QUIVER SEBAGAI REPRESENTASI ALJABAR

INTAN MUCHTADI-ALAMSYAH

Abstrak. Dalam tulisan ini akan dibahas bagaimana setiap aljabar berdimensi hingga atas lapangan K yang tertutup secara aljabar berkorespondensi dengan suatu graf, yang dinamakan quiver, dan sebaliknya setiap quiver berkorespondensi dengan suatu K-aljabar asosiatif yang memiliki unsur kesatuan dan berdimensi hingga dengan kondisi tertentu. Kemudian dengan menggunakan quiver yang berasosiasi dengan suatu aljabar A, kita dapat menggambarkan A-modul sebagai koleksi K-ruang vektor yang dihubungkan dengan pemetaan-pemetaan linier.
Kata Kunci: Quiver, Aljabar Lintasan, Representasi Quiver

1. Pendahuluan

Teori Representasi lahir untuk memudahkan mempelajari suatu objek matematika yang kompleks dengan cara merepresentasikan menjadi objek yang lebih sederhana. Representasi aljabar asosiatif berawal dari pendeskripsian bilangan kompleks sebagai pasangan bilangan riil oleh Hamilton. Sekitar tahun 1930, E.Noether menginterpretasikan representasi sebagai modul. Hal tersebut memudahkan mempelajari aljabar semi sederhana seperti juga memberikan kemudahan untuk menerapkan Aljabar Homologi dan Teori Kategori untuk mempelajari Teori Representasi. Dengan adanya keterkaitan tersebut, Teori Representasi berkembang sangat pesat dalam tiga puluh tahun terakhir.

Tulisan ini membahas bagaimana setiap aljabar berdimensi hingga atas lapangan yang tertutup secara aljabar K berkorespondensi dengan suatu graf, yang dinamakan quiver, dan sebaliknya setiap quiver berkorespondensi dengan suatu K-aljabar asosiatif yang memiliki unsur kesatuan dan berdimensi hingga dengan kondisi tertentu. Kemudian dengan menggunakan quiver yang berasosiasi dengan suatu aljabar A, kita dapat menggambarkan A-modul sebagai koleksi K-ruang vektor yang dihubungkan dengan pemetaan-pemetaan linier. Ide untuk merepresentasikan aljabar dalam bentuk graf ini dimulai sekitar tahun 1940-an (lihat [3], [6], dan [7]) namun menjadi sangat berkembang pada tahun 1970-an, terutama karena Gabriel ([4], [5]). Istilah quiver dan representasi quiver secara ekplisit diperkenalkan oleh Gabriel dalam [4]. Hal tersebut merupakan titik awal representasi modern dari aljabar asosiatif.

Sistematika pembahasan adalah sebagai berikut : pada bagian kedua akan diperkenalkan mengenai Quiver dan Aljabar Lintasan, yaitu suatu K-aljabar yang dibentuk dari suatu quiver. Kemudian bagian ketiga akan membahas mengenai Ideal *Admissible* dari aljabar lintasan dan kuosien dari aljabar lintasan, yang dinamakan Aljabar Lintasan Terbatas. Bagian keempat yang merupakan bagian utama, akan membahas bagaimana membentuk quiver dari sebarang K-aljabar A (*basic*) terhubung dan presentasi sebarang K-aljabar (*basic*) terhubung sebagai aljabar lintasan terbatas. Pada bagian kelima akan dibahas bagaimana menggambarkan A-modul sebagai representasi quiver, dan pada bagian keenam akan dibahas penggambaran A-modul sederhana, projektif tak terdekomposisi dan injektif tak terdekomposisi. Sebagai penutup akan dibahas pengembangan lebih lanjut dari representasi aljabar dalam bentuk quiver.

Disampaikan pada Seminar Nasional "Aljabar, Pengajaran dan Terapannya," Universitas Negeri Yogyakarta, 31 Januari 2009.

Dipresentasikan dalam **Seminar Nasional Aljabar, Pengajaran Dan Terapannya** dengan tema **Kontribusi Aljabar dalam Upaya Meningkatkan Kualitas Penelitian dan Pembelajaran Matematika untuk Mencapai World Class University** yang diselenggarakan oleh Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY Yogyakarta pada tanggal 31 Januari 2009

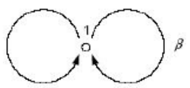
Tulisan ini merupakan rangkuman materi kuliah MA 5023 Topik dalam Aljabar I yang diberikan pada Semester I 2008/2009 berdasarkan buku rujukan Assem, Simson dan Skowronski [1] untuk mahasiswa program magister (S2) Matematika ITB. Teorema, lema dan akibat akan diberikan tanpa bukti, pembaca yang berminat dapat mempelajarinya dalam [1] dan [2].

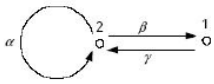
2. Quiver dan Aljabar Lintasan

Dalam bagian ini akan diperkenalkan mengenai quiver, dan akan dibahas bagaimana mengasosiasi suatu aljabar dengan suatu quiver dan mempelajari sifat-sifatnya.

