ISBN : 978-979-16353-8-7

A-8

LUAS DAERAH DI R2 DENGAN MEMANFAATKAN GARIS SINGGUNG KURVA

Moh. Affaf, S.Si[1]

[1]Institut Teknologi Bandung, affafs.Teorema@yahoo.com

PENDAHULUAN

Luas daerah di R^2, dibawah kurva f dan di atas sumbu-x (atau sebaliknya), dengan batas x=a sampai x=b diberikan oleh $\int_a^b f(x)dx$. Hasil ini diperoleh dengan mempartisi luas daerah menjadi persegi panjang dan menyatakannya dalam jumlah Riemann. Tehnik ini sudah sangat familiar. Dalam makalah ini, Pemakalah akan mengangkat hal tersebut, tetapi dengan tehnik yang berbeda, yaitu dengan menggunakan partisi segitiga. Selain itu, tehnik menentukan luas daerah ini ialah partisinya dijalankan dari kurva (selanjutnya disebut kurva utama), bukan dari sumbu-x seperti pada tehnik yang sudah dikenal sebelumnya.

Hal yang membedakan tehnik ini dengan tehnik yang sudah ada, yaitu harus menentukan satu titik pada kurva atau garis (selanjutnya disebut titik utama) yang membatasi daerah yang akan ditentukan luasnya. Ide dasar dari tehnik ini sederhana, yaitu dengan memanfaatkan luas segitiga yang dibatasi tiga garis di R^2 yang menggunakan jarak titik ke garis. Dari sini diperoleh bahwa menentukakn luas suatu segitiga dapat diketahui dengan cara memanfaatkan persamaan garis salah satu sisinya. Hal ini yang nantinya akan dipakai sebagai “garis singgung” pada kurva utama untuk menyatakan luas daerah di R^2.

Seperti halnya kebanyakan tehnik, tehnik ini juga memiliki keterbatasan, yaitu hanya bisa digunakan untuk daerah yang dibatasi oleh tiga garis, dua garis dan satu kurva, atau satu kurva dan satu garis. Namun ini juga bukan merupakan suatu masalah yang serius, karena jika jika luas yang diinginkan tidak memenuhi 3 kondisi di atas,

 ISBN : 978-979-16353-8-7

daerah yang dimaksud bisa dibagi menjadi beberapa bagian sehingga memenuhi satu dari tiga kondisi di atas.

PEMBAHASAN

Untuk mengawali pembahasan ini, penulis terlebih dahulu mendefinisikan posisi titik terhadap garis.

Definisi 1. Diberikan $l \equiv y + ax + b = 0$ dan $A(x_a, y_a)$. Dikatakan:

(i) $A > l \leftrightarrow y_a + ax_a + b > 0$

(ii) $A = l \leftrightarrow y_a + ax_a + b = 0$

(iii)$A < l \leftrightarrow y_a + ax_a + b < 0$

Dari definisi di atas, diperoleh lemma berikut

Lemma 1. Diberikan $l \equiv y + ax + b = 0$ dan $A(x_a, y_a)$. Untuk $A'(x_a, y'_a) \in l$, maka:

(i) $A > l \leftrightarrow y_a > y'_a$

(ii) $A = l \leftrightarrow y_a = y'_a$

(iii)$A < l \leftrightarrow y_a < y'_a$

Bukti;

(i) $(\rightarrow)$

Karena $> l$, maka $y_a + ax_a + b > 0$ atau $y_a > -ax_a - b = y'_a$, Karena $A' \in l$

$(\leftarrow)$

Karena $y_a > y'_a$, maka $\exists b \in R, b > 0 \ni y_a = b + y'_a$, sehingga

$y_a + ax_a + b = b + y'_a + ax_a + b = b + 0 = b > 0$

(ii) Analog dengan (i) , begitupula (iii)

Selanjutnya, didefinisikan kemiringan suatu garis

Definisi 2. Diberikan $l \equiv y = mx + n$.

