ISBN : 978-979-16353-8-7

A7

APLIKASI SISTEM LINEAR MAX-PLUS INVARIANT PADA SISTEM PRODUKSI TEMPE SUPER DANGSUL DI YOGYAKARTA

Hendra Listya Kurniawan[1] , Musthofa[2]

[1]Mahasiswa Program Studi Matematika Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY,
[2]Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta
[1]hendra.listya.kurniawan@gmail.com, [2]musthofa@uny.ac.id

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk membuat model, menganalisis *input-output* serta mengoptimalkan waktu produksi Tempe Super Dangsul. Langkah awal dalam penelitian ini adalah dengan memodelkan waktu produksi Tempe Super Dangsul dalam Sistem Persamaan Linier Aljabar Max-Plus. Setelah model terbentuk, dapat dilakukan analisis *input-output* sehingga produsen dapat mengetahui waktu produksi tempe akan selesai. Namun apabila pemesan menentukan waktu pengambilannya terlebih dahulu, maka produsen dapat mengoptimalkan waktu mulai produksi dengan mencari subpenyelesaian terbesar dan waktu simpangannya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa Sistem *Linear Max-Plus Invariant* produksi Tempe Super Dangsul merupakan Sistem *Event* Diskret (SED) yang dapat dinyatakan dengan pemodelan unsur-unsur dalam sistem produksi Tempe Super Dangsul. Produsen Tempe Super Dangsul dapat membuat jadwal pesanan selesai dikerjakan dengan analisis *input-output* dan membuat jadwal waktu dimulainya produksi apabila pemesan menetukan waktu pengambilan produk.

Kata kunci : optimasi, sistem produksi**,** sistem linear Max-Plus Invariant

PENDAHULUAN

Aljabar Max-Plus telah banyak digunakan dalam menyelesaikan persoalan di berbagai bidang seperti teori graf, kombinatorika, teori sistem, teori antrian dan proses stokastik. Hal ini telah dibahas dalam beberapa buku dan jurnal seperti Bacelli,*et.al* (2001), Heidergott, (1999), B. De Schutter dan T. van den Boom (2000), I. Necoara, B. De Schutter, T. van den Boom, dan H. Hellendoor (2008). Selanjutnya Aljabar Max-Plus ini akan digunakan dalam penelitian sistem produksi tempe.

Tempe merupakan makanan yang banyak dikonsumsi karena gizi dan harganya yang relatif terjangkau untuk semua kalangan masyarakat. Berdasarkan hal tersebut, industri tempe kini meningkat menjadi industri yang berskala tinggi dan menyerap banyak tenaga kerja sehingga perlu adanya suatu penelitian tentang optimisasi sistem produksi untuk dapat memberikan pelayanan yang terbaik kepada konsumen. Salah satu industri tempe

 ISBN : 978-979-16353-8-7

yang saat ini sedang berkembang di Yogyakarta adalah UD. Super Dangsul. Penulis memilih Industri Tempe Super Dangsul sebagai lokasi dalam penelitian ini karena industri tempe ini merupakan industri tempe yang terkenal di Yogyakarta.

Penelitian dalam sistem produksi ini menggunakan Sistem Linier Max-Plus *Invariant*. Sebuah sistem dikatakan waktu *invariant*, jika respon terhadap suatu urutan *input* tertentu tidak tergantung pada waktu mutlak dan deterministik (sistem yang operasinya dapat diprediksi secara tepat). Sistem Linier Max-Plus Invariant dapat digunakan untuk menganalisis input-output serta mengoptimalakan sistem produksi Tempe Super Dangsul.

PEMBAHASAN

Sistem *Event* Diskret dan Sistem Linier Max-Plus *Invariant*

Sistem *event* diskret (SED) didefinisikan sebagai suatu sistem terkendali kejadian yang mempunyai keadaan diskret. Salah satu karakteristik dari SED adalah sistem yang terkendali (*event-driven system*). *Event-driven system* didefinisikan bahwa perubahan keadaan merupakan hasil dari kejadian sebelumnya (Necoara *et.al*., 2008:1).

Definisi 1. Sistem Linear Max-Plus Waktu Invariant (Schutter, 1996: 5)
Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant adalah SED yang dapat dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A \otimes \boldsymbol{x}(k) \oplus B \otimes \boldsymbol{u}(k+1)$$
$$\boldsymbol{y}(k) = C \otimes \boldsymbol{x}(k)$$

Pemodelan Sistem Produksi Tempe Super Dangsul dengan Sistem Linier Max-Plus *Invariant*

a) Sistem Produksi Tempe Super Dangsul

Proses-proses tahapan dalam sistem produksi Tempe Super Dangsul yang disajikan dalam graf pada Gambar 1. Dan didapatkan model sebagai berikut menurut graf sistem produksi Tempe Super Dangsul menurut Gambar 1 :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_1(k+1)} &= 627 \otimes x_1(k) \oplus 4 \otimes u(k+1) \\
\boldsymbol{x_{2(1)}(k+1)} &= 1256 \otimes x_1(k) \oplus 207 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 633 \otimes u(k+1) \\
\boldsymbol{x_{2(2)}(k+1)} &= 1256 \otimes x_1(k) \oplus 183 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 633 \otimes u(k+1) \\
\boldsymbol{x_{2(3)}(k+1)} &= 1256 \otimes x_1(k) \oplus 195 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 633 \otimes u(k+1) \\
\boldsymbol{x_3(k+1)} &= 1465 \otimes x_1(k) \oplus 416 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 368 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 392 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 102 \otimes \\
&\quad x_3(k) \oplus 842 \otimes u(k+1) \\
\boldsymbol{x_{4(1)}(k+1)} &= 1568 \otimes x_1(k) \oplus 519 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 471 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 495 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 205 \otimes \\
&\quad x_3(k) \oplus 1307 \otimes x_{4(1)}(k) \oplus 945 \otimes u(k+1) \\
\boldsymbol{x_{4(2)}(k+1)} &= 1569 \otimes x_1(k) \oplus 520 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 472 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 496 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 206 \otimes \\
&\quad x_3(k) \oplus 1312 \otimes x_{4(2)}(k) \oplus 946 \otimes u(k+1) \\
\boldsymbol{x_{4(3)}(k+1)} &= 1569 \otimes x_1(k) \oplus 520 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 472 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 496 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 206 \otimes \\
&\quad x_3(k) \oplus 1324 \otimes x_{4(3)}(k) \oplus 946 \otimes u(k+1) \\
\boldsymbol{x_{4(4)}(k+1)} &= 1570 \otimes x_1(k) \oplus 521 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 473 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 497 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 207 \otimes \\
&\quad x_3(k) \oplus 1319 \otimes x_{4(4)}(k) \oplus 947 \otimes u(k+1)
\end{aligned}$$

