 **ISBN *:* 978-979-16353-8-7**

**A-2**

# KARAKTERISASI $E-$SEMIGRUP

**Dhian Arista Istikomah, S.Si, M.Sc**[1]

[1]Universitas PGRI Yogyakarta

dhian.arista@gmail.com

**Abstrak**

Dalam suatu semigrup terdapat himpunan elemen idempoten yang menjadi latar belakang munculnya $E-$semigrup dimana kelas semigrup ini merupakan generalisasi dari semigrup ortodoks. Seperti halnya semigrup ortodoks yang mempunyai kaitan erat dengan semigrup reguler, $E-$semigrup mempunyai kaitan pula dengan $E$-inversive semigrup dimana semigrup ini merupakan generalisasi dari semigrup reguler. Untuk mengkarakterisasi $E$-semigrup digunakan sifat-sifat dari $E$-inversive semigrup, sandwitch set dan himpunan invers lemah. Akan ditunjukkan bahwa jika S adalah $E$-inversive semigrup maka terdapat pernyataan-pernyataan yang ekuivalen mengenai $E$- semigrup, sandwitch set dan himpunan invers lemah dari elemen $S$. Selanjutnya $E$-inversive dan $E-$semigrup mengantarkan pada pembahasan $E$-inversive $E-$semigrup. Dibahas pula mengenai hubungan urutan Mitsch $\mu$, urutan Lallement $\lambda$ dan relasi $\upsilon$ yang erat kaitannya dengan terbentuknya himpunan elemen idempoten menjadi normal band. Normal band merupakan salah satu bentuk dari $E-$semigrup. Dengan demikian hubungan urutan Mitsch $\mu$, urutan Lallement $\lambda$ dan relasi $\upsilon$ tersebut menjadi syarat perlu dan cukup himpunan elemen idempoten merupakan $E-$semigrup.

**Kata kunci:** $E-$semigrup, $E$-inversive semigrup, sandwitch set dan himpunan invers lemah.

## PENDAHULUAN

Salah satu konsep yang dipelajari dalam struktur aljabar adalah grup. Jika aksioma eksistensi elemen identitas tidak diharuskan berlaku, maka akan berdampak pada tidak dapat diberlakukannya aksioma eksistensi dari elemen invers elemen-elemennya. Dengan latar belakang ini didefinisikan struktur aljabar baru yang lebih umum yaitu semigrup.

Himpunan tak kosong $S$ dengan operasi biner $(\square)$ disebut grupoid yang selanjutnya dituliskan dengan $(S,\square)$. Grupoid $(S,\square)$ dimana operasi biner $(\square)$ berlaku asosiatif, yaitu untuk setiap $a,b,c \in S$ berlaku $(a\square b)\square c = a\square(b\square c)$ disebut semigrup.

 ISBN : 978-979-16353-8-7

Selanjutnya dalam penulisan operasi biner ini dituliskan sebagai pergandaan dan semigrup $(S,\cdot)$ dinotasikan dengan $S$.

Misalkan $(G,\cdot)$ grup, berlaku aksioma eksistensi elemen identitas yaitu terdapat $e \in G$ dimana untuk setiap $a \in G$ berlaku $ae = ea = a$. Selanjutnya $e$ disebut elemen identitas. Sebagai akibatnya selalu berlaku terdapat $e \in G$ sehingga $ee = ee = e$ atau secara umum dapat dituliskan terdapat $x \in G$ sedemikian sehingga berlaku $xx = x^2 = x$. Hal ini tentu saja belum tentu berlaku pada semigrup. Kenyataan ini memberi peluang untuk membentuk himpunan elemen-elemen $x$ di $S$ dengan sifat $x^2 = x$. Selanjutnya himpunan ini disebut himpunan elemen-elemen idempoten dan dinotasikan $E(S)$. Dengan demikian $E(S) = \{a \in S \mid a^2 = a\}$. Elemen $a$ di dalam $E(S)$ disebut elemen idempoten. Semigrup $S$ dimana setiap elemennya adalah idempoten disebut band. *Normal band* dan *rectangular band* merupakan contoh dari jenis-jenis band.