Definisi 2.1. *Suatu* **quiver** $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ *terdiri dari dua himpunan:* Q_0 *(yang unsur-unsurnya dinamakan* **titik** *atau* **verteks***) dan* Q_1 *(yang unsur-unsurnya dinamakan* **panah***), dan dua pemetaan* $s, t : Q_1 \to Q_0$ *yang memetakan setiap panah* $\alpha \in Q_1$ *ke titik* **asalnya** $s(\alpha) \in Q_0$ *dan ke titik* **targetnya** $t(\alpha) \in Q_0$.

Dengan demikian, quiver pada dasarnya adalah graf berarah tanpa pembatasan banyaknya panah antara dua titik, pembatasan akan adanya loop atau *cycle* berarah. Berikut ini adalah beberapa contoh quiver:





Suatu quiver Q dikatakan **hingga** jika Q_0 dan Q_1 merupakan himpunan hingga. **Graf** $\bar{Q}$ dari suatu quiver Q diperoleh dari Q dengan mengubah panah menjadi garis. Suatu quiver Q dikatakan **terhubung** jika $\bar{Q}$ merupakan graf terhubung.

Misalkan $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ suatu quiver dan $a, b \in Q_0$. Suatu **lintasan** dengan **panjang** $l \geq 1$ dengan titik asal a dan target b (dengan kata lain dari a ke b) adalah barisan

$$(a|\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l|b),$$

dimana $\alpha_k \in Q_1$ untuk setiap $1 \leq k \leq l$, dan $s(\alpha_1) = a, t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$, untuk setiap $1 \leq k < l$, dan $t(\alpha_l) = b$. Lintasan yang demikian dinotasikan sebagai $\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l$ dan dapat digambarkan sebagai berikut:

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \to \cdots \xrightarrow{\alpha_l} a_l = b.$$

Kita notasikan dengan Q_l himpunan semua lintasan di Q dengan panjang l. Untuk setiap titik $a \in Q_0$ kita asosiasikan suatu lintasan dengan panjang $l = 0$, yang dinamakan **lintasan trivial** atau **stasioner** di a, dan dinotasikan sebagai $\epsilon_a = (a||a)$. Dengan demikian lintasan dengan panjang 0 dan 1 berkorespondensi satu-satu dengan unsur-unsur di Q_0 dan Q_1. Suatu lintasan dengan panjang $l \geq 1$ dikatakan *cycle* jika titik asal dan targetnya berimpit. Suatu *cycle* dengan panjang 1 dinamakan **loop**. Suatu quiver dinamakan **asiklis** jika tidak memuat *cycle*.

Komposisi lintasan-lintasan dapat mendefinisikan operasi secara parsial pada himpunan semua lintasan suatu quiver. Kita akan menggunakan operasi tersebut untuk mendefinisikan suatu aljabar.

Definisi 2.2. *Misalkan* Q *suatu quiver.* **Aljabar lintasan** KQ *dari* Q *adalah* K*-aljabar yang sebagai* K*-ruang vektor memiliki basis himpunan semua lintasan* $(a|\alpha_1, \cdots, \alpha_l|b)$ *dengan panjang* $l \geq 0$ *di* Q*, sedemikian sehingga perkalian dua vektor basis* $(a|\alpha_1, \cdots, \alpha_l|b)$ *dan*

$(c|\beta_1, \cdots, \beta_k|d)$ di KQ didefinisikan sebagai

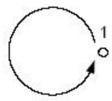
$$(a|\alpha_1, \cdots, \alpha_l|b)(c|\beta_1, \cdots, \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \cdots, \alpha_l, \beta_1, \cdots, \beta_k|d),$$

dimana δ_{bc} merupakan delta Kronecker.

Dengan kata lain, perkalian dua lintasan $\alpha_1 \cdots \alpha_l$ dan $\beta_1 \cdots \beta_k$ adalah nol jika $t(\alpha_l) \neq s(\beta_1)$ dan sama dengan lintasan komposisi $\alpha_1 \cdots \alpha_l \beta_1 \cdots \beta_k$ jika $t(\alpha_l) = s(\beta_1)$. Perkalian unsur-unsur basis diperluas menjadi perkalian unsur-unsur di KQ dengan menggunakan sifat distributif.

Contoh

(1) Misalkan Q adalah quiver



yang terdiri dari 1 titik dan 1 loop. Maka basis aljabar lintasan KQ adalah $\{\epsilon_1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^l, \cdots\}$ perkalian vektor basis diberikan sbb.

$$\begin{array}{ll} \epsilon_1\alpha^l = \alpha^l\epsilon_1 = \alpha^l & \text{untuk setiap } l \geq 0, \text{ dan} \\ \alpha^l\alpha^k = \alpha^{l+k} & \text{untuk setiap } l, k \geq 0, \end{array}$$

dimana $\alpha^0 = \epsilon_1$. Maka KQ isomorf dengan aljabar suku banyak $K[t]$ dengan 1 variabel t, dimama ϵ_1 dipetakan ke 1, dan α dipetakan ke t.

