi Bakpia Pathok Jaya "25" sehingga hasil produksi dapat memenuhi permintaan konsumen dan pesanan bakpia juga dapat dilayani tepat waktu.

DAFTAR PUSTAKA

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. and Quadrat, J.P. (2001). Synchronization and Linearity. New York: John Wiley & Sons.

B. Heidergott, B., dkk. (2005). Max Plus at Work Chapter 1. Princeton: Princeton University Press.

De Schutter, B. (1996). Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems. PhD Thesis. Leuven: Department of Electrical Engineering, Katholieke Universiteit.

De Schutter B. and T. van den Boom. (2000). Model predictive control for max-plus-linear discrete-event systems:Extended report & Addendum. A short version of this report has been published in Automatica, vol. 37, no. 7, pp. 1049–1056. Faculty of Information Technology and System, Delt University of Technology, Delft.

Farlow, Kasie G. (2009). Max-Plus Algebra. Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University

Necoara I., De Schutter B., T. van den Boom, and H. Hellendoor. (2008). Model Predictive Control for Uncertain Max-Min-Plus-Scaling Systems. International Journal of Control, vol. 81, no. 5, pp. 701–713.

Rudhito, Andy. (2003). Sistem Linear Max-Plus Waktu Invariant. Tesis tidak diterbitkan. Yogyakarta: Program Pascasarjana Unversitas Gajah Mada. Yogyakarta.