 ISBN : 978-979-16353-8-7

$$\mathbf{x_{4(5)}(k+1)} = 1570 \otimes x_1(k) \oplus 521 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 473 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 497 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 207 \otimes x_3(k) \oplus 1320 \otimes x_{4(5)}(k) \oplus 947 \otimes u(k+1)$$

$$\mathbf{x_{4(6)}(k+1)} = 1569 \otimes x_1(k) \oplus 520 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 472 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 496 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 206 \otimes x_3(k) \oplus 1314 \otimes x_{4(6)}(k) \oplus 946 \otimes u(k+1)$$

$$\mathbf{x_{4(7)}(k+1)} = 1570 \otimes x_1(k) \oplus 521 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 473 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 497 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 207 \otimes x_3(k) \oplus 1313 \otimes x_{4(7)}(k) \oplus 947 \otimes u(k+1)$$

$$\mathbf{x_{4(8)}(k+1)} = 1569 \otimes x_1(k) \oplus 520 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 472 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 496 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 206 \otimes x_3(k) \oplus 1305 \otimes x_{4(8)}(k) \oplus 946 \otimes u(k+1)$$

$$\mathbf{x_{5(1)}(k+1)} = 2896 \otimes x_1(k) \oplus 1847 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 1799 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 1823 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 1533 \otimes x_3(k) \oplus 2616 \otimes x_{4(1)}(k) \oplus 2628 \otimes x_{4(2)}(k) \oplus 2651 \otimes x_{4(3)}(k) \oplus 211 \otimes x_{5(1)}(k) \oplus 2273 \otimes u(k+1)$$

$$\mathbf{x_{5(2)}(k+1)} = 2898 \otimes x_1(k) \oplus 1849 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 1801 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 1825 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 1535 \otimes x_3(k) \oplus 2653 \otimes x_{4(3)}(k) \oplus 2644 \otimes x_{4(4)}(k) \oplus 2644 \otimes x_{4(5)}(k) \oplus 2633 \otimes x_{4(6)}(k) \oplus 250 \otimes x_{5(2)}(k) \oplus 2275 \otimes u(k+1)$$

$$\mathbf{x_{5(3)}(k+1)} = 2888 \otimes x_1(k) \oplus 1839 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 1791 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 1815 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 1525 \otimes x_3(k) \oplus 2633 \otimes x_{4(6)}(k) \oplus 2631 \otimes x_{4(7)}(k) \oplus 2615 \otimes x_{4(8)}(k) \oplus 239 \otimes x_{5(3)}(k) \oplus 2265 \otimes u(k+1)$$

$$\mathbf{x_{6(1)}(k+1)} = 3110 \otimes x_1(k) \oplus 2061 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 2013 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 2037 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 1747 \otimes x_3(k) \oplus 2830 \otimes x_{4(1)}(k) \oplus 2842 \otimes x_{4(2)}(k) \oplus 2865 \otimes x_{4(3)}(k) \oplus 425 \otimes x_{5(1)}(k) \oplus 26 \otimes x_{6(1)}(k) \oplus 2265 \otimes u(k+1)$$

$$\mathbf{x_{6(2)}(k+1)} = 3110 \otimes x_1(k) \oplus 2061 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 2013 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 2037 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 1747 \otimes x_3(k) \oplus 2830 \otimes x_{4(1)}(k) \oplus 2842 \otimes x_{4(2)}(k) \oplus 2865 \otimes x_{4(3)}(k) \oplus 425 \otimes x_{5(1)}(k) \oplus 28 \otimes x_{6(2)}(k) \oplus 2487 \otimes u(k+1)$$

$$\mathbf{x_{6(3)}(k+1)} = 3150 \otimes x_1(k) \oplus 2101 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 2053 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 2077 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 1787 \otimes x_3(k) \oplus 2905 \otimes x_{4(3)}(k) \oplus 2896 \otimes x_{4(4)}(k) \oplus 2896 \otimes x_{4(5)}(k) \oplus 2885 \otimes x_{4(6)}(k) \oplus 502 \otimes x_{5(2)}(k) \oplus 29 \otimes x_{6(3)}(k) \oplus 2527 \otimes u(k+1)$$

$$\mathbf{x_{6(4)}(k+1)} = 3151 \otimes x_1(k) \oplus 2102 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 2054 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 2078 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 1788 \otimes x_3(k) \oplus 2906 \otimes x_{4(3)}(k) \oplus 2897 \otimes x_{4(4)}(k) \oplus 2897 \otimes x_{4(5)}(k) \oplus 2886 \otimes x_{4(6)}(k) \oplus 503 \otimes x_{5(2)}(k) \oplus 32 \otimes x_{6(4)}(k) \oplus 2528 \otimes u(k+1)$$

$$\mathbf{x_{6(5)}(k+1)} = 3130 \otimes x_1(k) \oplus 2081 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 2033 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 2057 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 1767 \otimes x_3(k) \oplus 2875 \otimes x_{4(6)}(k) \oplus 2873 \otimes x_{4(7)}(k) \oplus 2857 \otimes x_{4(8)}(k) \oplus 481 \otimes x_{5(3)}(k) \oplus 30 \otimes x_{6(5)}(k) \oplus 2507 \otimes u(k+1)$$

$$\mathbf{x_{6(6)}(k+1)} = 3130 \otimes x_1(k) \oplus 2081 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 2033 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 2057 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 1767 \otimes x_3(k) \oplus 2875 \otimes x_{4(6)}(k) \oplus 2873 \otimes x_{4(7)}(k) \oplus 2857 \otimes x_{4(8)}(k) \oplus 481 \otimes x_{5(3)}(k) \oplus 30 \otimes x_{6(6)}(k) \oplus 2507 \otimes u(k+1)$$