Tidak dijaminnya berlaku aksioma eksistensi elemen identitas pada semigrup akan berpengaruh pada aksioma eksistensi invers untuk elemen di $G$. Sudah diketahui bahwa pada grup $G$ berlaku untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. Jika kedua ruas dikalikan dengan $a$ maka berlaku untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $aa^{-1}a = a^{-1}aa = ea = a$ atau secara umum dituliskan untuk setiap $a \in G$ terdapat $x \in G$ sedemikian sehingga $axa = a$. Hal ini tentu saja belum tentu berlaku pada semigrup karena aksioma elemen invers tidak selalu berlaku. Kenyataan ini memberi peluang untuk mendefinisikan semigrup reguler. Semigrup $S$ disebut semigrup reguler jika untuk setiap $a \in S$ terdapat $x \in S$ sedemikian sehingga $axa = a$. Selanjutnya $a$ di dalam $S$ dengan sifat terdapat $x$ di $S$ sedemikian sehingga $axa = a$ disebut elemen reguler dari $S$.

Pada semigrup reguler didefinisikan *sandwitsch set* dimana munculnya *sandwitsch set* ini dilatarbelakangi oleh sifat operasi elemen identitas pada grup. Pada dasarnya sandwitsch set merupakan himpunan elemen idempoten yang memiliki sifat tertentu. Di dalam grup dengan elemen identitas $e$ berlaku $e^2 = e$ dan $(e^{-1})^2 = e^{-1}$ sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $ae = a; e^{-1}a = a; ee^{-1} = e$ dan $eee^{-1} = ee = e$. Hal ini belum tentu berlaku pada semigrup mengingat ketidakberadaan elemen identitas dan elemen invers. Jika hal tersebut diberlakukan pada himpunan elemen idempoten dengan memisalkan $e, g, f \in E(S)$, *sandwitsch set* $S(e, f)$ didefinisikan sebagai himpunan dengan elemen $g$ yang bersifat $ge = g = fg$ dan $egf = ef$.

Berdasar sifat semigrup reguler dan himpunan elemen idempoten dapat dibentuk suatu kelas semigrup, yaitu semigrup ortodoks. Semigrup ortodoks merupakan semigrup reguler dimana himpunan elemen idempoten membentuk subsemigrup. Dari sifat semigrup ortodoks tersebut muncul kelas semigrup yang lebih umum dimana disyaratkan merupakan sebarang semigrup dengan himpunan elemen idempoten membentuk subsemigrup. Kelas semigrup ini disebut $E-$semigrup. $E-$semigrup merupakan generalisasi dari semigrup ortodoks sehingga sifat yang berlaku pada $E-$semigrup menginduksi sifat dari semigrup ortodoks. Sebagai contoh adalah sifat himpunan invers lemah dari $E-$semigrup mempunyai kemiripan dengan sifat himpunan invers pada semigrup ortodoks. Seperti halnya semigrup ortodoks yang mempunyai kaitan erat dengan semigrup reguler, dalam mengkarakterisasi $E-$semigrup berkaitan pula dengan $E-$inversive semigrup yang merupakan generalisasi dari semigrup reguler. Dalam pengkarakterisasian tersebut diperlukan pula sifat *sandwitch set* dan himpunan invers lemah.

Selanjutnya sifat-sifat yang telah didapatkan dari $E-$inversive dan $E-$semigrup menjadi dasar dalam pembahasan $E-$inversive $E-$semigrup. Dalam hal ini hanya akan dibahas tentang kongruensi grup terkecil di dalamnya. Selanjutnya dibahas lebih lanjut tentang sifat urutan *Mitsch* $\mu$ pada sebarang semigrup serta hubungan antara urutan *Mitsch* $\mu$, urutan Lallement $\lambda$ dan relasi $\upsilon$ yang kemudian diketahui erat kaitannya dengan terbentuknya himpunan elemen idempoten menjadi *normal band*. *Normal band* merupakan salah satu bentuk dari $E-$semigrup, sehingga dari hubungan urutan Mitsch $\mu$, urutan Lallement $\lambda$ dan relasi $\upsilon$ tersebut diketahui merupakan syarat perlu dan cukup himpunan elemen idempoten adalah $E-$semigrup.

Untuk menjawab pertanyaan ini akan dibahas tentang sifat himpunan idempoten yang mendorong suatu semigrup menjadi $E-$semigrup, sifat $E-$inversive semigrup, karakterisasi $E-$semigrup dari sifat-sifat $E-$inversive, kongruensi grup terkecil $\sigma$ pada $E-$inversive $E-$semigrup, sifat-sifat urutan *Mitsch* $\mu$ serta hubungan urutan *Mitsch* $\mu$, urutan Lallement $\lambda$ dan relasi $\upsilon$ dimana hubungan ketiganya erat kaitannya dengan syarat perlu dan cukup suatu himpunan elemen idempoten $E(S)$ merupakan $E-$semigrup.

## PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas mengenai $E-$inversive, $E-$semigrup dan $E-$inversive $E-$semigrup. Berikut diberikan beberapa definisi, sifat, teorema serta contoh yang berlaku dalam $E-$inversive, $E-$semigrup dan $E-$inversive $E-$semigrup.