 ISBN : 978-979-16353-8-7

(i) Untuk setiap $A(x_a,y_a),B(x_b,y_b) \in l;\ A \neq B$, berlaku

$m = \dfrac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$

kita katakan m sebagai gradient (kemiringan) dari l dan umumnya m dari l dituliskan dengan m_l

(ii) Jika diketahui garis g tidak berpotongan dengan garis l ($g||l$), maka gradien dari g sama dengan gradien dari l, yaitu $m_g = m_l$

Teorema 1. Diberikan garis l dan g dengan $g||l$. Jika $(x_a,y_a) \in g, A > l$, maka:

(i) $\forall_{B(x_b,y_b)\in g}, B > l$

(ii) $\forall_{P(x_p,y_p)\in l}, P < g$

Bukti:

(i) Karena $A > l$, maka $y_a > y'_a$ untuk $A'(x_a,y'_a) \in l$. Sekarang ambil $B(x_b,y_b) \in g$,$B \neq A$ dan $B'(x_b,y'_b) \in l$, maka

$$m_g = m_l$$

$$\frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} = \frac{y'_a - y'_b}{x_a - x_b}$$

$$y_a - y'_a = y_b - y'_b$$

Karena $y_a > y'_a$, maka $y_b > y'_b$. Berdasarkan lemma 1(i), maka $B > l$

(ii) Analog

Teorema 2. Diberikan garis l dan g dengan $m_g > m_l$ dan $g \cap l = \{(x_0,y_0)\}$

(i) $\forall_{A(x_a,y_a)\in g}; x_a > x_0 \leftrightarrow A > l$

(ii) $\forall_{A(x_a,y_a)\in g}; x_a < x_0 \leftrightarrow A < l$

(iii) $\forall_{B(x_b,y_b)\in l}; x_b > x_0 \leftrightarrow B < g$

(iv) $\forall_{B(x_b,y_b)\in l}; x_b < x_0 \leftrightarrow B > g$

Bukti :

(i) $(\rightarrow)$

Ambil $A(x_a,y_a) \in g\ ; x_a > x_0$dan $A'(x_a,y_a') \in l$, maka

$$m_g > m_l$$

 ISBN : 978-979-16353-8-7

$$\frac{y_a - y_0}{x_a - x_0} > \frac{y_a' - y_0}{x_a - x_0}$$

$$y_a - y_0 > y_a' - y_0$$

$$y_a > y_a'$$

berdasarkan lemma 1 (i), maka $A > l$.

($\leftarrow$)

Andai $A < l$; tetapi $A \in g$ dengan $x_a > x_0$. Ambil $A'(x_a, y_a') \in l$, maka

$$y_a < y_a'$$

$$y_a - y_0 < y_a' - y_0$$

$$\frac{y_a - y_0}{x_a - x_0} < \frac{y_a - y_0}{x_a - x_0}$$

$$m_g < m_l$$

kontradiksi dengan $m_g > m_l$

Untuk (ii), (iii), dan (iv) bukti sejalan.

Untuk selanjutnya, jika suatu garis, katakan l; melalui titik A dan B, maka kita dapat menuliskan l sebagai l_{AB}

Definisi 3. Diberikan A, B, dan C, maka daerah yang dibatasi oleh l_{AB}, l_{BC}, dan l_{AC} kita katakan sebagai daerah dari segitiga ABC. Jika $l_{AB} = l_{BC} = l_{AC}$, maka segitiga ABC tidak memiliki daerah. Kemudian, dikatakan dua buah segitiga, misal segitiga A_1AA_2 dan segitiga A_2AA_3 saling disjoin jika keduanya tidak memiliki daerah persekutuan, yang dituliskan sebagai $\Delta_{A_1AA_2} \cap \Delta_{A_2AA_3} = \emptyset$

Teorema 3. Diberikan titik $A(x_a, y_a), A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$, dan $A_3(x_3, y_3)$ dengan $x_1 < x_2 < x_3$. Jika $A \geq l_{A_1A_2}$ dan $A \geq l_{A_2A_3}$ atau $A \leq l_{A_1A_2}$ dan $A \leq l_{A_2A_3}$, maka $\Delta_{A_1AA_2} \cap \Delta_{A_2AA_3} = \emptyset$

