Daerah Ideal Utama Adalah Almost Euclidean

Oleh
Ratwa Suriadikirta
Irawati

A B S T R A C T

"Daerah Euclid (DE) merupakan daerah ideal utama (DIU), dan daerah ideal utama merupakan daerah faktorisasi tunggal (DFT)" ditulis "$DE \Rightarrow DIU \Rightarrow DFT$", namun kebalikan dari kedua implikasi tersebut tidak selalu benar. $A = Z[\theta] = \left\{ a + b\theta \middle| a, b \in Z, \theta = \frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right\}$ adalah salah satu contoh DIU yang bukan merupakan DE, namun $Z[\theta]$ memenuhi kondisi "Almost Euclid (AE)", sehingga diperoleh sebuah biimplikasi $AE \Leftrightarrow DIU$.

Almost Euclid

Telah diketahui bahwa : *Jika R merupakan daerah Euclid (DE) maka R merupakan daerah ideal utama (DIU) dinotasikan* $DE \Rightarrow DIU$ *,* namun kebalikan dari implikasi tersebut tidak selalu benar. Akan ditunjukan bahwa $A = \left\{ a + b\theta \middle| a, b \in Z, \theta = \frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right\}$ adalah salah satu contoh DIU (daerah ideal utama) yang bukan DE (daerah Euclid).

Kita dapat menunjukan bahwa $A^* = \left\{ a + b\theta \middle| a, b \in Z, \theta = \frac{1+\sqrt{-2}}{2} \right\}$ bahwa A* merupakan daerah Euclid dengan fungsi penilaian Euclid $\psi(z) = z\bar{z}$ adalah modulus *z* pada bilangan kompleks.

a. $A = \left\{ a + b\theta \middle| a, b \in Z, \theta = \frac{1+\sqrt{-19}}{2} \right\}$ ***Bukan Daerah Euclid (DE).***

Berikut diulang kembali pengertian daerah Euclid (DE).

Dipresentasikan dalam **Seminar Nasional Aljabar, Pengajaran Dan Terapannya** dengan tema **Kontribusi Aljabar dalam Upaya Meningkatkan Kualitas Penelitian dan Pembelajaran Matematika untuk Mencapai World Class University** yang diselenggarakan oleh Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY Yogyakarta pada tanggal 31 Januari 2009

Daerah integral A disebut daerah Euclid (DE) jika terdapat fungsi $|\ |: A \to Z^*$ $(\mathit{fungsi}\ |\ |\ \mathit{disebut\ fungsi\ penilaian\ Euclid})$, sedemikian sehingga :

i) $|a| \geq 0,\ \forall a \in A\ dan\ |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

ii) $|ab| = |a|.|b|,\ \forall a, b \in A$

iii) *Untuk* $a, b \in A,\ b \neq 0,$ *terdapat* $q, r \in A$ *sedemikian sehingga berlaku* $a = qb + r\ dengan\ |r| < |b|$

Dari kondisi (ii), diperoleh (ii') yaitu $|a| \leq |b|,\ saat\ a|b\ dan\ b \neq 0$.

Untuk menunjukan A bukan daerah Euclid (DE), cukup ditunjukan bahwa tidak terdapat fungsi penilaian Euclid ($|\ |: A \to Z^*$) yang memenuhi ketiga sifat di atas. Akan diasumsikan terdapat fungsi penilaian Euclid yaitu fungsi $|\ |: A \to Z^*$, kemudian ditrunjukan suatu kontradiksi.

Misal U adalah himpunan yang memuat elemen tidak nol di A dengan nilai fungsi Euclid terkecil (minimal). Setiap unit di A akan membagi sebarang elemen tidak nol di A, akibatnya menurut (ii') sebarang unit di A akan merupakan anggota U dan menurut (iii) berakibat bahwa sebarang elemen U akan membagi elemen tidak nol di A dan U tepat beranggotakan semua unit di A. Selanjutnya akan ditunjukan $U = \{1, -1\}$.