**1.** $E-$inversive dan $E-$semigrup

Telah diketahui bahwa pada suatu grup berlaku untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga berlaku $aa^{-1} = a^{-1}a = e.$ Jika kedua ruas dikuadratkan yaitu $(aa^{-1})^2 = e^2 = e$ maka diperoleh $(aa^{-1})^2 = aa^{-1}$. Bila ditulis secara umum untuk setiap $a \in G$ terdapat $x \in G$ sedemikian sehingga berlaku $(ax)^2 = ax$ . Jadi dapat disimpulkan bahwa dalam suatu grup berlaku untuk setiap $a \in G$ terdapat $x \in G$ sehingga $(ax)^2 = ax$. Hal ini belum tentu berlaku pada semigrup mengingat eksistensi elemen identitas dan elemen invers tidak dijamin berlaku. Dengan latar belakang tersebut, didefinisikan pengertian sebagai berikut.

**Definisi:** *Diberikan sebarang semigrup $S$. Semigrup $S$ disebut $E-$inversive jika untuk setiap $a \in S$ terdapat $x \in S$ sedemikian sehingga $ax$ idempoten. Sedangkan semigrup $S$ disebut $E-$semigrup jika himpunan idempoten dari $S$ membentuk subsemigrup di dalam $S$.*

**Contoh:**

Diberikan semigrup $S = \{a,b,c,d\}$ dimana operasi biner didefinisikan seperti pada tabel Cayley berikut:

 ISBN : 978-979-16353-8-7

| ⊔ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $a$ | $b$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $a$ | $c$ | $a$ |
| $d$ | $a$ | $b$ | $b$ | $d$ |

Semigrup $S$ dengan operasi biner seperti pada tabel diatas merupakan $E-$inversive dan semigrup $S$ bukanlah $E-$semigrup.

**Contoh:**

Setiap band merupakan $E-$semigrup.

Berikut didefinisikan urutan Mitsch $\mu$, relasi $\upsilon$ dan urutan Lallement $\lambda$ yang akan mengantarkan pada pembahasan tentang syarat cukup dan syarat perlu suatu himpunan elemen idempoten menjadi *normal band* .

**Definisi:** *Diberikan sebarang semigrup $S$ dan $a,b \in S$. Urutan Mitsch $\mu$ pada $S$ didefinisikan sebagai berikut:*

$$(a\mu b) \Leftrightarrow (\exists s,t \in S^1) sa = sb = a = at = bt .$$

**Definisi**: *Diberikan sebarang semigrup $S$ dan $a,b \in S$. Relasi $\upsilon$ pada $S$ didefinisikan sebagai berikut:*

$$(a\upsilon b) \Leftrightarrow (\exists e, f \in E(S^1)) a = eb = bf .$$

**Sifat:** *Jika $S$ merupakan semigrup reguler maka $\upsilon$ merupakan urutan parsial natural di $S$.*

**Definisi**: *Diberikan semigrup regular $S$ dan $a,b \in S$. Urutan Lallement $\lambda$ pada $S$ didefinisikan sebagai berikut:*

$$(a\lambda b) \Leftrightarrow (\forall x, y \in S) x \mathcal{R} xa \Rightarrow xa = xb \text{ dan } y \mathcal{L} ay \Rightarrow ay = by .$$

Jika $G$ grup dan $e$ elemen identitas pada $G$, maka berlak $e^2 = e$ dan $(e^{-1})^2 = e^{-1}$. Untuk setiap $g \in G$ berlaku $ge = g; e^{-1}g = g; ee^{-1} = e$ dan $eee^{-1} = ee = e$. Hal ini juga belum tentu berlaku pada semigrup mengingat ketidakberadaan elemen identitas dan elemen invers. Dengan latar belakang tersebut akan dapat di definisikan *sandwitsch set* sebagai berikut

**Definisi:** *Diberikan semigrup regular $S$ dengan $e, f \in E(S)$. Sandwitch set $S(e, f)$ didefinisikan sebagai berikut:*

$$S(e, f) = \{g \in E(S) \mid ge = g = fg; egf = ef\} .$$

Lemma berikut adalah sifat dari sandwitch set.

**Lemma:** *Diberikan semigrup reguler $S$. Untuk setiap $g \in S(e, f)$, $ef$ adalah inverse dari $g$.*

Berikut diberikan definisi dari himpunan invers lemah yang selanjutnya akan digunakan dalam teorema karakterisasi $E-$semigrup.

