ISBN : *978-979-16353-8-7*

A-1

RUANG BARISAN DENGAN NILAI DI DALAM RUANG BERNORMA-2 YANG DIBANGKITKAN OLEH FUNGSI ORLICZ

Burhanudin Arif N[1], Supama[2], Atok Zulijanto[3]
[1]Pendidikan Matematika UAD Yogyakarta, [2,3]Matematika UGM Yogyakarta

Abstrak

Pada paper ini akan diperkenalkan suatu ruang barisan dengan nilai pada ruang benorma-2 yang dibangkitkan oleh fungsi Orlicz. Diselidiki syarat-syarat agar ruang ini merupakan ruang linear dan ruang bernorma.

PENDAHULUAN

Konsep ruang bernorma-2 pertama kali diperkenalkan oleh Gahler pada pertengahan 1960-an. Diberikan X sebagai ruang linear berdimensi d, dengan $2 \leq d < \infty$. Norma-2 pada ruang linear X atas lapangan $\mathbb{R}$, didefinisikan sebagai fungsi $\|.,.\|: X \times X \to \mathbb{R}$, yang memenuhi :

2-N1. $\|x,y\| = 0 \Leftrightarrow x,y\ saling\ tak\ bebas\ linear,\ \forall x,y \in X.$

2-N2. $\|x,y\| = \|y,x\|, \forall x,y \in X.$

2-N3. $\|\alpha x,y\| = |\alpha|\|x,y\|, \forall x,y \in X, \alpha \in \mathbb{R}$.

2-N4. $\|x,y+z\| = \|x,y\| + \|x,z\|, \forall x,y,z \in X$

Selanjutnya, pasangan dari $(X, \|.,.\|)$ disebut sebagai **ruang bernorma-2.**

Contoh standar dari ruang bernorma-2 (lihat [1]) adalah ruang $\mathbb{R}^2$, dengan norma-2 didefinisikan sebagai:

$$\|x,y\| = luas\ daerah\ segitiga\ 0, x, dan\ y.$$

Diberikan suatu fungsi $M: [0,\infty) \to [0,\infty)$ disebut **fungsi Orlicz**, jika untuk $x,y \in 0,\infty)$, memenuhi :

FO1. M merupakan fungsi kontinu.

FO2. M merupakan fungsi naik.

 ISBN : 978-979-16353-8-7

FO3. M merupakan fungsi konveks.

FO4. $M(0) = 0$.

FO5. $M(x) > 0, \forall x > 0$.

FO6. $\lim_{x\to\infty} M(x) = \infty$.

Telah banyak penelitian mengenai ruang barisan yang dibangun oleh fungsi Orlics atas ruang bernorma-2 ataupun ruang bernorma-n, lihat [2], [3], [4],[5]. Namun ruang yang dibangun masih merupakan ruang bagian dari ruang semua barisan real/komplex.

Pada makalah ini akan dibentuk suatu ruang barisan yang didefinisikan dengan fungsi Olicz. Ruang barisan yang terbentuk merupakan himpunan bagian dari himpunan semua barisan pada ruang bernorma-2. Diberikan ruang bernorma-2 X, didefinisikan himpunan semua barisan pada X sebagai :

$$\omega(X) = \{x = (x_k): x_k \in X, k \geq 1\}.$$

Lebih lanjut $\omega(X)$ merupakan ruang linear atas lapangan real, dengan operasi penjumlahan dan perkalian scalar pada barisan.

Diberikan fungsi Orlicz M. Fungsi M dikatakan memenuhi kondisi Δ_2, ditulis $\mathrm{M} \in \Delta_2$ jika $\exists \mathrm{K} > 0$ sehingga $\mathrm{M}(2\mathrm{x}) \leq \mathrm{K} \cdot \mathrm{M}(\mathrm{x})$, untuk setiap $\mathrm{x} \geq 0$. Fungsi $\rho: X \to [0, \infty)$ dikatakan sebagai modular jika $\forall x, y \in X$ berlaku :

M1. $\rho(x) = 0 \iff x = \theta$.

M2. $\rho(\alpha x) = \rho(x), \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ |\alpha| = 1$.

M3. $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y), jika\ \alpha + \beta = 1\ dan\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

Dibentuk suatu himpunan yang terbangun oleh fungsi Orlicz pada $\omega(X)$ sebagai berikut :

$$\ell_M(X) = \left\{ x = (x_k) \in \omega(X) \middle|\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} M(\|x_k, z_k\|) = 0, \forall z \in \omega(X) \right\}$$

Dalam makalah ini akan diselidiki apakah himpunan $\ell_M(X)$ seperti yang didefinisikan di atas, merupakan ruang bernorma.