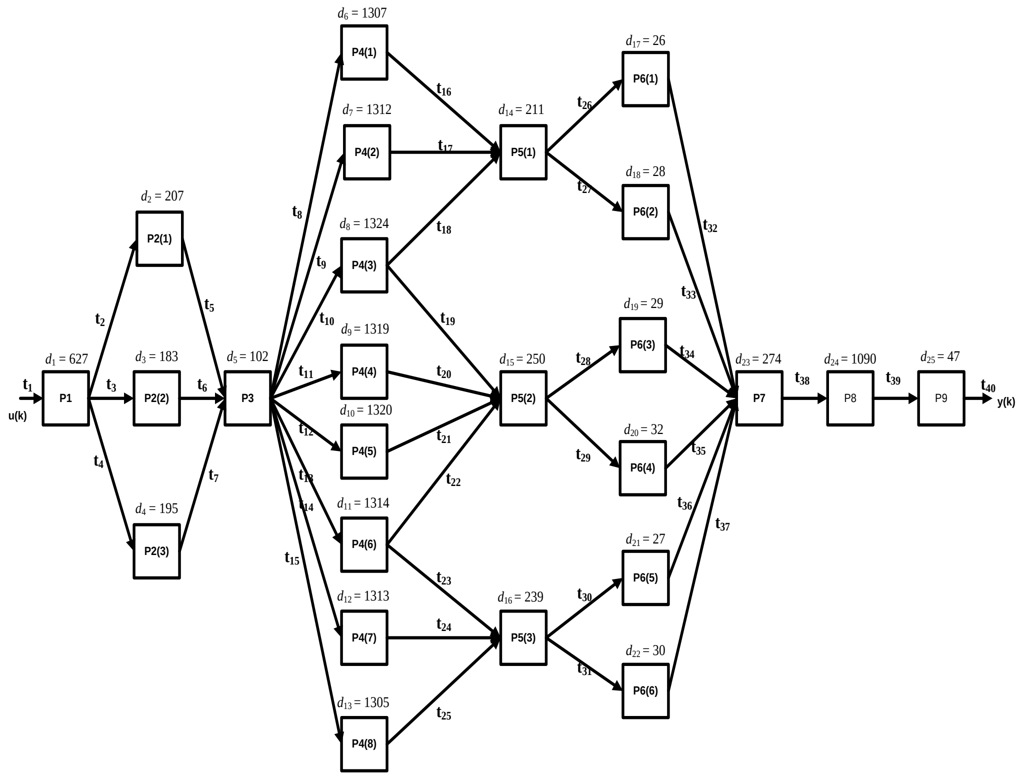
$$\mathbf{x_{7}(k+1)} = 3185 \otimes x_1(k) \oplus 2136 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 2088 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 2112 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 1822 \otimes x_3(k) \oplus 2859 \otimes x_{4(1)}(k) \oplus 2871 \otimes x_{4(2)}(k) \oplus 2940 \otimes x_{4(3)}(k) \oplus 2931 \otimes x_{4(4)}(k) \oplus 2931 \otimes x_{4(5)}(k) \oplus 2920 \otimes x_{4(6)}(k) \oplus 2905 \otimes x_{4(7)}(k) \oplus 2889 \otimes x_{4(8)}(k) \oplus 454 \otimes x_{5(1)}(k) \oplus 537 \otimes x_{5(2)}(k) \oplus 513 \otimes x_{5(3)}(k) \oplus 54 \otimes x_{6(1)}(k) \oplus 57 \otimes x_{6(2)}(k) \oplus 61 \otimes x_{6(3)}(k) \oplus 66 \otimes x_{6(4)}(k) \oplus 56 \otimes x_{6(5)}(k) \oplus 62 \otimes x_{6(6)}(k) \oplus 274 \otimes x_7(k) \oplus 2562 \otimes u(k+1)$$

$$\mathbf{x_{8}(k+1)} = 3465 \otimes x_1(k) \oplus 2416 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 2368 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 2392 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 2102 \otimes x_3(k) \oplus 3139 \otimes x_{4(1)}(k) \oplus 3151 \otimes x_{4(2)}(k) \oplus 3220 \otimes x_{4(3)}(k) \oplus 3211 \otimes x_{4(4)}(k) \oplus 3211 \otimes x_{4(5)}(k) \oplus 3200 \otimes x_{4(6)}(k) \oplus 3185 \otimes x_{4(7)}(k) \oplus 3169 \otimes x_{4(8)}(k) \oplus 734 \otimes x_{5(1)}(k) \oplus 817 \otimes x_{5(2)}(k) \oplus 793 \otimes x_{5(3)}(k) \oplus 334 \otimes x_{6(1)}(k) \oplus 337 \otimes x_{6(2)}(k) \oplus 341 \otimes x_{6(3)}(k) \oplus 346 \otimes x_{6(4)}(k) \oplus 336 \otimes x_{6(5)}(k) \oplus 342 \otimes x_{6(6)}(k) \oplus 554 \otimes x_7(k) \oplus 1090 \otimes x_8(k) \oplus 2842 \otimes u(k+1)$$

$$\mathbf{x_{9}(k+1)} = 4559 \otimes x_1(k) \oplus 3465 \otimes x_{2(1)}(k) \oplus 3462 \otimes x_{2(2)}(k) \oplus 3486 \otimes x_{2(3)}(k) \oplus 3196 \otimes x_3(k) \oplus 4233 \otimes x_{4(1)}(k) \oplus 4245 \otimes x_{4(2)}(k) \oplus 4314 \otimes x_{4(3)}(k) \oplus 4305 \otimes x_{4(4)}(k) \oplus 4305 \otimes x_{4(5)}(k) \oplus 4294 \otimes x_{4(6)}(k) \oplus 4279 \otimes x_{4(7)}(k) \oplus 4263 \otimes x_{4(8)}(k) \oplus 1828 \otimes x_{5(1)}(k) \oplus 1911 \otimes x_{5(2)}(k) \oplus 1887 \otimes x_{5(3)}(k) \oplus$$