(2) Misalkan Q adalah quiver

Aljabar lintasan KQ memiliki basis $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \alpha\}$ dengan $\epsilon_1\epsilon_1 = \epsilon_1, \epsilon_2\epsilon_2 = \epsilon_2, \epsilon_2\alpha = \alpha, \alpha\epsilon_1 = \alpha$, dan $\epsilon_1\epsilon_2 = \epsilon_2\epsilon_1 = \epsilon_1\alpha = \alpha\epsilon_2 = \alpha\alpha = 0$. Jelas bahwa KQ isomorf dengan aljabar matriks segitiga bawah 2×2

$$T_2(K) = \begin{pmatrix} K & 0 \\ K & K \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} | a, b, c \in K \right\}$$

dimana isomorfisma diberikan oleh

$$\epsilon_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \epsilon_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lema 2.1. *Misalkan Q suatu quiver dan KQ adalah aljabar lintasannya. Maka*

(1) *KQ adalah aljabar asosiatif,*
(2) *KQ memiliki unsur identitas jika dan hanya jika Q_0 hingga,*
(3) *KQ berdimensi hingga jika dan hanya jika Q hingga dan asiklis.*

Akibat 2.2. *Misalkan Q suatu quiver hingga. Unsur $1 = \sum_{a \in Q_0} \epsilon_a$ merupakan unsur identitas di KQ dan himpunan $\{\epsilon_a | a \in Q_0\}$ yang terdiri dari semua lintasan stasioner $\epsilon_a = (a||a)$ membentuk himpunan lengkap idempoten ortogonal primitif dari KQ.*

Himpunan $\{\epsilon_a | a \in Q_0\}$ bukan satu-satunya himpunan lengkap idempoten ortogonal primitif di KQ. Pada contoh 2 di atas, selain $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, himpunan $\{\epsilon_1 + \alpha, \epsilon_2 - \alpha\}$ juga merupakan himpunan lengkap idempoten ortogonal primitif di KQ.

Lema 2.3. *Misalkan Q suatu quiver hingga. Aljabar lintasan KQ terhubung jika dan hanya jika Q adalah quiver terhubung.*

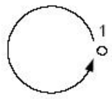
Kini kita akan menentukan radikal dari aljabar lintasan dari suatu quiver yang hingga, terhubung dan asiklis.

Definisi 2.3. *Misalkan Q suatu quiver hingga yang terhubung. Ideal dari aljabar lintasan KQ yang dibangun oleh panah-panah dari Q dinamakan* **ideal panah** *di KQ dan dinotasikan sebagai R_Q.*

ISBN : 978-979-16353-2-5

Proposisi 2.4. *Misalkan Q suatu quiver hingga yang terhubung, R adalah ideal panah di KQ dan $\epsilon_a = (a||a)$ untuk $a \in Q_0$. Himpunan $\{\bar{\epsilon}_a = \epsilon_a + R | a \in Q_0\}$ merupakan himpunan lengkap idempoten ortogonal primitif di KQ/R dan $KQ/R \cong K \times K \times \cdots \times K$. Jika Q juga asiklis, maka Rad $KQ = R$ dan KQ merupakan aljabar basic yang berdimensi hingga.*

Jika Q tidak asiklis, secara umum tidak selalu *Rad* $KQ = R_Q$. Sebagai contoh misalkan Q adalah quiver



Sebelumnya telah dijelaskan bahwa $KQ \cong K[t]$. Karena K tertutup secara aljabar; maka himpunan $\{t - \lambda | \lambda \in K\}$ merupakan himpunan tak hingga suku banyak tak tereduksi, yang membangun ideal-ideal maksimal yang irisannya adalah nol. Dengan demikian *Rad* $KQ = 0$. Sebaliknya $R_Q = \oplus_{l>0} K\alpha^l$ sebagai K-ruang vektor dan tentu saja tidak nol.

3. Ideal *Admissible* dan Kuosien dari Aljabar Lintasan

Misalkan Q suatu quiver hingga. Berdasarkan Lema 2.1, aljabar lintasan KQ dari Q merupakan aljabar asosiatif dengan identitas dan berdimensi hingga jika dan hanya jika Q asiklis. Pada bagian ini kita akan membahas kuosien berdimensi hingga dari aljabar lintasan yang belum tentu berdimensi hingga.

Definisi 3.1. *Misalkan Q quiver hingga dan R_Q ideal panah di aljabar lintasan KQ. Suatu ideal I di KQ dikatakan* **admissible** *jika terdapat $m \geq 2$ sedemikian sehingga*

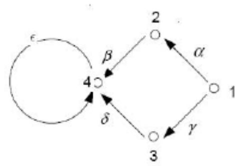
$$R_Q^m \subseteq I \subseteq R_Q^2.$$

Jika I suatu ideal admissible di KQ, (Q, I) dinamakan **quiver terbatas**. *Aljabar kuosien KQ/I dinamakan aljabar dari quiver terbatas atau* **aljabar lintasan terbatas**.