**Definisi:** *Diberikan sebarang semigrup* $S$ *dan* $a \in S$*. Himpunan invers lemah dari* $a$ *dinotasikan dengan* $W(a)$ *didefinisikan sebagai berikut:*

$$W(a) = \{x \in S \mid xax = x\}$$

Elemen-elemen dari $W(a)$ disebut elemen invers lemah dari $a$.

**Lemma:** *Jika* $S$ *semigrup regular dan* $h \in S(a'a, bb')$ *dimana* $a' \in W(a), b' \in W(b)$, *maka* $b'ha' \in W(ab)$.

Berikut adalah teorema karakterisasi $E-$semigrup.

**Teorema:** *Jika semigrup* $S$ *adalah* $E-$*inversive semigrup, maka pernyataan berikut ekuivalen.*

1. $S$ *adalah* $E-$*semigrup;*
2. $(\forall e, f \in E(S))\, fe \in S(e, f)$;
3. $(\forall a, b \in S) W(b)W(a) \subseteq W(ab)$;
4. $(\forall e, f \in E(S)) W(e)W(f) \subseteq W(fe)$.

**Teorema:** *Jika semigrup* $S$ *adalah* $E$*-inversive semigrup dan* $a, b \in S$ *dengan* $W(b)W(a) \subseteq W(ab)$ *, maka untuk setiap idempoten* $e$ *dari* $S$ *berlaku* $W(e) \subseteq E(S)$.

Tabel dibawah ini menunjukkan bahwa pada $E-$inversive semigrup $S$, jika untuk setiap $e \in E(S)$ berlaku $W(e) \subseteq E(S)$ maka $W(b)W(a) \not\subseteq W(ab)$ dengan $a, b \in S$.

**Contoh:**

Misal $S = \{a, b, c, d\}$. Didefinisikan operasi pergandaan ' $\bullet$ ' pada $S$ seperti pada tabel *Cayley* berikut.

| $\bullet$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $a$ | b | $a$ |
| $c$ | $a$ | $a$ | c | $a$ |
| $d$ | $a$ | $b$ | $b$ | $d$ |

Dapat dibuktikan bahwa $S$ dengan operasi biner didefinisikan seperti pada tabel adalah $E$-inversive semigrup dan untuk setiap $e \in E(S)$ berlaku $W(e) \subseteq E(S)$ maka $W(b)W(a) \not\subseteq W(ab)$ dengan $a, b \in S$.

Pada $E-$inversive semigrup , jika $W(b)W(a) \subseteq W(ab)$ berlaku untuk suatu $a, b \in S$ maka tidak perlu bahwa $S$ merupakan $E-$semigrup. Hal ini diilustrasikan dalam contoh berikut:

**Contoh:**

Misalkan $S = \{A, B, C, D, O\}$ dimana $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , maka $S$ membentuk semigrup dibawah operasi perkalian seperti terlihat dalam tabel berikut:

 ISBN : 978-979-16353-8-7

| $\bullet$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $O$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $A$ | $A$ | $C$ | $C$ | $O$ |
| $B$ | $B$ | $B$ | $D$ | $D$ | $O$ |
| $C$ | $A$ | $O$ | $C$ | $O$ | $O$ |
| $D$ | $B$ | $O$ | $D$ | $O$ | $O$ |
| $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ | $O$ |

Dapat dibuktikan bahwa jika $W(b)W(a) \subseteq W(ab)$ berlaku untuk suatu $a, b \in S$ maka tidak perlu bahwa $S$ merupakan $E-$semigrup.

1. $E-$inversive $E-$semigrup

Berikut akan dibahas tentang $E-$inversive $E-$semigrup dimana definisi $E-$inversive $E-$semigrup diturunkan dari definisi $E-$inversive dan $E-$semigrup.

**Definisi:** *Semigrup $S$ disebut $E-$inversive $E-$semigrup jika :*
*1.* $(\forall a \in S)(\exists x \in S) ax \in E(S)$
*2.* $E(S)$ *subsemigrup $S$.*

Berikut adalah contoh dari $E-$inversive $E-$semigrup.

**Contoh:**
Setiap band adalah $E-$inversive $E-$semigrup.

Berikut akan dibahas tentang kongruensi grup terkecil $\sigma$ pada $E-$inversive $E-$semigrup.