$1428 \otimes x_{6(1)}(k) \oplus 1431 \otimes x_{6(2)}(k) \oplus 1435 \otimes x_{6(3)}(k) \oplus 1440 \otimes x_{6(4)}(k) \oplus 1430 \otimes x_{6(5)}(k) \oplus 1436 \otimes x_{6(6)}(k) \oplus 1648 \otimes x_7(k) \oplus 2184 \otimes x_8(k) \oplus 47 \otimes x_9(k)\ 3936 \otimes u(k+1)$

$$\boldsymbol{y(k) = x_9(k) + 53} \quad \textbf{untuk } \boldsymbol{k = 1, 2, 3, \ldots, 25}$$



Gambar 1. Graf Sistem Produksi Tempe Super Dangsul

Keterangan :

P1	:	perendaman I
P2	:	perebusan I
P3	:	penggilingan
P4	:	perendaman II dan pencucian
P5	:	perebusan II
P6	:	pendinginan dan peragian
P7	:	pembungkusan produk
P8	:	penyimpanan produk
P9	:	pemulusan produk

Perlu diperhatikan juga beberapa asumsi untuk penerapan sistem produksi tempe Super Dangsul pada Aljabar Max-Plus ini, diantaranya sebagai berikut :

1. Waktu aktifitas dan barisan kejadian sistem produksi adalah deterministik (operasinya dapat diprediksi secara tepat) (Wetjen, 2004: 11).
2. Sistem produksi melalui semua tahapan proses yang diberikan (Wetjen, 2004: 12).
3. Tidak ada mesin yang rusak (Wetjen, 2004: 12).

4. Pada *input* sistem dan antara unit pemrosesan terdapat penyangga (*buffer*) yang berturut-turut disebut *buffer input* dan *buffer internal* dengan kapasitas yang cukup besar untuk menjamin tidak ada penyangga yang meluap (*overflow*).
5. Suatu unit pemrosesan hanya dapat mulai bekerja untuk suatu produk baru jika telah menyelesaikan pemrosesan produk sebelumnya dengan menggunakan bahan 1 ton kedelai untuk sekali produksi.
6. Sistem produksi Tempe Murni Super Dangsul berjalan terus menerus selama pesanan masih ada.
7. Matriks dalam sistem persamaannya merupakan matriks konstan, yaitu tidak tergantung pada parameter k sehingga sistemnya merupakan sistem waktu *invariant*.

Jika dituliskan dalam persamaan matriks dalam aljabar max-plus, persamaan-persamaan di atas menjadi :

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}
627 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1256 & 207 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1256 & \varepsilon & 183 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1256 & \varepsilon & \varepsilon & 195 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1465 & 416 & 368 & 392 & 102 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1568 & 519 & 471 & 495 & 205 & 1307 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1569 & 520 & 472 & 496 & 206 & \varepsilon & 1312 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1569 & 520 & 472 & 496 & 206 & \varepsilon & \varepsilon & 1324 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1570 & 521 & 473 & 497 & 207 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1319 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1570 & 521 & 473 & 497 & 207 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1320 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1569 & 520 & 472 & 496 & 206 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1314 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1570 & 521 & 473 & 497 & 207 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1313 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1569 & 520 & 472 & 496 & 206 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1305 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
2896 & 1847 & 1799 & 1823 & 1533 & 2616 & 2628 & 2651 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 211 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
2898 & 1849 & 1801 & 1825 & 1535 & \varepsilon & \varepsilon & 2653 & 2644 & 2644 & 2633 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 250 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
2888 & 1839 & 1791 & 1815 & 1525 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2633 & 2631 & 2615 & \varepsilon & \varepsilon & 239 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
3110 & 2061 & 2013 & 2037 & 1747 & 2830 & 2842 & 2865 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 425 & \varepsilon & \varepsilon & 26 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
3110 & 2061 & 2013 & 2037 & 1747 & 2830 & 2842 & 2865 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 425 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 28 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
3150 & 2101 & 2053 & 2077 & 1787 & \varepsilon & \varepsilon & 2905 & 2896 & 2896 & 2885 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 502 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 29 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
3151 & 2102 & 2054 & 2078 & 1788 & \varepsilon & \varepsilon & 2906 & 2897 & 2897 & 2886 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 503 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
3130 & 2081 & 2033 & 2057 & 1767 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2875 & 2873 & 2857 & \varepsilon & \varepsilon & 481 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 27 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
3130 & 2081 & 2033 & 2057 & 1767 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2875 & 2873 & 2857 & \varepsilon & \varepsilon & 481 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
3185 & 2136 & 2088 & 2112 & 1822 & 2859 & 2871 & 2940 & 2931 & 2931 & 2920 & 2905 & 2889 & 454 & 537 & 513 & 54 & 57 & 61 & 66 & 56 & 62 & 274 & \varepsilon & \varepsilon \\
3465 & 2416 & 2368 & 2392 & 2102 & 3139 & 3151 & 3220 & 3211 & 3211 & 3200 & 3185 & 3169 & 817 & 793 & 793 & 334 & 337 & 341 & 346 & 336 & 342 & 554 & 1090 & \varepsilon \\
4559 & 3465 & 3462 & 3486 & 3196 & 4233 & 4245 & 4314 & 4305 & 4305 & 4294 & 4279 & 4263 & 1828 & 1911 & 1887 & 1428 & 1431 & 1435 & 1440 & 1430 & 1436 & 1648 & 2184 & 47
\end{bmatrix}\otimes x(k)\oplus\begin{bmatrix}4\\633\\633\\633\\842\\945\\946\\946\\947\\947\\946\\947\\946\\2273\\2275\\2265\\2265\\2487\\2527\\2528\\2507\\2507\\2562\\2842\\3936\end{bmatrix}\otimes u(k+1)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 53\end{bmatrix}\otimes x(k)$$

untuk k = 1, 2, 3, ..., 25 dengan $x(k) = [x_1(k), x_{2(1)}(k), x_{2(2)}(k), x_{2(3)}(k), x_3(k), x_{4(1)}(k), x_{4(2)}(k), x_{4(3)}(k), x_{4(4)}(k), x_{4(5)}(k), x_{4(6)}(k), x_{4(7)}(k), x_{4(8)}(k), x_{5(1)}(k), x_{5(2)}(k), x_{5(3)}(k), x_{6(1)}(k), x_{6(2)}(k), x_{6(3)}(k), x_{6(4)}(k), x_{6(5)}(k), x_{6(6)}(k), x_7(k), x_8(k), x_9(k)]^T$ Untuk hal ini, keadaan awal dilambangkan $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, sehingga