 ISBN : 978-979-16353-8-7

PEMBAHASAN

Teorema 2.1: Diberikan X merupakan ruang bernorma-2, fungsi Orlicz $M \in \Delta_2$. Fungsi $\rho_N : \omega(X) \to [0, \infty)$ yang didefinisikan dengan :

$$\rho_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|x_k, z_k\|), \forall x, z \in \omega(X),$$

merupakan modular.

Bukti : (1) Di ambil sebarang $x, z \in \omega(X)$, maka

$$\rho_N(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|x_k, z_k\|) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{N} M(\|x_k, z_k\|) = 0$$

$$\Leftrightarrow M(\|x_k, z_k\|) = 0$$

$$\Leftrightarrow \|x_k, z_k\| = 0$$

$$\Leftrightarrow x_k, z_k \ saling\ tak\ bebas\ linear$$

$$\Leftrightarrow x_k = 0, \forall k$$

$$\Leftrightarrow x = \theta.$$

(2). Diambil sebarang $x \in \omega(X), \alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| = 1$, maka

$$\rho_N(\alpha x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|\alpha x_k, z_k\|) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(|\alpha|\|x_k, z_k\|) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|x_k, z_k\|) = \rho_N(x)$$

(3). Diambil sebarang $x, y \in \omega(X)$, dan $\alpha + \beta = 1\ dan\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0$, maka

$$\rho_N(\alpha x + \beta y) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|\alpha x_k + \beta y_k, z_k\|)$$

$$\leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|\alpha x_k, z_k\| + \|\beta y_k, z_k\|)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(|\alpha|\|x_k, z_k\| + |\beta|\|y_k, z_k\|)$$

ISBN : 978-979-16353-8-7

$$\leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\big(M(\|x_k,z_k\|)+M(\|y_k,z_k\|)\big)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}M(\|x_k,z_k\|)+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}M(\|y_k,z_k\|)$$

$$=\rho_N(x)+\rho_N(y).$$

Berdasarkan (1), (2) dan (3) terbukti $\rho_N(x)$ modular.■

Teorema 2.2: Diberikan X merupakan ruang bernorma-2, fungsi Orlicz $\mathrm{M} \in \Delta_2$. Maka $\ell_M(X)$ merupakan ruang linear atas lapangan real.

Bukti: **(1)** Diambil sebarang $x \in \ell_M(X)$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, maka untuk $\alpha = 0$ trivial. Untuk $\alpha \neq 0$ maka ada $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga $|\alpha| \leq 2^{n_0}$. Karena $\mathrm{M} \in \Delta_2$ maka untuk setiap $x \in \ell_M(X)$ dan $z \in \omega(X)$ terdapat $K > 0$, sehingga :

$$M(\|\alpha x_k,z_k\|)=M(|\alpha|\|x_k,z_k\|)\leq M(2^{n_0}.\|x_k,z_k\|)\leq K^{n_0}M(\|x_k,z_k\|).$$

Lebih lanjut,

$$\rho_N(\alpha x)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}M(\|\alpha x_k,z_k\|)\leq K^{n_0}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}M(\|x_k,z_k\|)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\lim_{N\to\infty}\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{k=1}^{N}M(\|\alpha x_k,z_k\|)\leq \lim_{N\to\infty}K^{n_0}\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{k=1}^{N}M(\|x_k,z_k\|)=0.$$

Dengan kata lain $\alpha x \in \ell_M(X)$.

(2) Diambil sebarang $x, y \in \ell_M(X)$ maka untuk setiap $z \in \omega(X)$,

$$\rho_N(x+y)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}M(\|x_k+y_k,z_k\|)\leq\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}M(\|x_k,z_k\|+\|y_k,z_k\|)$$

$$\leq\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}M\big(2max(\|x_k,z_k\|,\|y_k,z_k\|)\big)$$

$$\leq K.\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}M\big(2max(\|x_k,z_k\|,\|y_k,z_k\|)\big), untuk\ suatu\ K>0$$

$$\leq K.\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\big(M(\|x_k,z_k\|)+M(\|y_k,z_k\|)\big)$$

$$= K.\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|x_k, z_k\|) + K.\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|y_k, z_k\|)$$

Akibatnya,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|x_k + y_k, z_k\|) \le K\left(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|x_k, z_k\|) + \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|y_k, z_k\|)\right)$$

$$= 0.$$

Dengan kata lain $x + y \in \ell_M(X)$.