Bukti:

Untuk kasus yang melibatkan tanda samadengan, jelas.

untuk $A > l_{A_1A_2}$ dan $A > l_{A_2A_3}$

kita cukup membuktikan $l_{A_1A} \cap l_{A_2A_3} = \emptyset$ dalam selang (x_2, x_a) atau dengan $l_{A_3A} \cap l_{A_2A_1} = \emptyset$ dalam selang (x_a, x_2). Jelas kita cukup dengan membuktikan salah satu dari dua kasus ini.

(i) $x_a < x_2$; akan dibuktikan bahwa $l_{A_3A} \cap l_{A_2A_1} = \emptyset$ dalam selang (x_a, x_2) karena $A > l_{A_2A_3}$, maka terdapat $(x_a, y'_a) \in l_{A_2A_3}$ dengan $y_a > y'_a$. Karena $l_{A_3A} \cap l_{A_2A_3} = \{(x_3, y_3)\}$, maka

$$y_a > y'_a$$

$$y_a - y_3 > y'_a - y_3$$

$$\frac{y_a - y_3}{x_a - x_3} < \frac{y'_a - y_3}{x_a - x_3}$$

$$m_{l_{A_3A}} < m_{l_{A_2A_3}}$$

Maka berdasarkan Teorema 2(ii), $A_2 < l_{A_3A}$. Tetapi $A_2 \in l_{A_2A}$ dan kita tahu $l_{A_3A} \cap l_{A_2A} = \{(x_a, y_a)\}$ maka dapat diketahui bahwa $m_{l_{A_3A}} > m_{l_{A_2A}}$ sehingga berdasar Teorema 2(iii), $\forall_{B(x_b,y_b)\in l_{A_2A}}; x_b < x_a$, maka $B < l_{A_3A}$. Sekarang, karena $A > l_{A_2A_1}$ maka terdapat $(x_a, y''_a) \in l_{A_2A_1}$ sehingga $y_a > y''_a$. Dan karena $l_{A_2A_1} \cap l_{A_2A} = \{(x_2, y_2)\}$, Maka $m_{l_{A_2A}} < m_{l_{A_2A_1}}$ sehingga berdasarkan Teorema 2(ii), $\forall_{P(x_p,y_p)\in l_{A_2A_1}}; x_p < x_2$, maka $P < l_{A_2A}$, sehingga kita peroleh $\forall_{P(x_p,y_p)\in l_{A_2A_1}}; x_p \in (x_a, x_2)$, berlaku $P < l_{A_3A}$ atau dengan kata lain $l_{A_3A} \cap l_{A_2A_1} = \emptyset$ dalam selang (x_a, x_2)

$x_a = x_2$; jelas

(ii) $x_a > x_2$; akan dibuktikan bahwa $l_{A_3A_1} \cap l_{A_2A} = \emptyset$ dalam selang (x_2, x_a) sejalan dengan (i)

Untuk kasus $A < l_{A_1A_2}$ dan $A < l_{A_2A_3}$ senada.

Teorema 4. Diberikan $A(x_a, y_a), A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), \dots, A_n(x_n, y_n)$ dengan $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$. Jika $A \geq l_{A_1A_2}, A \geq l_{A_2A_3}, \dots, A \geq l_{A_{n-1}A_n}$ atau $A \leq l_{A_1A_2}, A \leq l_{A_2A_3}, \dots, A \leq l_{A_{n-1}A_n}$, maka $\Delta A_1AA_2, \Delta A_2AA_3, \dots$, dan $\Delta A_{n-1}AA_n$ semuanya disjoin.