Berdasarkan definisi, suatu ideal I di KQ yang termuat di R_Q^2 merupakan ideal *admissible* jika dan hanya jika I memuat lintasan-lintasan yang cukup panjang. Jika Q asiklis, maka setiap ideal yang termuat R_Q^2 merupakan ideal *admissible*.

Contoh

(1) Untuk setiap quiver hingga Q dan $m \geq 2$, ideal R_Q^m *admissible*.
(2) Ideal nol *admissible* jika dan hanya jika Q asiklis. Hal ini karena ideal nol *admissible* jika dan hanya jika terdapat $m \geq 2$ sedemikian sehingga $R_Q^m = 0$, yaitu setiap komposisi m panah di KQ adalah nol. Ini terjadi jika dan hanya jika Q asiklis.
(3) Misalkan Q adalah quiver



Ideal $I =< \alpha\beta - \gamma\delta, \beta\epsilon, \epsilon^3 >$ merupakan ideal *admissible*. Jelas bahwa $I \subseteq R_Q^2$. Selanjutnya setiap lintasan dengan panjang ≥ 4 dan titik asal 1, 2, atau 3 memuat ϵ^3, akibatnya berada di I. Lintasan dengan panjang ≥ 4 dan titik asal 4 memuat lintasan berbentuk $\alpha\beta\epsilon^2$ atau $\gamma\delta\epsilon^2$, berada di I karena untuk yang pertama $\beta\epsilon \in I$, dan yang kedua karena $\gamma\delta\epsilon^2 = (\gamma\delta - \alpha\beta)\epsilon^2 + \alpha\beta\epsilon^2 \in I$. Akibatnya $R_Q^4 \subseteq I$, dan dapat disimpulkan bahwa I *admissible*. Sebaliknya ideal $< \beta\epsilon, \alpha\beta - \gamma\delta >$ tidak *admissible*.

Definisi 3.2. *Misalkan Q suatu quiver. Suatu* **relasi** *di Q dengan koefisien di K adalah K-kombinasi linier dari lintasan-lintasan dengan panjang paling sedikit dua yang memiliki* *titik asal dan titik target yang sama. Dengan kata lain, suatu relasi ρ adalah suatu unsur di KQ sedemikian sehingga*

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i,$$

dimana λ_i adalah skalar (yang tidak semua nol) dan w_i adalah lintasan di Q dengan panjang paling sedikit 2 sedemikian sehingga, jika $i \neq j$, maka w_i dan w_j memiliki titik asal dan target yang sama.

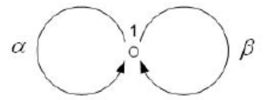
Suatu relasi dimana $m = 1$ dinamakan **relasi nol**, dan jika berbentuk $w_1 - w_2$ dinamakan **relasi komutatif**. Jika $(\rho_j)_{j \in J}$ adalah koleksi relasi untuk Q sedemikian sehingga $< \rho_j | j \in J >$ *admissible*, maka kita katakan Q **terbatas oleh relasi** (ρ_j) atau terbatas oleh relasi $\rho_j = 0$ untuk semua $j \in J$.

Sebagai contoh, pada contoh 2 di atas, ideal I dibangun oleh satu relasi komutatif $\rho_1 = \alpha\beta - \gamma\delta$ dan dua relasi nol $\rho_2 = \beta\epsilon$ dan $\rho_3 = \epsilon^3$, dengan demikian Q terbatas oleh relasi $\alpha\beta = \gamma\delta, \beta\epsilon = 0$, dan $\epsilon^3 = 0$.

Lema 3.1. *Misalkan Q suatu quiver hingga dan I suatu ideal admissible di KQ.*

(1) *Himpunan $\{e_a = \epsilon_a + I | a \in Q_0\}$ merupakan himpunan lengkap idempoten ortogonal primitif dari aljabar lintasan terbatas KQ/I.*
(2) *Aljabar lintasan terbatas KQ/I terhubung jika dan hanya jika Q terhubung.*
(3) *Aljabar lintasan terbatas KQ/I berdimensi hingga.*
(4) *Terdapat suatu himpunan hingga relasi-relasi $\{\rho_1, \cdots, \rho_m\}$ sedemikian sehingga $I = < \rho_1, \cdots, \rho_m >$.*
(5) *Jika R_Q adalah ideal panah di KQ, maka Rad $(KQ/I) = R_Q/I$. Lebih lanjut aljabar lintasan terbatas KQ/I merupakan aljabar basic.*

Contoh Misalkan Q adalah quiver



Ideal I yang dibangun oleh $\alpha\beta - \beta\alpha, \beta^2, \alpha^2$ merupakan ideal *admissible*. Aljabar lintasan terbatas KQ/I berdimensi 4, dengan basis $\{e_1, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\alpha\beta}\}$.