Pandang : $A = \left\{ a + b\theta \middle| a, b \in Z, \theta = \dfrac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right\}$! Untuk $a \in A$, konjugasi dari bilangan kompleks $a\ ditulis\ \overline{a}$. Maka berlaku :

I. $\overline{\theta} = 1 - \theta$

II. $\theta\overline{\theta} = 5$

III. $\theta^2 = \theta - 5$

IV. Untuk sebarang $x = a + b\theta \in A$ maka $\theta x = (a + b)\theta - 5b$

Sehingga diperoleh : A tertutup terhadap konjugasi pada bilangan kompleks (I), 5 bukan prima di A dan θ bukan unit di A sehingga 5 unsur terurai di A (II), A tertutup terhadap perkalian pada bilangan kompleks (III).

Jika $N(z) = z\bar{z}$ adalah modulus *z* pada bilangan kompleks, maka :

V. $N(a+b\theta) = (a+b\theta).(\overline{a+b\theta}) = a^2 + ab + 5b^2$, sehingga berlaku :

a. $N(xy) = N(x).N(y);\ \forall x, y \in A$ dan

b. $N(x) \geq 0,\ \forall x \in A\ dan\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Jika $a + b\theta \in A$ adalah unit maka $N(a+b\theta) = a^2 + ab + 5b^2 = 1 = N(1)$ *(minimal)* , sehingga jika $ab \geq 0\ maka\ b = 0\ dan\ a = \pm 1$. Begitu pula karena $a + b\bar{\theta} = a + b - b\theta$, maka

$N(a+b\bar{\theta}) = N(a+b-b\theta) = (a+b)^2 - ab + 4b^2 = a^2 + ab + 5b^2 = N(a+b\theta) = 1$ sehingga jika $ab \leq 0\ maka\ b = 0\ dan\ a = \pm 1$. Kesimpulannya adalah $U = \{1, -1\}$.

Sekarang asumsikan bahwa m adalah nilai fungsi Euclid minimal diantara elemen di A yang berbeda dengan 0, 1, -1. Implikasi dari (iii) bahwa $2 = qm + r$ dengan $|r| < |m|$ dan $r = 0,\ atau\ r = 1\ atau\ r = -1$, sehingga $m|2,\ atau\ m|3$. Kemudian klaim m adalah salah satu dari $\pm 2\ atau\ \pm 3$. Klaim tersebut adalah konsekuensi pada pakta bahwa 2 dan 3 adalah prima di A, yang ditunjukan sebagai berikut: Andai $2 = (a+b\theta)(c+d\theta)$ dengan $a + b\theta\ \ dan\ \ c + d\theta$ bukan unit di A, maka $N(2) = N((a+b\theta)(c+d\theta)) = N(a+b\theta).N(c+d\theta) = 4$, akibatnya $N(a+b\theta) = 2 = N(c+d\theta)$, sehingga

$2 = N(a+b\theta) = a^2 + ab + 5b^2 = N(a+b\bar{\theta}) = (a+b)^2 - ab + 4b^2$, dan

$2 = N(c+d\theta) = c^2 + cd + 5d^2 = N(c+d\bar{\theta}) = (c+d)^2 - cd + 4d^2$,

Untuk kasus $ab \geq 0\ dan\ ab < 0,\ kita\ \ peroleh\ b = 0$, serta untuk kasus $cd \geq 0\ dan\ cd < 0,\ kita\ \ peroleh\ \ d = 0$, sehingga $2 = (a+b\theta)(c+d\theta) = ac$. Mengingat 2 adalah prima di Z, 2 juga prima di A. Analog, 3 prima di A.

Gunakan (iii), $\theta\ kongruen\ (atau\ 0\ atau\ 1\ atau\ -1)\ \text{mod}.(atau\ \pm 2\ atau\ \pm 3)$ dengan kata lain $\theta\ atau\ \theta - 1\ atau\ \theta + 1$ dapat dibagi oleh 2 atau 3. Tetapi hal

ISBN : 978-979-16353-2-5

ini tidak mungkin mengingat $N(\theta) = N(\theta - 1) = 5 \ dan \ N(\theta + 1) = 7$ serta $N(2) = 4 \ dan \ N(3) = 9$.