**Definisi:** *Diberikan $E-$inversive $E-$semigrup $S$. Relasi $\sigma$ pada $S$ disebut kongruensi grup terkecil $\sigma$ pada $S$ dan didefinisikan sebagai berikut:*
$$(\forall a,b \in S)(a\sigma b) \Leftrightarrow (\exists e, f \in E(S)) ea = bf.$$

**Teorema:** *Jika $S$ adalah $E-$inversive $E-$semigrup maka*
$$\sigma = \{(a,b) \in S \times S \mid W(a) \cap W(b) \neq \phi\}$$
*adalah kongruensi grup terkecil pada $S$.*

Berikut akan diberikan beberapa sifat dari urutan *Mitsch* $\mu$ yang nantinya akan digunakan dalam pembuktian syarat cukup dan syarat perlu suatu himpunan elemen idempoten menjadi *normal band*.

**Teorema:** *Diberikan sebarang semigrup $S$. Urutan Mitsch $\mu$ pada $S$ merupakan urutan parsial.*

**Teorema:** *Diberikan sebarang semigrup $S$. Urutan Mitsch $\mu$ pada $S$ tidak kompatibel terhadap pergandaan.*

Dari dua sifat diatas dapat disimpulkan bahwa relasi urutan *Mitsch* $\mu$ pada sebarang semigrup adalah urutan parsial dan tidak kompatibel terhadap pergandaan . Lemma berikut membahas tentang syarat cukup urutan *Mitsch* $\mu$ merupakan urutan trivial.

**Lemma:** *Jika $S$ merupakan rectangular band, maka rutan Mitsch $\mu$ pada $S$ adalah urutan trivial.*

**Akibat:** *Pada sebarang semigrup komutatif, urutan Mitsch $\mu$ selalu kompatibel.*

Contoh berikut ini merupakan contoh semigrup non-komutatif yang non-reguler, non trivial dimana $\mu$ kompatibel terhadap pergandaan.

**Contoh:**

Misalkan $S=\{a,b,c,d,e,f\}$ semigrup yang memenuhi sifat $(\forall a,b,c\in S)abc=ac$ dengan operasi biner "•" didefiniskan sebagai berikut:

| $\bullet$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $b$ | $e$ | $e$ | $e$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $b$ | $e$ | $e$ | $e$ | $b$ |
| $c$ | $f$ | $f$ | $d$ | $d$ | $d$ | $f$ |
| $d$ | $f$ | $f$ | $d$ | $d$ | $d$ | $f$ |
| $e$ | $b$ | $b$ | $e$ | $e$ | $e$ | $b$ |
| $f$ | $f$ | $f$ | $d$ | $d$ | $d$ | $f$ |

Teorema berikut menyatakan syarat perlu dan syarat cukup suatu himpunan elemen idempoten menjadi *normal band.*

**Teorema** *Jika semigrup $S$ dengan $Reg(S)$ subsemigrup $S$, maka $E(S)$ adalah normal band jika hanya jika $\upsilon=\mu=\lambda$ pada $Reg(S)$.*

## KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa $E-$semigrup merupakan generalisasi dari semigrup ortodoks. Terdapat kaitan erat antara $E-$inversive dan $E-$semigrup. Dalam pengkarakterisasian $E-$semigrup diperlukan sifat-sifat dari $E-$inversive, *sandwitch set* serta himpunan invers lemah. Selanjutnya $E-$inversive dan $E-$semigrup diperlukan dalam mengkarakterisasi $E-$inversive $E-$semigrup. Dalam pembahasan ini hanya dibahas tentang kongruensi grup terkecil di dalamnya. Pada akhir pembahasan dibuktikan beberapa sifat dari urutan Mitsch $\mu$. Selanjutnya diketahui pula bahwa kesamaan relasi $\upsilon$ dengan urutan Mitsch $\mu$ dan urutan Lallement $\lambda$ pada himpunan elemen-elemen idempoten sebarang semigrup menjadi syarat cukup dan syarat perlu suatu himpunan elemen idempoten menjadi *normal band*.

## DAFTAR PUSTAKA

Cliford,A.H and Preston,G.B.,1961, *The Algebraic Theory of Semigroups,* Volume 1, American Mathematical Society.

Howie, J.M.,1976, *An Introduction To Semigroups Theory,* Oxford University Press.

Howie, J.M., 1995, *Fundamental of Semigroups Theory,* Oxford University Press.

Hungerford, Thomas W., 1974, *Algebra, New York:Springer-Verlag.*

Mitsch, H., 1986, *A Natural Partial Order for Semigroups,* Proceeding of the American Mathematical Society Volume 97 hal. 384-388.

Srinivas, K. V. R., 2007, , *Characterization of* $E-$*semigroup*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics *31*, hal. 979-989.

Weipoltshammer, B.,2002, Certain Congruence on $E-$inversive $E-$semigrup, Semigroup Forum 65 hal. 233-248.