4. Quiver dari Aljabar Berdimensi Hingga

Misalkan A suatu aljabar asosiatif berdimensi hingga dengan unsur kesatuan atas lapangan K yang tertutup secara aljabar. Karena kategori modul atas aljabar ekivalen dengan kategori modul atas aljabar *basic* yang bersesuaian (lihat [1, Akibat I.6.10]), dalam pembahasan selanjutnya A diasumsikan *basic*. Kita akan membahas bagaimana A isomorf dengan aljabar lintasan terbatas KQ/I, dimana Q suatu quiver hingga yang terhubung dan I suatu ideal *admissible* dari KQ.

Definisi 4.1. *Misalkan A suatu K-aljabar basic terhubung yang berdimensi hingga dan $\{e_1, \cdots, e_n\}$ himpunan lengkap idempoten ortogonal primitif dari A.* **Quiver** *dari A, yang dinotasikan sebagai Q_A, didefinisikan sbb.:*

(1) *Titik-titik Q_A adalah $1, 2, \cdots, n$, berkorespondensi satu-satu dengan idempoten $e_1, \cdots, e_n$.*
(2) *Diberikan dua titik $a, b \in (Q_A)_0$, panah $\alpha : a \to b$ berkorespondensi satu-satu dengan vektor-vektor di basis ruang vektor $e_a(Rad\ A/Rad^2\ A)e_b$.*

Karena A berdimensi hingga, maka setiap ruang vektor berbentuk $e_a(Rad\ A/Rad^2\ A)e_b$ (dengan $a, b \in (Q_A)_0$) juga berdimensi hingga. Akibatnya Q_A hingga.

ISBN : 978-979-16353-2-5

Lema 4.1. *Misalkan A aljabar berdimensi hingga, basic dan terhubung. Maka berlaku*

(1) *quiver Q_A dari A tidak bergantung pada pemilihan himpunan lengkap idempoten primitif ortogonal.*
(2) *quiver Q_A terhubung.*

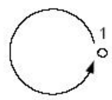
Lema 4.2. *Misalkan Q quiver hingga terhubung, I suatu ideal admissible di KQ, dan $A = KQ/I$. Maka $Q_A = Q$.*

Teorema berikut membahas presentasi dari aljabar A sebagai aljabar lintasan terbatas.

Theorema 4.3. (Teorema Utama) *Misalkan A suatu K-aljabar basic, terhubung dan berdimensi hingga. Maka terdapat suatu ideal admissible I dari KQ_A sedemikian sehingga $A \cong KQ_A/I$.*

Contoh

(1) Jika $A = K[t]/ < t^m >$, dengan $m \geq 1$, maka Q_A hanya memiliki satu titik, karena satu-satunya idempoten tak nol dari A adalah unsur identitas. Radikal A adalah $< \bar{t} >$, dimana $\bar{t} = t \ + < t^m >$, karena $< \bar{t} >^m = 0$ dan $A/ < \bar{t} > \ \cong K$. Akibatnya $Rad^2 A = \ < \bar{t}^2 >$ dan $dim_K(Rad\ A/Rad^2 A) = 1$. Suatu basis dari $Rad\ A/Rad^2 A$ diberikan oleh kelas $\bar{t}$ dalam $< \bar{t} > / < \bar{t}^2 >$. Dengan demikian Q_A adalah quiver



Isomorfisma $KQ_A/I \cong A$ diinduksi dari homomorfisma K-aljabar $\varphi : KQ_A \to A$ yang didefinisikan oleh $\varphi(\epsilon_1) = 1, \varphi(\alpha) = \bar{t}$. Jelas bahwa φ surjektif dan $Ker\ \varphi = < \alpha^m >$.

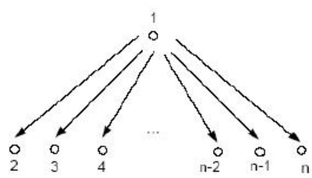
(2) Misalkan A adalah subaljabar dari himpunan matriks segitiga atas $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} K & K & K & \cdots & K \\ 0 & K & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & K & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & K \end{pmatrix},$$

yaitu himpunan matriks segitiga atas dimana unsur-unsur tidak nol hanya terdapat di baris pertama dan di diagonal. Himpunan lengkap idempoten primitif ortogonal dari A diberikan oleh $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, dimana $e_i = \{(a_{st}) \in A | a_{st} = \delta_{st}\}$, dimana δ_{st} adalah delta Kronecker. Radikal A adalah

$$A = \begin{pmatrix} 0 & K & K & \cdots & K \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

dan $Rad^2 A = 0$. Dari perhitungan diperoleh bahwa $e_1(Rad\ A)e_j$ berdimensi satu untuk $1 \leq j \leq n$, dan $e_i(Rad\ A)e_j$ adalah nol untuk $1 \leq j \leq n$, $2 \leq i \leq n$. Maka Q_A adalah quiver berikut:



5. Representasi dari Quiver Terbatas

Dalam bagian ini akan dibahas bagaimana quiver dapat digunakan untuk menggambarkan modul atas aljabar. Dengan menggunakan quiver terbatas (Q, I) yang berkorespondensi dengan suatu aljabar A, setiap A-modul berdimensi hingga M akan digambarkan sebagai representasi K-linier dari (Q, I), yaitu koleksi K-ruang vektor berdimensi hingga M_a, dengan $a \in Q_0$, yang dihubungkan dengan pemetaan K-linier $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$ yang berkorespondensi dengan panah $\alpha : a \to b$ di Q, dan memenuhi suatu relasi yang diberikan oleh I.