Dengan demikian diperoleh suatu kesimpulan bahwa $A = \left\{ a + b\theta \middle| a, b \in Z, \theta = \frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right\}$ bukan daerah Euclid (DE).

b. Almost Euclid (AE)

Definisi Almost Euclid :

Daerah integral D disebut Almost Euclid (AE) jika terdapat fungsi $d : D \to Z^*$ (Z^* : Bilangan bulat non negatif) yang memenuhi :

1. $d(0) = 0, \ \ d(a) > 0 \ \ jika \ \ a \neq 0$
2. Jika $b \neq 0$, maka $d(a) \leq d(ab), \ \forall \, a \in D$
3. $Untuk \ \ setiap \ \ a, b \in D, \ b \neq 0$ *maka berlaku salah satu dari*

   i) $a = bq, \ \ untuk \ \ suatu \ \ q \in D$

   ii) $0 < d(ax + by) < d(b), \ \ untuk \ \ suatu \ \ x, y \in D$

Fungsi $d : D \to Z^*$ disebut fungsi *Almost Euclid*

c. $A = \left\{ a + b\theta \middle| a, b \in Z, \theta = \frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right\}$ **Memenuhi Kondisi Almost Euclid**

Akan ditunjukan bahwa $A = \left\{ a + b\theta \middle| a, b \in Z, \theta = \frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right\}$ memenuhi kondisi Almost Euclid yaitu : untuk setiap $\alpha, \beta \in A, \ \beta \neq 0$ jika β tidak membagi α dan $N(\alpha) \geq N(\beta)$ maka terdapat $s, t \in A$ yang memenuhi :

$$0 < N(\alpha s - \beta t) < N(\beta)$$

hal dimaksud ekuivalen dengan kondisi bahwa

$$0 < N(\frac{\alpha}{\beta} s - t) < 1 \quad \textbf{\textit{............ Almost Euclid}}$$

Untuk menunjukan ***Almost Euclid*** ambil $\alpha, \beta \in A,\ \beta \neq 0$. Jika β tidak membagi α dan $N(\alpha) \geq N(\beta)$, tulis $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a + b\sqrt{-19}}{c} \in Q[\theta]$, *dengan* $c > 1$ *dan a, b, c bilangan bulat yang relatif prim.* Karena *a, b, c bilangan bulat yang relatif prim,* maka *(akibat teorema 2.8.3)* terdapat $x, y, z \in Z$ yang memenuhi $ax + by + cz = 1$. Tulis $ay - 19bx = cq + r$, *untuk suatu* q *dan* r, *dengan* $N(r) < N(c)$. Pilih $s, t \in A$ *dengan*, $s = y + x\sqrt{-19}$ dan $t = q - z\sqrt{-19}$, sehingga ***Almost Euclid*** dipenuhi jika $c \geq 5$. Kemudian periksa untuk kasus-kasus $c = 2,\ c = 3,\ dan\ c = 4$

a. Kasus $c = 2$. Diketahui bahwa *a, b, c bilangan bulat yang relatif prim,* maka untuk c = 2, salah satu bilangan *a atau b* akan bernilai ganjil. Pilih $s, t \in A$ *dengan* $s = 1$, *dan* $t = \frac{(a-1) + b\sqrt{-19}}{2}$ sehingga memenuhi ***Almost Euclid.***

b. Kasus $c = 3$. Memperhatikan bahwa *a, b, c bilangan bulat yang relatif prim* maka a dan b tidak keduanya merupakan kelipatan tiga, akibatnya $a^2 + 19b^2$ tidak dapat dibagi tiga untuk setiap $a, b \in Z$, tulis $a^2 + 19b^2 = 3q + r$, *dengan* $r = 1$ *atau* $r = 2$. Pilih $s, t \in A$ *dengan* $s = a - b\sqrt{-19}$ dan $t = q$ sehingga memenuhi ***Almost Euclid.***

ISBN : 978-979-16353-2-5

c. Kasus $c=4$. Memperhatikan *a, b, c bilangan bulat yang relatif prim* maka untuk c = 4, akan berakibat nilai *a dan b tidak keduanya genap.*

i. Kasus jika salah satu bilangan *a atau b* bernilai genap, maka a^2+19b^2 tidak dapat dibagi empat , tulis $a^2+19b^2=4q+r\ , untuk\ suatu\ q,r\in Z,\ dan\ 0<r<4.$ Pilih $s,t\in A\ \ dengan\ \ s=a-b\sqrt{-19}$ dan $t=q$ sehingga memenuhi ***Almost Euclid.***

ii. Kasus jika bilangan *a dan b* keduanya bernilai ganjil, maka a^2+19b^2-4 merupakan kelipatan delapan , tulis $a^2+19b^2=8q+4\ ;\ untuk\ suatu\ q\in Z.$ Pilih $s,t\in A\ \ dengan\ \ s=\dfrac{a-b\sqrt{-19}}{2}$ dan $t=q$ sehingga memenuhi ***Almost Euclid.***