$$A=\begin{bmatrix}
627 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1256 & 207 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1256 & \varepsilon & 183 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1256 & \varepsilon & \varepsilon & 195 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1465 & 416 & 368 & 392 & 102 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1568 & 519 & 471 & 495 & 205 & 1307 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1569 & 520 & 472 & 496 & 206 & \varepsilon & 1312 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1569 & 520 & 472 & 496 & 206 & \varepsilon & \varepsilon & 1324 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1570 & 521 & 473 & 497 & 207 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1319 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1570 & 521 & 473 & 497 & 207 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1320 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1569 & 520 & 472 & 496 & 206 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1314 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1570 & 521 & 473 & 497 & 207 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1313 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
1569 & 520 & 472 & 496 & 206 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1305 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
2896 & 1847 & 1799 & 1823 & 1533 & 2616 & 2628 & 2651 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 211 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
2898 & 1849 & 1801 & 1825 & 1535 & \varepsilon & \varepsilon & 2653 & 2644 & 2644 & 2633 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 250 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
2888 & 1839 & 1791 & 1815 & 1525 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2633 & 2631 & 2615 & \varepsilon & \varepsilon & 239 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
3110 & 2061 & 2013 & 2037 & 1747 & 2830 & 2842 & 2865 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 425 & \varepsilon & \varepsilon & 26 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
3110 & 2061 & 2013 & 2037 & 1747 & 2830 & 2842 & 2865 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 425 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 28 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
3150 & 2101 & 2053 & 2077 & 1787 & \varepsilon & \varepsilon & 2905 & 2896 & 2896 & 2885 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 502 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 29 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
3151 & 2102 & 2054 & 2078 & 1788 & \varepsilon & \varepsilon & 2906 & 2897 & 2897 & 2886 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 503 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 32 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
3130 & 2081 & 2033 & 2057 & 1767 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2875 & 2873 & 2857 & \varepsilon & \varepsilon & 481 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 27 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
3130 & 2081 & 2033 & 2057 & 1767 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2875 & 2873 & 2857 & \varepsilon & \varepsilon & 481 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
3185 & 2136 & 2088 & 2112 & 1822 & 2859 & 2871 & 2940 & 2931 & 2931 & 2920 & 2905 & 2889 & 454 & 537 & 513 & 54 & 57 & 61 & 66 & 56 & 62 & 274 & \varepsilon & \varepsilon \\
3465 & 2416 & 2368 & 2392 & 2102 & 3139 & 3151 & 3220 & 3211 & 3211 & 3200 & 3185 & 3169 & 817 & 793 & 793 & 334 & 337 & 341 & 346 & 336 & 342 & 554 & 1090 & \varepsilon \\
4559 & 3465 & 3462 & 3486 & 3196 & 4233 & 4245 & 4314 & 4305 & 4305 & 4294 & 4279 & 4263 & 1828 & 1911 & 1887 & 1428 & 1431 & 1435 & 1440 & 1430 & 1436 & 1648 & 2184 & 47
\end{bmatrix}\in\mathbf{R}_{\max}^{25\times25},\ B=\begin{bmatrix}4\\633\\633\\633\\842\\945\\946\\946\\947\\947\\946\\947\\946\\2273\\2275\\2265\\2265\\2487\\2527\\2528\\2507\\2507\\2562\\2842\\3936\end{bmatrix}\in\mathbf{R}_{\max}^{25\times1},$$

dan $C=[\varepsilon\ 53]\in\mathbf{R}_{\max}^{1\times25}$

A didefiniskan sebagai sistem produksi tempe yang sedang berlangsung, *B* sebagai waktu *transfer* dari awal bahan baku kedelai dimasukkan sampai proses ke-i, dan *C* sebagai jumlah waktu proses akhir dan waktu *transfer* sebelum tempe dapat diambil atau selesai dikerjakan.

Analisis *Input-Output* Sistem Produksi Tempe Super Dangsul dengan Sistem Linier Max-Plus *Invariant*

Teorema 1. Input-Output SLMI (*A, B, C,* x_0) (Rudhito, 2003: 56)
Diberikan suatu bilangan bulat positip p. Jika vektor output $\mathbf{y} = [y(1), y(2), \ldots , y(p)]^{T}$ *dan vektor input* $\mathbf{u} = [u(1), u(2), \ldots , u(p)]^{T}$ *pada SLMI (A, B, C,* $\mathbf{x}_0$*) , maka* $\mathbf{y} = K \otimes \mathbf{x}_0 \oplus H \otimes \mathbf{u}$ *dengan*

$$K=\begin{bmatrix} C\otimes A \\ C\otimes A^{\otimes 2} \\ \vdots \\ C\otimes A^{\otimes p}\end{bmatrix} \text{ dan } H=\begin{bmatrix} C\otimes B & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ C\otimes A\otimes B & C\otimes B & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\otimes A^{\otimes p-1}\otimes B & C\otimes A^{\otimes p-2}\otimes B & \cdots & C\otimes B\end{bmatrix}$$

Bukti

Jika diberikan kondisi awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ dan barisan input $\{u(k)\}_{k=0}^{\infty}$, dengan induksi matematik akan dibuktikan berlaku

$$\mathbf{x}(k) = (A^{\otimes k} \otimes \mathbf{x}(0)) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} (A^{\otimes k-i} \otimes B \otimes u(i)\right) \text{ untuk } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Diperhatikan bahwa

$$\boldsymbol{x}(1) = A \otimes \boldsymbol{x}(0) \oplus B \otimes u(1) = A \otimes \boldsymbol{x}(0) \oplus A^{\otimes 0} \otimes B \otimes u(1)$$
$$= (A^{\otimes 1} \otimes \boldsymbol{x}(0)) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{1} (A^{\otimes 1-i} \otimes B \otimes u(i)).$$

Jadi benar untuk $k = 1$.