Definisi 5.1. *Misalkan Q suatu quiver hingga. Suatu* **representasi K-linier**, *atau singkatnya* **representasi** *dari Q diberikan oleh data berikut:*

(1) *Untuk setiap titik a di Q_0 diasosiasikan suatu K-ruang vektor M_a.*
(2) *Untuk setiap panah $\alpha : a \to b$ di Q_1 diasosiasikan suatu pemetaan K-linier $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$.*

Representasi seperti di atas dinotasikan sebagai $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$, atau singkatnya $M = (M_a, \varphi_\alpha)$. Suatu representasi dikatakan **berdimensi hingga** *jika setiap ruang vektor M_a berdimensi hingga.*

Misalkan $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ dan $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ dua representasi dari Q. Suatu **morfisma** dari representasi $f : M \to M'$ adalah koleksi $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ dari pemetaan K-linier $(f_a : M_a \to M'_a)_{a \in Q_0}$ yang memenuhi $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$, dengan kata lain diagram berikut komutatif:

$$\begin{array}{ccc} M_a & \overset{\varphi_\alpha}{\to} & M_b \\ \downarrow f_a & & \downarrow f_b \\ M'_a & \overset{\varphi'_\alpha}{\to} & M'_b \end{array}$$

Misalkan $f : M \to M'$ dan $g : M' \to M''$ dua morfisma representasi dari Q, dimana $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ dan $g = (g_a)_{a \in Q_0}$. Komposisi dua morfisma tersebut didefinisikan sebagai koleksi $gf = (g_a f_a)_{a \in Q_0}$. Jelas bahwa gf merupakan morfisma dari $M \to M''$. Dengan demikian terdefinisi suatu kategori $Rep_K(Q)$ yang objeknya adalah representasi K-linier dari Q. Kita notasikan dengan $rep_K(Q)$ subkategori penuh dari $Rep_K(Q)$ yang objeknya adalah representasi berdimensi hingga.

Contoh Misalkan Q adalah quiver Kronecker $1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} 2$. Suatu contoh representasi dari Q adalah M dan M' yang diberikan sbb.

$$M = \left(K^2 \underset{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\leftleftarrows}} K \right), \qquad M' = \left(K^2 \underset{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\leftleftarrows}} K^2 \right).$$

Keduanya berdimensi hingga. Terdapat juga morfisma $M \to M'$ sbb.

$$\begin{array}{ccccc} & K^2 & \underset{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\leftleftarrows}} & K & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \downarrow & & \downarrow & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ & K^2 & \underset{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{\leftleftarrows}} & K^2 & . \end{array}$$

Jelas bahwa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ISBN : 978-979-16353-2-5

Definisi 5.2. *Misalkan Q quiver hingga dan $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ suatu representasi dari Q. Untuk setiap lintasan tak trivial $w = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_l$ dari a ke b di Q, kita definisikan* **evaluasi** *dari M pada lintasan w sebagai pemetaan K-linier dari M_a ke M_b didefinisikan sebagai*

$$\varphi_w = \varphi_{\alpha_l}\varphi_{\alpha_{l-1}} \cdots \varphi_{\alpha_2}\varphi_{\alpha_1}.$$

Defini evaluasi dapat diperluas untuk kombinasi K-linier lintasan-lintasan dengan titik asal dan target yang sama. Untuk $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$, dimana $\lambda_i \in K$ dan w_i suatu lintasan di Q untuk setiap i, maka $\varphi_\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{w_i}$.

Sekarang kita dapat mendefinisikan representasi dari quiver terbatas. Misalkan Q suatu quiver hingga dan I suatu ideal *admissible* di KQ. Suatu representasi $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ dari Q dikatakan **terbatas oleh** I atau **memenuhi relasi** di I, jika berlaku

$$\varphi_\rho = 0, \quad \text{untuk setiap relasi } \rho \in I.$$

Jika I dibangun oleh himpunan hingga relasi $\{\rho_1, \cdots, \rho_m\}$, representasi M terbatas oleh I jika dan hanya jika $\varphi_{\rho_j} = 0$, untuk setiap $1 \le j \le m$. Kita notasikan $Rep_K(Q, I)$ (atau $rep_K(Q, I)$) subkategori penuh dari $Rep_K(Q)$ (atau dari $rep_K(Q)$) yang objeknya adalah representasi yang terbatas oleh I.