Jadi $A=\left\{a+b\theta \middle| a,b\in Z,\theta=\dfrac{1+\sqrt{-19}}{2}\right\}$ memenuhi kondisi Almost Euclid

Teorema 1

Daerah integral D adalah Almost Euclid (AE) jika dan hanya jika D adalah daerah ideal utama (DIU).

Bukti :

$i\ \ (\Rightarrow)$

Misal D adalah Almost Euklid (AE), dan misal $I \subseteq D$, dengan *I adalah ideal dan* $I \neq 0$. Misal $b \in I$, dengan $d(b) \leq d(n), \forall n \in D$. Ambil $a \in I$, untuk setiap $x, y \in D$, maka $ax + by \in I$. Menurut definisi berarti *b* tidak memenuhi kondisi 3. ii) yaitu $0 < d(ax+by) < d(b),\ untuk\ suatu\ x, y \in D$, maka haruslah memenuhi kondisi 3. i), artinya $a = bq,\ untuk\ suatu\ q \in D$ sehingga $I = \langle b \rangle$ (DIU)

$ii(\Leftarrow)$

Misal D adalah DIU maka D adalah UFD sehingga untuk setiap $a \in D,\ a \neq 0$ *dan a bukan unit* berlaku $a = up_1 p_2 p_3 ... p_n$, dengan *u adalah unit dan p adalah unsur tak terurai*

Definisikan $d : D \to Z^*$ sebagai : $d(a) = \begin{cases} 0\ ;\ a = 0 \\ 2^n;\ a \neq 0 \end{cases}$. Kondisi 1 dan 2 dipenuhi dari definisi, mengingat $2^n > 0, \forall n = \{0,1,2,3,...\}$ dan $2^m . 2^n = 2^{m+n}$, sehingga : *Untuk setiap* $a, b \in D$, *berlaku* $d(ab) = d(a)d(b)$ *maka* $d(a) \leq d(ab), \forall a \in D$ dan $b \neq 0$.

Misal $a, b \in D,\ dengan\ b \neq 0$, misalkan pula $I = \{ax + by | x, y \in D\}$, dan karena $I \subseteq D$, dengan *I adalah ideal, tulis* $I = \langle r \rangle$ *untuk suatu* $r \in D$ *dengan* $r \neq 0$. Akibatnya $d(x) > 1$ dan $d(r) < d(b)$. Untuk $r = x_0 a + y_0 b$ maka berlaku $0 < d(r) < d(b)$, artinya kondisi 3 dipenuhi.

Jadi daerah integral D merupakan Almost Euclid.

Dengan menggunakan teorema 1 tersebut, artinya $A = \left\{ a + b\theta \middle| a, b \in Z, \theta = \frac{1 + \sqrt{-19}}{2} \right\}$ merupakan daerah ideal utama (DIU) Jika

ISBN : 978-979-16353-2-5

$a = bq,\ untuk\ suatu\ q \in D$ maka $I = \langle b \rangle$. Misal $I \neq \langle b \rangle$, ambil $b \in I,\ b = xr,\ untuk\ suatu\ x \in D,\ dan\ x\ bukan\ unit$ sehingga $d(r) \leq d(b)$.

DAFTAR PUSTAKA

1 David S. Dummit, Richard M. Foote (1991), *Abstract Algebra,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 07632
2 Ahmad Muchlis, Pudji Astuti (2007), *Aljabar I,* Universitas Terbuka
3 John B. Fraleigh (1999), *A First Course In Abstract Algebra,* Addison-Wesley Publishing Company
4 Hiram Paley, Paul M. Wechsel ( ), *A First Course In Abstract Algebra,*
5 Oscar A. Campoli (1988), *A Principal Ideal Domain That Is Not a Euclidean Domain,* American Mathematical Monthly, **95,** 868-871
6 John Greene (1997), *Principal Ideal Domains Are Almost Euclidean,* American Mathematical Monthly, , 154-155