Bukti:

(i) Untuk $A > l_{A_1A_2}, A > l_{A_2A_3}, \dots, A > l_{A_{n-1}A_n}$

Tanpa mengurangi keumuman, misal $x_a \in [x_{p-1}, x_p]$ untuk $1 < p < n$, dan berdasarkan Teorema 3, $\forall_{1<i<n}$ berlaku $\Delta A_{i-1}AA_i$ dan ΔA_iAA_{i+1} adalah disjoin. Dan dengan mengikuti alur pada pembuktian Teorema 3, maka diperoleh $\forall_{1\leq q<p}$, maka $(x_r, y_r) < l_{A_qA_{q+1}}$; $x_r \in (x_t, x_{t+1})$ untuk suatu $q < t < p-1$ dan $\forall_{p\leq s<n}$, maka $(x'_r, y'_r) < l_{A_sA_{s+1}}$ dengan $x'_r \in (x_u, x_{u+1})$ untuk suatu $s < u < n$. Dengan demikian, jelas bahwa ΔA_1AA_2,ΔA_2AA_3, … , dan $\Delta A_{n-1}AA_n$ semuanya disjoin. Untuk kasus $A > l_{A_1A_2}, A > l_{A_2A_3}, \dots, A > l_{A_{n-1}A_n}$ bukti sejalan.

(ii) Untuk kasus $A < l_{A_1A_2}, A < l_{A_2A_3}, \dots, A < l_{A_{n-1}A_n}$ sejalan, begitupula untuk kasus yang melibatkan tanda 'samadengan'.

Definisi 4. Diberikan $A(x_a, y_a)$ dan $B(x_b, y_b)$. maka panjang AB, diberikan oleh $|AB|$, yaitu:

$$|AB| = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Definisi 5. Diberikan $l \equiv y + ax + b = 0$ dan $A(x_a, y_a)$, maka jarak titik A ke l diberikan oleh R, yaitu:

$$R = \left|\frac{y_a + ax_a + b}{\sqrt{a^2+1}}\right|$$

Teorema 5. Diberikan $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, dan $C(x_c, y_c)$. Misal $x_b > x_a$, Maka luas segitiga ABC diberikan oleh L, yaitu:

$$L = \frac{1}{2}|y_c - y_i - mx_c + mx_i|(x_b - x_a)$$

dengan m adalah gradient l, dimana $A, B, (x_i, y_i) \in l$

Bukti:

 ISBN : 978-979-16353-8-7

Ambil $T \in \overline{AB}$ sehingga $\overline{CT}$ tegak lurus $\overline{AB}$. Misal l adalah garis yang melalui A dan B, maka persamaan garis l diberikan oleh

$$l \equiv y - mx + mx_i - y_i = 0$$

untuk suatu $(x_i, y_i) \in l$. Berdasarkan Definisi 4, maka panjang AB adalah $|AB| = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$

dan berdasarkan Definisi 5, maka panjang CT adalah $|CT| = \left|\frac{y_c - mx_a + mx_i - y_i}{\sqrt{m^2+1}}\right|$

Maka luas segitiga ABC diberikan oleh L, yaitu:

$$L = \frac{1}{2}.|CT|.|AB|$$

$$L = \frac{1}{2}\left|\frac{y_c - mx_a + mx_i - y_i}{\sqrt{m^2+1}}\right|\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

$$L = \frac{1}{2}\left|\frac{y_c - mx_a + mx_i - y_i}{\sqrt{m^2+1}}\right|(x_a - x_b)\sqrt{1 + \left(\frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}\right)^2}$$

$$L = \frac{1}{2}\left|\frac{y_c - mx_a + mx_i - y_i}{\sqrt{m^2+1}}\right|(x_a - x_b)\sqrt{1 + m^2}$$

$$L = \frac{1}{2}|y_c - y_i - mx_c + mx_i|(x_b - x_a)$$

Definisi 6. Integral tentu didefinisikan sebagai berikut:

Misal f adalah fungsi yang didefinisikan dalam [a,b]. Jika $\lim_{n \to 0} \sum^{n} f(\bar{x}_i) dx_i$ ada, maka dikatakan f terintegralkan pada [a,b].