Contoh Misalkan Q adalah quiver

$$\begin{tikzcd} & & 3 \arrow[dl, "\beta"'] & \\ 1 & 2 \arrow[l, "\lambda"'] & & 5 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\ & & 4 \arrow[ul, "\delta"] & \end{tikzcd}$$

dan terbatas oleh relasi $\alpha\beta = \gamma\delta$. Misalkan representasi M dan N diberikan sbb.

$$M = \left(\begin{tikzcd} & & K \arrow[dl, "\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}"'] & \\ K & K^2 \arrow[l, "(1\ 1)"'] & & 0 \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & & K \arrow[ul, "\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}"] & \end{tikzcd}\right) \quad \text{dan} \quad N = \left(\begin{tikzcd} & & K \arrow[dl, "1"'] & \\ K & K \arrow[l, "1"'] & & K \arrow[ul, "1"'] \arrow[dl, "1"] \\ & & K \arrow[ul, "1"] & \end{tikzcd}\right)$$

Jelas bahwa M dan N terbatas oleh $\alpha\beta = \gamma\delta$. Sebaliknya representasi berikut tidak terbatas oleh $\alpha\beta = \gamma\delta$

$$N = \left(\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[dl] & \\ K & K \arrow[l, "1"'] & & K \arrow[ul] \arrow[dl, "1"] \\ & & K \arrow[ul, "1"] & \end{tikzcd}\right)$$

Dalam bab sebelumnya telah dibahas untuk A suatu K-aljabar berdimensi hingga, yang tanpa mengurangi perumuman diasumsikan *basic* dan terhubung, terdapat suatu quiver hingga terhubung Q_A dan suatu ideal *admissible* I di KQ_A sedemikian sehingga $A \cong KQ_A/I$. Teorema dan akibat berikut membahas ekivalensi antara kategori *mod* A yang objeknya adalah A-modul kanan dibangun secara hingga dengan kategori $rep_K(Q, I)$.

Theorema 5.1. *Misalkan $A = KQ/I$, dimana Q suatu quiver hingga terhubung dan I suatu ideal admissible di KQ. Terdapat ekivalensi kategori K-linier*

$$F : Mod\ A \xrightarrow{\cong} Rep_K(Q, I)$$

yang dapat dibatasi menjadi ekivalensi kategori K-linier $\bar{F} : mod\ A \xrightarrow{\cong} rep_K(Q, I)$.

Akibat 5.2. *Misalkan Q quiver hingga terhubung yang asiklis. Maka terdapat suatu ekivalensi kategori K-linier $Mod\ KQ \cong Rep_K(Q)$ yang dapat dibatasi menjadi ekivalensi $mod\ KQ \cong rep_K(Q, I)$.*

6. Modul Sederhana, Modul Projektif dan Modul Injektif

Dalam bagian ini akan diberikan gambaran eksplisit A-modul sederhana, projektif tidak terdekomposisi dan injektif tidak terdekomposisi sebagai representasi terbatas dari (Q, I).

Misalkan $a \in Q_0$, kita notasikan dengan $S(a)$ representasi $(S(a)_b, \varphi_\alpha)$ dari Q yang didefinisikan sbb.:

$$\begin{aligned} S(a)_b &= \begin{cases} 0 & \text{jika } b \neq a \\ K & \text{jika } b = a, \end{cases} \\ \varphi_\alpha &= 0 \quad \text{untuk setiap } \alpha \in Q_1 \end{aligned}$$

Jelas bahwa $S(a)$ adalah representasi terbatas dari (Q, I) (untuk sebarang I).

Contoh Misalkan Q adalah quiver Kronecker $1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\leftleftarrows}} 2$. Modul-modul sederhana atas KQ diberikan oleh representasi

$$S(1) = (K \leftleftarrows 0) \ \text{ dan } \ S(2) = (0 \leftleftarrows K)$$

Lema 6.1. *Misalkan $A = KQ/I$ aljabar lintasan terbatas dari (Q, I). Himpunan $\{S(a) | a \in Q_0\}$ adalah himpunan lengkap representatif dari kelas isomorfisma A-modul sederhana.*

Namun berbeda dengan deskripsi di atas, setiap $A = KQ$ aljabar lintasan dari suatu quiver hingga Q yang memiliki *cycle,* memiliki tak hingga banyak modul sederhana berdimensi hingga yang tidak saling isomorf, yang berbeda dengan modul $S(a)$.

Sebagai contoh untuk aljabar lintasan $A = KQ$ dari quiver $1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightleftarrows}} 2$. Modul $S(1) = (K \rightleftarrows 0)$, $S(2) = (0 \rightleftarrows K)$ dan $S_\lambda = 1 \overset{1}{\underset{\lambda}{\rightleftarrows}} 2$, untuk setiap $\lambda \in K$, merupakan modul-modul sederhana, dan S_λ tidak isomorf dengan S_μ untuk setiap $\lambda \neq \mu$.

Sekarang akan kita bahas bagaimana menentukan A-modul projektif dan A-modul injektif tak terdekomposisi. Karena A *basic* dan $\{e_a | a \in Q_0\}$ merupakan himpunan lengkap idempoten primitif ortogonal dari A, dekomposisi $A_A = \oplus_{a \in Q_0} e_a A$ merupakan dekomposisi A_A sebagai tambah langsung projektif tak terdekomposisi yang tidak saling isomorf. Berdasarkan [1, Akibat I.5.17] himpunan lengkap A-modul projektif tak terdekomposisi dan injektif tak terdekomposisi yang tidak saling isomorf diberikan oleh modul $P(a) = e_a A$ dan $I(a) = D(Ae_a)$, dengan $a \in Q_0$, dimana $D = Hom_K(-, K)$. Kita akan mendeskripsikan modul $P(a) = e_a A$ dan modul $I(a)$ dengan $a \in Q_0$.