Berdasar (1) dan (2) terbukti $\ell_M(X)$ ruang linear. ■

Selanjutnya didefinisikan fungsi $\rho(x) = {}^{Sup}_{N\geq 1}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k}{\varepsilon}, z_k\right\|\right), \forall x, z \in \omega(X)$, dan ρ juga merupakan modular $\omega(X)$.

Teorema 2.3: Diberikan X merupakan ruang bernorma-2, fungsi Orlicz $M \in \Delta_2$. Maka $\ell_M(X)$ merupakan ruang bernorma dengan norma:

$$\|x\| = inf\left\{\varepsilon > 0 |\, \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = {}^{Sup}_{N\geq 1}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k}{\varepsilon}, z_k\right\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\}.$$

Bukti : (1) Diambil sebarang $x \in \ell_M(X)$. Jika $x = \theta$, maka $\forall \varepsilon > 0$, berlaku

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k}{\varepsilon}, z_k\right\|\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{0}{\varepsilon}, z_k\right\|\right) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|0, z_k\|) = 0$$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = {}^{Sup}_{N\geq 1}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|0, z_k\|) = 0.$$

Akibatnya,

$$\|x\| = inf\left\{\varepsilon > 0 |\, \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = {}^{Sup}_{N\geq 1}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k}{\varepsilon}, z_k\right\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\} = 0.$$

Sebaliknya , jika

$$\|x\| = inf\left\{\varepsilon > 0 |\, \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = {}^{Sup}_{N\geq 1}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k}{\varepsilon}, z_k\right\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\} = 0.$$

Diambil sebarang $\mu \in (0,1)$, maka μ bukan batas bawah himpunan

 ISBN : 978-979-16353-8-7

$$\left\{\varepsilon > 0 \mid \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k}{\varepsilon}, z_k\right\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\}$$

Artinya terdapat $t_0 \in \left\{\varepsilon > 0 \mid \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k}{\varepsilon}, z_k\right\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\}$, sehingga, $\mu > t_0$ dan $\rho\left(\frac{x}{t_0}\right) = \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k}{t_0}, z_k\right\|\right) \leq \mu$.

Karena M fungsi naik maka

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|x_k, z_k\|) \leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k}{t_0}, z_k\right\|\right) \leq \mu.$$

Karena $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|x_k, z_k\|) \leq \mu, \forall \mu \in (0,1)$, maka $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|x_k, z_k\|) = 0$, sehingga,

$$M(\|x_k, z_k\|) = 0 \Leftrightarrow \|x_k, z_k\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta.$$

(2). Diambil sebarang $x \in \ell_M(X)$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Jika $\alpha = 0$, maka

$$\|\alpha x\| = inf\left\{\varepsilon > 0 \mid \rho(0) = \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M(\|0, z_k\|) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\} = 0$$
$$= 0\|x\| = |0|\|x\| = |\alpha|\|x\|.$$

Jika $\alpha \neq 0$, maka

$$\|\alpha x\| = inf\left\{\varepsilon > 0 \mid \rho(\alpha x) = \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{\alpha x_k}{\varepsilon}, z_k\right\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\}$$
$$= inf\left\{\varepsilon > 0 \mid \rho(\alpha x) = \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left|\frac{\alpha}{\varepsilon}\right| \|x_k, z_k\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\}$$
$$= inf\left\{\varepsilon > 0 \mid \rho(\alpha x) = \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\frac{1}{\varepsilon/|\alpha|} \|x_k, z_k\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\}$$
$$= inf\left\{|\alpha|t : t > 0 \mid \rho(\alpha x) = \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\frac{1}{t} \|x_k, z_k\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\}$$
$$= |\alpha| inf\left\{t : t > 0 \mid \rho(\alpha x) = \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\frac{1}{t} \|x_k, z_k\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\}$$
$$= |\alpha| inf\left\{t : t > 0 \mid \rho(\alpha x) = \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k}{t}, z_k\right\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\}$$
$$= |\alpha|\|x\|.$$

(3). Diambil sebarang $x, y \in \ell_M(X)$. Dipilih sebarang $\mu, \pi > 0$, sehingga

$$\rho(x) = \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k}{\mu}, z_k\right\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)$$

$$\rho(y) = \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{y_k}{\pi}, z_k\right\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X).$$