Misalkan benar untuk $k = n$ yaitu $\boldsymbol{x}(n) = (A^{\otimes n} \otimes \boldsymbol{x}(0)) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{n} (A^{\otimes n-i} \otimes B \otimes u(i))$,

maka $\boldsymbol{x}(n+1) = A \otimes \boldsymbol{x}(n) \oplus B \otimes u(n+1)$

$$= A \otimes ((A^{\otimes n} \otimes \boldsymbol{x}(0)) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{n} (A^{\otimes n-i} \otimes B \otimes u(i))) \oplus B \otimes u(n+1)$$
$$= ((A^{\otimes n+1} \otimes \boldsymbol{x}(0)) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{n} (A^{\otimes (n+1)-i} \otimes B \otimes u(i))) \oplus B \otimes u(n+1)$$
$$= ((A^{\otimes n+1} \otimes \boldsymbol{x}(0)) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{n+1} (A^{\otimes (n+1)-i} \otimes B \otimes u(i))) \oplus B \otimes u(n+1).$$

Jadi benar untuk $k = n+1$.
Akibatnya diperoleh

$$y(k) = (C \otimes A^{\otimes k} \otimes \boldsymbol{x}(0)) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{k} C \otimes A^{\otimes k-i} \otimes B \otimes u(i)) \text{ untuk } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Diberikan suatu bilangan bulat positip p. Jika didefinisikan $\boldsymbol{y} = [y(1), y(2), \ldots, y(p)]^T$ dan $\boldsymbol{u} = [u(1), u(2), \ldots, y(p)]^T$ maka dari persamaan di atas diperoleh:

$$y(1) = C \otimes A \otimes \boldsymbol{x}(0) \oplus C \otimes B \otimes u(1)$$
$$y(2) = C \otimes A^{\otimes 2} \otimes \boldsymbol{x}(0) \oplus C \otimes A \otimes B \otimes u(1) \oplus C \otimes B \otimes u(2)$$
$$\vdots$$
$$y(p) = C \otimes A^{\otimes p} \otimes \boldsymbol{x}(0) \oplus C \otimes A^{\otimes p-1} \otimes B \otimes u(1) \oplus C \otimes A^{\otimes p-2} \otimes B \otimes u(2) \oplus \ldots \oplus C \otimes B \otimes u(p).$$

atau dalam persamaan matriks dapat dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \otimes A \\ C \otimes A^{\otimes 2} \\ \vdots \\ C \otimes A^{\otimes p} \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{x}(0) \oplus \begin{bmatrix} C \otimes B & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ C \otimes A \otimes B & C \otimes B & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes A^{\otimes p-1} \otimes B & C \otimes A^{\otimes p-2} \otimes B & \cdots & C \otimes B \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(p) \end{bmatrix}$$

atau $\boldsymbol{y} = K \otimes \boldsymbol{x}(0) \oplus H \otimes \boldsymbol{u}$ dengan

$$K = \begin{bmatrix} C \otimes A \\ C \otimes A^{\otimes 2} \\ \vdots \\ C \otimes A^{\otimes p} \end{bmatrix} \text{ dan } H = \begin{bmatrix} C \otimes B & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ C \otimes A \otimes B & C \otimes B & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C \otimes A^{\otimes p-1} \otimes B & C \otimes A^{\otimes p-2} \otimes B & \cdots & C \otimes B \end{bmatrix}.$$

SLMI $(A, B, C, \boldsymbol{x}_0)$ dengan suatu barisan vektor keadaan sistem dan barisan output sistem, misalkan kondisi awal sistem $\boldsymbol{x}(0) = [0, \varepsilon]^T$ yang berarti unit pemrosesan P_1 memulai aktifitasnya saat waktu 0,

 ISBN : 978-979-16353-8-7

sementara unit pemrosesan $P_{2(1)}$, $P_{2(2)}$, $P_{2(3)}$ masih kosong dan harus menunggu datangnya input dari P_1. Selanjutnya proses-proses berikutnya juga harus menunggu proses sebelumnya sampai proses terakhir selesai di P_9. Sistem produksi tempe ini dimulai malam hari yaitu pada pukul 19.30 sehingga bahan mentah dimasukkan sistem saat waktu 0 yaitu pada pukul 19.30.

Dalam sistem produksi ini misal dalam sehari ada 5 pesanan, masing-masing membutuhkan bahan kedelai 200 kg,500 kg, 300 kg, 400 kg, dan 600 kg, sehingga membutuhkan dua kali sistem produksi. Pesanan pertama, kedua, dan ketiga dapat dikerjakan pada proses pertama, sedangkan pesanan keempat dan kelima dikerjakan pada proses kedua. Sistem produksi kedua dikerjakan setelah proses perendaman pertama selesai. P_1 mebutuhkan waktu 627 menit dan waktu transfer dari input ke P_1 adalah 4 menit sehingga produksi kedua dapat dimulai pada menit ke- 631 yaitu pukul 06.44 (keesokan harinya), yang berarti diberikan barisan input $u(1) = 0$, $u(2) = 631$, dan seterusnya, untuk setiap $k = 1, 2, 3, ..., 25,...$.

Didefinisikan menurut sistem produksi tempe yang ada, maka dapat diperoleh barisan output sebagai berikut y = $[y(1), y(2), y(3), y(4), y(5), y(6), y(7), y(8), y(9), y(10), y(11), y(12), y(13), y(14), y(15), y(16), y(17), y(18), y(19), y(20), y(21), y(22), y(23), y(24), y(25), y(26)]^T$. Jika diberikan $\mathbf{x}(0) = [0, \varepsilon]^T$ dan barisan input waktu dalam memasukkan bahan baku $\boldsymbol{u} = [0, 631, \varepsilon]^T$

$$y = K \otimes x(0) \oplus H \otimes u = \begin{bmatrix} 4612 \\ 5936 \\ 7260 \\ 8584 \\ 9908 \\ 11232 \\ 12556 \\ 13880 \\ 15204 \\ 16528 \\ 17852 \\ 19176 \\ 20500 \\ 21824 \\ 23148 \\ 24472 \\ 25796 \\ 27120 \\ 28444 \\ 29768 \\ 31092 \\ 32416 \\ 33740 \\ 35064 \\ 36388 \\ 37712 \end{bmatrix}$$

Hal ini berarti bahwa produk selesai dan dapat diantar atau diambil langsung oleh pemesan pada $\boldsymbol{y(1)} = \mathbf{4612}$, $\boldsymbol{y(2)} = \mathbf{5936}$. Untuk memudahkan hasil perhitungan di atas, disajikan tabel sebagai berikut :