Kemudian, $\int_a^b f(x)dx$ dikatakan integral tentu (atau integral riemann) f dari a ke b, yang dinyatakan

 ISBN : 978-979-16353-8-7

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{p\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)dx_i$$

Teorema 6. Diberikan fungsi f kontinu pada $[a,b]$ dan garis g dengan $f'(x)$ ada $\forall_{x\in[a,b]}$, lalu dibentuk fungsi $h:\ [a,b]\to$ ***R***, dengan rumus fungsi

$$h(x) = y_a - f(x) - x_a f'(x) + xf'(x)$$

Untuk $(x_a, y_a) \in g$ dengan $x_a \in [a,b]$. Maka:

(i) Jika $h(x) \geq 0$, maka luas yang dibatasi oleh f dan g diberikan oleh L, yaitu:

$$L = \frac{1}{2}\int_a^b h(x)dx$$

(ii) Jika $h(x) \leq 0$, maka luas yang dibatasi oleh f dan g diberikan oleh L, yaitu:

$$L = \frac{1}{2}\int_a^b -h(x)dx$$

Bukti: (i) Ambil $(x_a, y_a) \in g$ dan $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n \in f$ dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Kemudian,

kita bentuk ΔA_0AA_1,ΔA_1AA_2, … , $\Delta A_{n-1}AA_n$. Maka,

untuk suatu $\Delta A_{i-1}AA_i; 0 \leq i \leq n$, berdasarkan Teorema 5, luas $\Delta A_{i-1}AA_i$ diberikan oleh

$$L_{\Delta A_{i-1}AA_i} = \frac{1}{2}\left|y_a - f(x_i) - \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}x_a + \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}x_i\right|(x_i - x_{i-1})$$

Jika $\Delta_i = x_i - x_{i-1} \to 0$, maka diperoleh

$$L_{\Delta A_{i-1}AA_i} = \frac{1}{2}|y_a - f(x_i) - f'(x_i)x_a + f'(x_i)x_i|\Delta_i$$

Karena $x_i \in [a,b]$ dan $(x_i, f(x_i)) \in f$, maka

$$y_a - f(x_i) - f'(x_i)x_a + f'(x_i)x_i = h(x_i) \geq 0$$

Oleh karena itu, $\Delta A_0 AA_1, \Delta A_1 AA_2, \dots, \Delta A_{n-1} AA_n$ semuanya disjoin menurut Teorema 4. Kemudian, dengan mempartisi $[a, b]$ mendekati tak hingga, maka luas yang dibatasi oleh f dan g diberikan oleh L, yaitu:

$$L = \lim_{p\to 0} \sum_{i=0}^{n} L_{\Delta A_{i-1} AA_i}$$

$$L = \lim_{p\to 0} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2} |y_a - f(x_i) - f'(x_i)x_a + f'(x_i)x_i| \Delta_i$$

$$L = \lim_{p\to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} (y_a - f(x_i) - f'(x_i)x_a + f'(x_i)x_i) \Delta_i$$

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} y_a - f(x) - x_a f'(x) + x f'(x) dx$$

$$L = \frac{1}{2} \int_a^b h(x) dx$$

Untuk (ii), bukti sejalan.

KESIMPULAN

Manfaat

Dari sini diperoleh bahwa menentukakn luas suatu segitiga dapat diketahui dengan cara memanfaatkan persamaan garis salah satu sisinya. Hal ini yang nantinya akan dipakai sebagai "garis singgung" pada kurva utama untuk menyatakan luas daerah di R^2. Selain itu, dapat juga diketahui luas daerah yang sama dengan bentuk geometri yang berbada. Dan yang tak kalah penting dari 2 manfaat di atas, dari sini kita semakin diberikan bukti bahwa Matematika itu bukanlah hal yang kaku.

Saran

ISBN : 978-979-16353-8-7

Selain di R^2 , bahasan ini juga bisa diperluas di R^3, yaitu bagaimana mencari volum suatu kurva di R^3 dengan memanfaatkan bidang singgungnya.

DAFTAR PUSTAKA

Ball, John, Oxford User's Guide to Mathematics, Oxford University Press. 2003