Lema 6.2. *Misalkan (Q, I) suatu quiver terbatas, $A = KQ/I$, $P(a) = e_a A$, dan $I(a) = D(Ae_a)$, dimana $a \in Q_0$.*

(1) *Jika $P(a) = (P(a)_b, \varphi_\beta)$, maka $P(a)_b$ adalah K-ruang vektor dengan basis himpunan semua $\bar{w} = w + I$, dimana w adalah lintasan dari a ke b dan, untuk sebarang panah $\beta : b \to c$, pemetaan K-linier $\varphi_\beta : P(a)_b \to P(a)_c$ diberikan oleh perkalian kanan dengan $\bar{\beta} = \beta + I$.*

(2) *Jika $I(a) = (I(a)_b, \varphi_\gamma)$, maka $I(a)_b$ adalah dual dari K-ruang vektor dengan basis himpunan semua $\bar{w} = w + I$, dimana v adalah lintasan dari b ke a dan, untuk sebarang panah $\gamma : b \to c$, pemetaan K-linier $\varphi_\gamma : I(a)_b \to I(a)_c$ diberikan oleh dual dari perkalian kiri dengan $\bar{\gamma} = \gamma + I$.*

ISBN : 978-979-16353-2-5

Contoh

(1) Misalkan Q adalah quiver $2 \xrightarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\beta} 3$. Modul-modul projektif tak terdekomposisi atas KQ diberikan sbb.

$$P(1) = S(1) = (0 \longrightarrow K \longleftarrow 0), \;\; P(2) = (K \xrightarrow{1} K \longleftarrow 0), \;\; P(3) = (0 \longrightarrow K \xleftarrow{1} K).$$

Modul-modul injektif tak terdekomposisi atas KQ adalah $I(2) = S(2), I(3) = S(3)$, dan $I(1) = (K \xrightarrow{1} K \xleftarrow{1} K)$.

(2) Misalkan Q adalah quiver $1 \underset{\delta}{\overset{\beta}{\leftleftarrows}} 2 \underset{\gamma}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} 3$. terbatas oleh $\alpha\beta = 0, \gamma\delta = 0$. Modul projektif tak terdekomposisi diberikan oleh $P(1) = S(1)$,

$$P(2) = \left(K^2 \underset{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\leftleftarrows}} K \leftleftarrows 0 \right) \text{ dan } P(3) = \left(K^2 \underset{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{\leftleftarrows}} K^2 \underset{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\leftleftarrows}} K \right).$$

Modul injektif tak terdekomposisi diberikan oleh $I(3) = S(3)$,

$$I(2) = \left(0 \leftleftarrows K \underset{(0 \;\; 1)}{\overset{(1 \;\; 0)}{\leftleftarrows}} K^2 \underset{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\leftleftarrows}} K^2 \right).$$

7. Penutup

Kita telah membahas bagaimana setiap aljabar berdimensi hingga berkorespondensi dengan suatu quiver dan sebaliknya, dan bagaimana dengan menggunakan quiver yang berasosiasi dengan suatu aljabar A, kita dapat menggambarkan A-modul sebagai representasi quiver. Penelitian lebih lanjut dalam bidang ini diantaranya adalah penggambaran kategori modul sebagai quiver Auslander-Reiten dengan titiknya adalah kelas isomorfisma modul tak terdekomposisi dan sebagai panahnya adalah suatu homomorfisma diantara mereka (lihat [2]). Selain itu dapat juga dilakukan pengklasifikasian aljabar berdasarkan modul tak terdekomposisinya melalui quiver dan representasi quiver (Teorema Gabriel, [1, Teorema VII.5.10]).

Daftar Pustaka

[1] I.Assem, D.Simson, A.Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, London Math.Soc. Student Text 65, Cambridge University Press, 2005.

[2] M.Auslander, I.Reiten, S.Smaloe, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1995.

[3] P.Gabriel, Sur let catégories abéliennes localement noethériennes et leurs applications aux algèbres étudiées par Dieudonné, *Séminaire Serre*, Collège de France, Paris, 1960.

[4] P.Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen I, *Manuscripta Math.*, 6 (1972), 71-103.

[5] P.Gabriel, Indecomposable representations II, *Symposia Mat. Inst. Naz. Alta Mat.*, 11 (1973), 81-104.

[6] A.Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Math. J.*, 9 (1957), 119-221.

[7] R.M.Thrall, On ahdir algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53 (1947), Abstract 22, 49-50.

Intan Muchtadi-Alamsyah
Kelompok Keahlian Aljabar
FMIPA Institut Teknologi Bandung
Jl. Ganesha no. 10,
Bandung 40132,
Indonesia
E-mail address: ntan@math.itb.ac.id