Tabel 1 Jadwal Pesanan Produksi Tempe Super Dangsul

Pesanan	**Waktu Pengerjaan**	**Produk Dapat Diambil**
1, 2, dan 3	Hari ke-1 pukul 19.30	Hari ke-3 pukul 00.22 atau sesudahnya
4 dan 5	Hari ke-2 pukul 06.44	Hari ke-4 pukul 22.26 atau sesudahnya

Optimisasi Sistem Produksi Tempe Super Dangsul dengan Sistem Linier Max-Plus *Invariant*

 ISBN : 978-979-16353-8-7

Berikut dibahas masalah input paling lambat pada SLMI (A, B, C, x_0). Masalah input paling lambat pada SLMI (A, B, C, x_0) adalah sebagai berikut :
Diberikan suatu bilangan bulat positip p. Diketahui vektor output $\mathbf{y}$ = [$y(1)$, $y(2)$, ..., $y(p)$]$^{\mathrm{T}}$. *Misalkan vektor input* $\boldsymbol{u}$ = [$u(1)$, $u(2)$, ..., $u(p)$]$^{\mathrm{T}}$ *pada SLMI (A, B, C,* $\boldsymbol{x}_0$*). Permasalahannnya adalah menentukan vektor input* $\boldsymbol{u}$ *terbesar(waktu paling lambat) sehingga memenuhi* $K \otimes \boldsymbol{x}_0 \oplus H \otimes \boldsymbol{u} \preceq_m y$, *dengan K dan H seperti dalam teorema 1.*

Teorema 2. (Rudhito, 2003: 64)
Diberikan SLMI (A, B, C, x_0) dengan $C \otimes B \neq \varepsilon$. *Jika* $K \otimes \boldsymbol{x}_0 \preceq_m y$, *maka penyelesaian masalah input paling lambat pada* SLMI (A, B, C, x_0) *diberikan oleh* $\hat{u} = [\hat{u}(1), \hat{u}(2), ..., \hat{u}(p)]^T$ *dengan* $-\hat{u}(k) = \max\limits_{1 \le i \le p}(-y(i) + H_{i,k})$, *untuk k = 1, 2, …, p.*

Bukti
Masalah input paling lambat pada SLMI (A, B, C, x_0) menjadi masalah menentukan vektor input **u** terbesar (waktu paling lambat) yang memenuhi $H \otimes \boldsymbol{u} \preceq_m y$. Masalah ini merupakan masalah menentukan sub penyelesaian terbesar sistem persamaan linear max-plus $K \otimes \boldsymbol{x}_0 \oplus H \otimes \boldsymbol{u} = y$. Karena $C \otimes B \neq \varepsilon$ maka komponen setiap kolom matriks H tidak semuanya sama dengan ε. Apabila $H \otimes \boldsymbol{u} = y$ diberikan oleh $\hat{u} = [\hat{u}(1), \hat{u}(2), ..., \hat{u}(p)]^T$ dengan $-\hat{u}(k) = \max\limits_{1 \le i \le p}(-y(i) + H_{i,k})$, *untuk k = 1, 2, …, p.*

Teorema 3. (Rudhito, 2003: 67)
Diberikan SLMI (A, B, C, x_0) dengan $C \otimes B \neq \varepsilon$. *Jika* $K \otimes \boldsymbol{x}_0 \preceq_m y$, *maka penyelesaian masalah minimasi simpangan maksimum output pada* SLMI (A, B, C, x_0) *diberikan oleh* $\tilde{u} = \hat{u} \otimes \dfrac{\delta}{2}$ *dengan* $\hat{u}$ merupakan subpenyelesaian terbesar sistem $H \otimes \boldsymbol{u} = y$ dan $\delta = \max\limits_{i} \left|(y - H \otimes \hat{u})_i\right|$.

Bukti
Masalah minimasi simpangan maksimum output ini jadi menentukan vektor input $\boldsymbol{u}$ sedemikian sehingga $\max\limits_{i}\left|(y - H \otimes U)_i\right|$. Masalah ini merupakan masalah optimisasi yang berkaitan dengan sistem persamaan linear max-plus $K \otimes \boldsymbol{x}_0 \oplus H \otimes \boldsymbol{u} = y$. Karena $C \otimes B \neq \varepsilon$ maka komponen setiap kolom matriks H tidak semuanya sama dengan ε. Suatu penyelesaian $\tilde{u}$ untuk masalah $\tilde{u} = \hat{u} \otimes \dfrac{\delta}{2}$, dengan $\delta = \max\limits_{i}\left|(y - H \otimes \hat{u})_i\right|$ dan $\hat{u}$ merupakan subpenyelesaian terbesar sistem $H \otimes \boldsymbol{u} = y$.

Apabila seorang konsumen memesan dengan menentukan waktu produksi selesai terlebih dahulu sebelum sistem produksi dikerjakan, maka produsen harus membuat jadwal untuk memulainya dan menghitung waktu optimalnya supaya produsen tidak membuang banyak waktu. Akan tetapi, dalam optimiisasi sistem produksi tempe Super Dangsul ini perlu diberikan syarat menurut Teorema 3.2, sehingga produksi tempe dapat

 ISBN : 978-979-16353-8-7

dikerjakan apabila $K \otimes \boldsymbol{x}_0 \preceq_m y$. Minimal pengambilan produk tempe menurut urutan produksi y = [4612, 5936, 7260, 8584, 9908, 11232, 12556, 13880, 15204, 16528, 17852, 19176, 20500, 21824, 23148, 24472, 25796, 27120, 28444, 29768, 31092, 32416, 33740, 35064, 36388, 37712]

Diberikan simulasi produksi, dalam 1 hari pemesanan tempe UD. Super Dangsul mencapai 5 pesanan dengan jumlah frekuensi pemesanan 2 ton kedelai. Pemesan akan mengambil produknya pada waktu yang berbeda, 3 pesanan pertama akan diambil pada hari ketiga pukul 04.30 dan 2 pesanan terakhir akan diambil pada hari ke-4 setelah pemesanan pada pukul 05.00. Kasus tersebut dapat dipecahkan dengan menggunakan optimisasi Aljabar Max-Plus. Simulasi pada kasus di atas hanya membutuhkan dua kali sistem produksi, maka cukup diperhatikan 2 barisan *output* awal dari perhitungan. Produsen dapat mengkonversi waktu pengambilan produk dengan menghitung waktu dari awal sistem dikerjakan. Hari ketiga pukul 04.30 dapat dikonversi menjadi menit ke-4860 dan pukul 05.00 dapat dikonversi menjadi menit ke- 6330 sehingga produsen cukup memasukkan y = [**4860**, **6330**, 7260, 8584, 9908, 11232, 12556, 13880, 15204, 16528, 17852, 19176, 20500, 21824, 23148, 24472, 25796, 27120, 28444, 29768, 31092, 32416, 33740, 35064, 36388, 37712]. Berikut hasil perhitungannya :

$$\hat{u}=H^T\otimes(-y)=\begin{bmatrix}623\\1947\\3271\\4595\\5919\\7243\\8567\\9891\\11215\\12539\\13863\\15187\\16511\\17835\\19159\\20483\\21807\\23131\\24455\\25779\\27103\\28427\\29751\\31075\\32399\\33723\end{bmatrix},\hat{y}=K\otimes x(0)\oplus H\otimes\hat{u}=\begin{bmatrix}4614\\5936\\7260\\8584\\9908\\11232\\12556\\13880\\15204\\16528\\17852\\19176\\20500\\21824\\23148\\24472\\25796\\27120\\28444\\29768\\31092\\32416\\33740\\35064\\36388\\378712\end{bmatrix},\tilde{u}=\begin{bmatrix}820\\2144\\3468\\4792\\6116\\7440\\8764\\10088\\11412\\12736\\14060\\15384\\16708\\18032\\19356\\20680\\22004\\23328\\24652\\25976\\27300\\28624\\29948\\31272\\32596\\33920\end{bmatrix},\tilde{y}=K\otimes x(0)\oplus H\otimes\tilde{u}=\begin{bmatrix}4809\\6133\\7457\\8781\\10105\\11429\\12753\\14077\\15401\\16725\\18049\\19373\\20697\\22021\\23345\\24669\\25993\\27317\\28641\\29965\\31289\\32613\\33937\\35261\\36585\\37909\end{bmatrix}$$

Dari *output* di atas, $\hat{u}$ didefinisikan sebagai *input* kedelai paling lambat dikerjakan, $\tilde{u}$ didefinisikan sebagai *input* minimum simpangan dari waktu pesanan, $\hat{y}$ sebagai waktu produksi tempe selesai dan siap untuk diambil pemesan dengan input $\hat{u}$, dan $\tilde{y}$ sebagai waktu produksi tempe selesai dan siap untuk diambil pemesan dengan input $\tilde{u}$. Disajikan Tabel 2. berikut:

Tabel 2. Optimasi Pesanan Tempe Super Dangsul

Pesanan	Waktu pengambilan(y)	$\hat{u}$	$\hat{y}$	$\bar{u}$	$\bar{y}$
1, 2, & 3	Hari ke-3 pukul 04.30	Hari ke-1 pukul 05.53	Hari ke-3 pukul 00.22	Hari ke-1 pukul 09.10	Hari ke-3 pukul 03.39
4 & 5	Hari ke-4 pukul 05.00	Hari ke-2 pukul 03.57	Hari ke-3 pukul 22.26	Hari ke-2 pukul 07.03	Hari ke-4 pukul 01.34

KESIMPULAN

Berikut kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini :

a) Dari model sistem produksi Tempe Super Dangsul dengan Aljabar Max-Plus, *A* didefiniskan sebagai sistem produksi tempe yang sedang berlangsung, *B* sebagai waktu *transfer* dari awal bahan baku kedelai dimasukkan sampai proses ke-i, dan *C* sebagai jumlah waktu proses akhir dan waktu *transfer* sebelum tempe dapat diambil atau selesai dikerjakan.

b) Masalah *input-output* SLMI pada sistem produksi Tempe Murni Super Dangsul dapat dihitung dengan $y = K \otimes x_0 \oplus H \otimes u$ dengan *K* dan *H* seperti dalam Teorema 3.1, $u(k)$ menyatakan waktu saat kedelai dimasukkan ke sistem untuk pemrosesan ke-*k*, sedangkan $y(k)$ menyatakan waktu saat produk ke-*k* yang diselesaikan meninggalkan sistem.

c) Untuk menghitung waktu optimal dalam Produksi Tempe Super Dangsul dapat digunakan $-\hat{u}(k) = \max_{1 \le i \le p}(-y(i) + H_{i,k})$ dan $\tilde{u} = \hat{u} \otimes \dfrac{\delta}{2}$ dengan $\delta = \max_i |(y - H \otimes \hat{u})_i|$. Didefinisikan $\hat{u}$ sebagai *input* kedelai paling lambat dikerjakan, $\tilde{u}$ sebagai *input* minimum simpangan dari waktu pesanan, $\hat{y}$ sebagai waktu produksi tempe selesai dan siap untuk diambil pemesan dengan input $\hat{u}$, dan $\tilde{y}$ sebagai waktu produksi tempe selesai dan siap untuk diambil pemesan dengan input $\tilde{u}$.

DAFTAR PUSTAKA

B. De Schutter and T. van den Boom. (2000). Model predictive control for max-plus-linear discrete-event systems:Extended report & Addendum. A short version of this report has been published in *Automatica*, vol. 37, no. 7, pp. 1049–1056. Faculty of Information Technology and System, Delt University of Technology, Delft.

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J., Quadrat, J.P. (2001). *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons.

Bart De Schutter. (1996). Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems. *Proefschrift voorgedragen tot het behalen van het doctoraat in*

D. Wetjens. (2004). Discrete event system analysis using the max-plus-algebra. *Master's Thesis*. Eindhoven University of Technology.

I. Necoara, B. De Schutter, T. van den Boom, and H. Hellendoor. (2008). Model Predictive Control for Uncertain Max-Min-Plus-Scaling Systems. International Journal of Control, vol. 81, no. 5, pp. 701–713.

 ISBN : 978-979-16353-8-7

M. Andy Rudhito. (2003). Sistem Persamaan Linear Max-Plus Waktu Invarian. *Tesis*. UGM .

Subiono. (2010). *Aljabar Maxplus dan Terapannya*. Surabaya : Jurusan Matematika, FMIPA-ITS, Surabaya.