Dibentuk $\varepsilon = \mu + \pi > 0$, serta

$$\alpha = \frac{\mu}{\mu+\pi},\quad \beta = \frac{\pi}{\mu+\pi}$$

Karena M konveks maka,

$$\begin{aligned}
M\left(\left\|\frac{x_k+y_k}{\varepsilon}, z_k\right\|\right) &\leq M\left(\left\|\frac{x_k}{\varepsilon}, z_k\right\| + \left\|\frac{y_k}{\varepsilon}, z_k\right\|\right)\\
&= M\left(\left\|\left(\frac{\mu}{\mu+\pi}\right)\frac{x_k}{\mu}, z_k\right\| + \left\|\left(\frac{\pi}{\mu+\pi}\right)\frac{y_k}{\pi}, z_k\right\|\right)\\
&= M\left(\left(\frac{\mu}{\mu+\pi}\right)\left\|\frac{x_k}{\mu}, z_k\right\| + \left(\frac{\pi}{\mu+\pi}\right)\left\|\frac{y_k}{\pi}, z_k\right\|\right)\\
&\leq \left(\frac{\mu}{\mu+\pi}\right)M\left(\left\|\frac{x_k}{\mu}, z_k\right\|\right) + \left(\frac{\pi}{\mu+\pi}\right)M\left(\left\|\frac{y_k}{\pi}, z_k\right\|\right)
\end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
&\sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k+y_k}{\varepsilon}, z_k\right\|\right)\\
&\leq \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\left(\frac{\mu}{\mu+\pi}\right)M\left(\left\|\frac{x_k}{\mu}, z_k\right\|\right) + \left(\frac{\pi}{\mu+\pi}\right)M\left(\left\|\frac{y_k}{\pi}, z_k\right\|\right)\right)\\
&= \left(\frac{\mu}{\mu+\pi}\right)\sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k}{\mu}, z_k\right\|\right) + \left(\frac{\pi}{\mu+\pi}\right)\sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{y_k}{\pi}, z_k\right\|\right)\\
&\leq \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k}{\mu}, z_k\right\|\right) + \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{y_k}{\pi}, z_k\right\|\right)
\end{aligned}$$

Sehingga ,

$$\begin{aligned}
&inf\left\{\varepsilon > 0 \mid \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k+y_k}{\varepsilon}, z_k\right\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\}\\
&\leq inf\left\{\mu > 0 \mid \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{x_k}{\mu}, z_k\right\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\}\\
&\quad + inf\left\{\pi > 0 \mid \sup_{N\geq 1} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} M\left(\left\|\frac{y_k}{\pi}, z_k\right\|\right) \leq 1, \forall x, z \in \omega(X)\right\}.
\end{aligned}$$

Dengan kata lain, terbukti bahwa $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Berdasar (1), (2) dan (3) terbukti bahwa $\ell_M(X)$ ruang bernorma. ■

KESIMPULAN

Pada makalah ini baru dibuktikan bahwa $\ell_M(X)$ merupakan ruang linear dan ruang bernorma. Selanjutnya akan diselidiki bahwa $\ell_M(X)$ merupakan ruang $\boldsymbol{F}$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] H. Gunawan dan Mashadi, *On Finite Dimensional 2-Normed Spaces*, Soochow Journal Of mathematics, 27:3 (2001), 321-329.

[2] Kuldip Raj and Sunil K Sharma, *Some sequence sapaces in 2-normed spaces defined by Musielak-Orlicz function,* Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, 3:1(2011) 97 – 109.

[3] Kuldip Raj, Amit Gupta and Sunil K. Sharma, *Modular sequence spaces over n-Normed Spaces,* Journal of advanced Studies in Topology, 3:1 (2012) 43-51.

[4] Ayhan Esi, *Strongly almost summable sequence spaces in 2-normed spaces defined by ideal convergence and an Orlicz function,* Stud. Univ. babes-Bolyai math, 57:1 (20120 75-82.

[5] Ayhan Esi, *Strongly Lacunary Summable Double Sequence Spaces In n-Normed Spaces Defined by Ideal Convergence and An Orlicz Spaces,* AMO – Advaced Modeling and Optimization, 14: 1 (2012).

[6] Supama, 1997.*Fungsional Aditif Orhogonal dan Operator Superposisi Pada* $W_0(\phi)$. Tesis S2, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.

[7] Andina Tri Ivana, 2011. *Basis Simetrik Di Ruang Barisan Orlicz*. Tesis S2, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta.