Pemetaan Linear Yang Mengawetkan Invers Drazin Matriks Atas Lapangan

Sutopo
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Pengetahuan Alam
Universitas Gadjah Mada
sutopo_mipa@ugm.ac.id

Abstact

Diberikan F lapangan dengan minimal lima elemen. $M_n(F)$ adalah himpunan semua matriks nxn atas lapangan F. Pada penelitian ini dikaji tentang bentuk pemetaan linear dari $M_n(F)$ ke $M_m(F)$ yang mempertahankan invers Drazin matriks atas lapangan dengan $ch\ F \neq 2$ dan $m, n > 1$.

Kata kunci : lapangan, invers Drazin.

Pendahuluan.

Latar belakang

Linear Preserver Problem merupakan masalah yang sampai saat ini masih aktif dikaji oleh matematikawan terutama yang bekerja pada teori matriks dan teori operator. Banyak hasil yang telah diperoleh pada *Linear Preserver Problem* ini antara lain pemetaan linear yang mengawetkan sifat idempoten, pemetaan linear yang mengawetkan rank matriks dan pemetaan linear yang mengawetkan detrminan matriks. Invers Drazin merupakan perumuman dari invers biasa dan pemetaan linear yang mengawetkan invers Drazin merupakan masalah yang sangat menarik untuk dijkaji.

Perumusan Masalah

Diberikan himpunan matriks nxn $M_n(F)$ dan himpunan matriks mxm $M_m(F)$ dan Γ menotasikan hinpunan semua pemetaan linear dari $M_n(F)$ ke $M_m(F)$ yang mempertahankan invers drazin matriks. Pada tulisan ini dikaji karakteristik dari elemen Γ.

Tujuan dan Manfaat

Tujuan penelitian ini adalah mengkaji bentuk pemetaan linear yang mempertahankan invers Drazin matriks atas lapangan, sedangkan manfaat yang

Dipresentasikan dalam **Seminar Nasional Aljabar, Pengajaran Dan Terapannya** dengan tema **Kontribusi Aljabar dalam Upaya Meningkatkan Kualitas Penelitian dan Pembelajaran Matematika untuk Mencapai World Class University** yang diselenggarakan oleh Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY Yogyakarta pada tanggal 31 Januari 2009

diharapkan adalah memperkaya kajian tentang masalah pemetaan linear yang mempertahankan invers tergeneralisasi matriks dan merupakan salah satu kajian yang menarik khususnya dalam teori matriks.

Pembahasan

Pada tulisan ini *F* menyatakan lapangan, F^* menyatakan semua elemen tak nol dari *F*. Himpunan semua matriks nxn dengan unsur-unsurnya anggota *F* dinotasikan dengan $M_n(F)$, Matriks $X \in M_{nxn}(F)$ disebut invers drazin matriks $A \in M_{nxn}(F)$ jika X adalah penyelesaian dari persamaan-persamaan :

(i). $AX = XA$

(ii). $XAX = X$

(iii). $A^k XA = A^k$ untuk suatu bilangan bulat positif k.

Apabila A^D menotasikan invers Drazin dari matriks A untuk sebarang $A \in M_{nxn}(F)$, maka pemetaan linear **T** dari $M_n(F)$ ke $M_m(F)$ mempertahankan invers Drazin dari matriks apabila T(A^D)=T$(A)^D$ untuk setiap $A \in M_{nxn}(F)$, dan himpunan semua pemetaan linear dari $M_n(F)$ ke $M_m(F)$ yang mempertahankan invers Drazin dinotasikan dengan Γ. Pada tulisan ini lapangan F diasumsikan mempunyai paling sedikit lima elemen.

Himpunan semua matriks nxn yang invertible dinotasikan dengan $Gl_n(F)$, sedangkan E_{ij} menotasikan matriks dengan unsur 1 pada posisi (i,j) dan 0 pada yang lainnya, 0_t menyatakan himpunan matriks 0 txt dan $[1,n] = \{1,2,...,n\}$.

Matriks A dan B dikatakan *similar* jika terdapat matriks invertible P sedemikian sehingga $A = PBP^{-1}$

Teorema berikut sangat penting untuk menghasilkan teorema utama pada tulisan ini.

Teorema 3.2

Diberikan $T : M_n(F) \to M_m(F)$ pemetaan linear yang mengawetkan *idempoten* matriks, $ch\,F \neq 2$, $1 < n \leq m$, maka T mempunyai bentuk salah satu dari dua bentuk berikut.

(i). $T = 0$

(ii). Terdapat matriks $P \in Gl_m(F)$ dan bilangan bulat non negatif $r, \delta\ dan\ s$ sedemikian sehingga,

$P^{-1}T(A)P = (A \otimes I_\delta) \oplus (A^t \otimes I_{r-\delta}) \oplus 0_s$

Untuk semua $A \in M_n(F)$ dengan $m = nr + s\ dan\ \delta \le r$.

Selanjutnya sebelum pembahasan teorema utama diperlukan beberapa lemma pendukung terlebih dahulu. Pada empat lemma berikut F diasumsikan lapangan sebarang dengan paling sedikit memuat lima elemen.

Lemma 3.1

Diberikan sebarang x_1, x_2, x_3, x_4 *empat elemen berbeda di* F *dan* $A, B, C, D \in M_n(F)$ *.Jika* $A + x_k B + x_k^2 C + x_k^3 D = 0$ *untuk semua* $k \in [1,4]$*,maka* $A = B = C = D = 0$*.*

Bukti.

Dengan memasukan indek $k \in [1,4]$,diperoleh sistem persamaan berikut.

$$A + x_1 B + x_1^2 C + x_1^3 D = 0$$
$$A + x_2 B + x_2^2 C + x_2^3 D = 0$$
$$A + x_3 B + x_3^2 C + x_3^3 D = 0$$
$$A + x_4 B + x_4^2 C + x_4^3 D = 0$$

Karena x_1, x_2, x_3, x_4 semua berbeda, maka dengan sifat yang ada dalam sistem persamaan linear dapat disimpulan bahwa $A = B = C = D = 0$.

Lemma 3.2.

Diberikan $T \in \Gamma$ *maka* $T(I_n)T(E_{ii}) = T(E_{ii})T(I_n)$ *untuk sebarang* $i \in [1,4]$.

Bukti.

Dengan menggunakan kenyataan bahwa $(I_n + (x-1)E_{ii})^D = (I_n + (x^{-1}-1)E_{ii}$, $A^D A = AA^D$ dan $T \in \Gamma$, maka diperoleh,

$$T(I_n + (x-1)E_{ii})T(I_n + (x^{-1}-1)E_{ii}) = T(I_n + (x^{-1}-1)E_{ii})T(I_n + (x-1)E_{ii})$$

Untuk sebarang $i \in [1,n]$ dan $x \in F^*$.

ISBN : 978-979-16353-2-5

Karena F memuat lima elemen, maka dapat dipilih $x \in F^*$ sedemikian sehingga $x^2 \neq 1$, dengan demikian akan diperoleh $T(I_n)T(E_{ii}) - T(E_{ii})T(I_n) = 0$ atau $T(I_n)T(E_{ii}) = T(E_{ii})T(I_n)$.

Lemma 3.3.

Diberikan $T \in \Gamma$ *, maka* $T(E_{ii}) = T(E_{ii})^2 T(I_n) = T(E_{ii})T(I_n)^2$ *untuk sebarang* $i \in [1,n]$.

Bukti.

Dengan menggunakan kenyataan bahwa $(I_n + (x^{-1}-1)E_{ii})^D = (I_n + (x \ -1)E_{ii}$, $A^D A A^D = A^D$,dan $T \in \Gamma$, diperoleh,

$$T(I_n + (x-1)E_{ii})T(I_n + (x^{-1}-1)E_{ii})T(I_n + (x-1)E_{ii}) = T(I_n + (x-1)E_{ii})$$

Untuk sebarang $i \in [1,n]$ dan sebarang $x \in F^*$.

Apabila diambil $A = T(I_n),\ B = T(E_{ii})$, maka diperoleh,

$$(A+(x-1)B)(A+(x^{-1}-1)B)(A+(x-1)B) = A+(x-1)B \text{ ....3.1}$$

Dan dengan mengalikan persamaan (3.1) dengan x didapatkan,

(A+(x-1)B)(A(x-1+1)-(x-1)B)(A+(x-1)B)=A(x-1+1)+(x-1+1)(x-1)B

$$(A+(x-1)B)(A+(x-1)(A-B))(A+(x-1)B = A+(x-1)(A+B)+(x-1)^2 B \text{ .....(3.2)}$$

Karena $I_n^D = I_n$, $E_{ii}^D = E_{ii}$ dan $T \in \Gamma$, maka diperoleh $A^D = A,\ B^D = B$ dan dengan kenyataan bahwa $A^3 = A,\ B^3 = B$, dan menggunakan lemma 3.2 , dari persamaan (3.2) diperoleh,

$$(x-1)(BA^2 - B) + (x-1)^2(2A^2B - B^2A - B) + (x-1)^3(B^2A - B) = 0$$

Dan dengan lemma 3.1 disimpulkan bahwa $B = B^2A,\ B = BA^2$.

Lemma 3.4

Diberikan $A^3 = A \in M_n(F)$ *maka terdapat matriks* $P \in Gl(F)$ *dan matriks* $A_1 \in M_r(F)$ *sedemikian sehingga* $A = P\, diag(A_1, O_{n-r})P^{-1}$ *dan* $A_1^2 = I_r$ *dengan rank A=r.*

Bukti.

Matriks A dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$A = P_1 \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_1 P_1 P_1^{-1} = P_1 \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1}, \quad \text{..(3.3)}$$

Dengan $P_1, Q_1 \in Gl_n(F), A_1 \in M_r(F)$ dan $rank\ A = rank\ (A_1\ A_2) = r$

Diketahui $A^3 = A$ dan $A = P_1 \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1}$

$$P_1 \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1} P_1 \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1} P_1 \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1} = P_1 \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1}$$

$$P_1 \begin{pmatrix} A_1^3 & A_1^2 A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1} = P_1 \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1}$$

$$A_1^2 (A_1\ A_2) = (A_1\ A_2) \quad \text{...(3.4)}$$

Karena matriks $(A_1\ A_2)$ adalah mempunyai rank baris penuh, maka dari (3.4) didapatkan $A_1^2 = I_r$ dan selanjutnya diperoleh

$$A = P_1 \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_1^{-1}$$

$$= P_1 \begin{pmatrix} I_r & -A_1 A_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & A_1 A_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} P_1^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

dengan $P = P_1 \begin{pmatrix} I_r & -A_1 A_2 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$

Selanjutnya pada lemma berikut diasumsikan karakteristik dari F tidak sama dengan 2.

Lemma 3.5

Diberikan $T \in \Gamma$, maka persamaan-persamaan berikut berlaku:

(i). $T(I_n)T(E_{ij}) = T(E_{ij})T(I_n)$.

(ii). $T(E_{ij})T(I_n)^2 = T(E_{ij})$

Untuk sebarang i,j yang berbeda dengan $i, j \in [1, n]$.

Bukti.

ISBN : 978-979-16353-2-5

Untuk sebarang i, j yang berbeda dengan $i, j \in [1, n]$ dan $x \in F^*$ dan menggunakan $(I_n + xE_{ij})^D = (I_n - xE_{ij})\ dan\ T \in \Gamma$,diperoleh

$T(I_n + xE_{ij})^D = T((I_n + xE_{ij})^D) = T(I_n - xE_{ij})$,sehingga berlaku persamaan berikut

$T(I_n + xE_{ij})T(I_n - xE_{ij}) = T(I_n - xE_{ij})T(I_n + xE_{ij})$.

Dan dengan penyederhanaan diperoleh,

$2x[T(I_n)T(E_{ij}) - T(E_{ij})T(I_n)] = 0$, karena karakteristik F tidak sama dengan 2 dan $x \in F^*$, maka $2x \neq 0$, sehingga didapat $T(I_n)T(E_{ij}) = T(E_{ij})T(I_n)$,terbukti (i).

Dengan menggunakan $T(I_n + xE_{ij})^D = T(I_n - xE_{ij})$ kembali , diperoleh,

$T(I_n - xE_{ij})T(I_n + xE_{ij})T(I_n - xE_{ij}) = T(I_n - xE_{ij})$ ....(3.5)

karena $T(I_n)^D = T(I_n)$, diperoleh $T(I_n)^3 = T(I_n)T(I_n)T(I_n) = T(I_n)^D T(I_n)T(I_n)^D = T(I_n)^D = T(I_n)$ .Dari (i) yang telah dibuktikan, $T(I_n)^3 = T(I_n)$ dan persamaan (3.5) diperoleh,

$x(T(E_{ij}) - T(E_{ij})T(I_n)^2) - x^2 T(E_{ij})^2 T(I_n) + x^3 T(E_{ij})^3 = 0$ dan dengan lemma 2.1 diperoleh

$T(E_{ij}) - T(E_{ij})T(I_n)^2 = 0\ atau\ T(E_{ij}) = T(E_{ij})T(I_n)^2$

Lemma 3.6.

Diberikan $A^2 = I_n$, $A \in M_n(F)$, maka terdapat matriks $P \in Gl_n(F)$ dan bilangan bulat nonnegatif p, q sedemikian sehingga $A = P diag(I_p, -I_q)P^{-1}$ dengan $p = rank(A + I_n)$, $rank(A) = p + q = n$.

Bukti.

Diketahui $A^2 = I_n$, dibentuk matriks $\frac{1}{2}(A + I_n)$,Matriks $\frac{1}{2}(A + I_n)$ adalah matriks idempoten karena $(\frac{1}{2}(A + I_n))^2 = (\frac{1}{2}(A + I_n))(\frac{1}{2}(A + I_n)) = \frac{1}{4}(A + I_n)^2 = \frac{1}{2}(A + I_n)$. Dan selanjutnya karena $\frac{1}{2}(A+I_n)$ idempoten maka terdapat matriks $P \in Gl_n(F)$ sedemikian

sehingga $\frac{1}{2}(A+I_n) = P\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$ dengan $p = rank(A+I_n)$, sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
(A+I_n) &= 2P\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \\
A &= 2P\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} - I_n \\
&= 2\left\{P\left[\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}I_n\right]P^{-1}\right\} \\
&= 2\left\{P\left[\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}\right]P^{-1}\right\} \\
&= 2\left\{P\begin{pmatrix} I_p - \frac{1}{2}I_p & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}I_q \end{pmatrix}P^{-1}\right\} \\
&= P\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}$$

, dengan $q = n - r$.

Lemma 3.7.

Diberikan $A^3 = A \in M_n(F)$ *maka terdapat matriks* $P \in Gl_n(F)$ *dan bilangan bulat nonnegatif* p, q *dan* s *sedemikian sehingga ,*

$A = Pdiag(I_n, -I_q, 0_s)P^{-1}$

Dengan $rank(A) = p + q, p = rank(A + I_n) + rank\ A - n$ *dan* $p + q + s = n$

Bukti.

Dengan lemma 3.4 , terdapat matriks $P_1 \in Gl_n(F)$ sedemikian sehingga $A = P_1\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P_1^{-1}$, dengan $rank\ A = r$ dan $A_1^2 = I_r$. Dengan lemma 3.6 , terdapat matriks $P_2 \in Gl_r(F)$ sedemikian sehingga ,

$A_1 = P_2\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}P_1^{-1}$, dengan $p + q = r$ dan $p = rank(A_1 + I_r)$.

ISBN : 978-979-16353-2-5

Selanjutnya diperoleh,

$$A = P_1 diag\left(P_2 \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} P_2^{-1}, 0_s \right) P_1^{-1}$$

$$= P_1 \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix} diag(I_p, -I_q, 0_s) \begin{pmatrix} P_2^{-1} & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix} P_1^{-1}$$

$$= P diag(I_p, -I_q, 0_s) P^{-1}$$

Dengan $P = P_1 \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}, s = n - p - q$, dan kemudian didapat,

$$p = rank(A_1 + I_r)$$

$$= rank \begin{pmatrix} A_1 + I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

$$= rank \begin{pmatrix} A_1 + I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} - n + r$$

$$= rank \left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} + I_n \right) - n + r$$

$$= rank(A + I_n) + rank\ A - n$$

Lemma 3.8

Diberikan T pemetaan linear dari $M_n(F)$ ke $M_m(F)$ yang mengawetkan idempoten dan $ch\,F \neq 2$. Jika $n > m \geq 1$, maka $T = 0$.

Dari lemma-lemma diatas kemudian dibuktikan teorema utama berikut.

Teorema 3.9

Diberikan $ch\,F \neq 2$, $m, n > 1$ dan F dengan paling sedikit lima elemen, maka $T \in \Gamma$ jika dan hanya jika T mempunyai salah satu bentuk dari dua bentuk berikut:

(i). $T = 0$

(ii).Terdapat matriks invertible $P \in Gl_n(F)$ dan bilangan bulat nonnegatif p_1, p_2, q_1, q_2 dan s sedemikian sehingga ,

$P^{-1}T(A)P = (A \otimes I_{p_1}) \oplus (A^t \otimes I_{q_1}) \oplus (A \otimes -I_{p_2}) \oplus (A^t \otimes -I_{q_2}) \oplus 0_s$, *untuk semua* $A \in M_n(F)$*, dengan* $m = (p_1 + p_2 + q_1 + q_2)n + s$.

Bukti.

Karena $T(I_n)^D = T(I_n^D) = T(I_n)$, maka $T(I_n)^3 = T(I_n)$.Menggunakan lemma 3.7 , terdapat matriks $P \in Gl_m(F)$ sedemikian sehingga

$T(I_n) = P\,diag(I_{t_1}, -I_{t_2}, 0_{t_3})\,P^{-1}$, dengan $t_1 + t_2 + t_3 = m$. 3.6

Untuk sebarang $X \in M_n(F)$, dari lemma 3.2 dan bagian (i) lemma 3.5 berlaku

$T(I_n)T(X) = T(X)T(I_n)$ 3.7

Dari lemma 3.3 dan bagian (ii) lemma 3.5 berlaku ,

$T(X) = T(X)T(I_n)^2$ 3.8

Menggunakan persamaan (3.6), (3.7) dan (3.8) diperoleh,

$T(X) = P\,diag(X_1, X_2, 0_{t_3})\,P^{-1},\ X_1 \in M_{t_1}(F),\ X_2 \in M_{t_2}(F)$.

Dimisalkan $f_1(X) = X_1,\ f_2(X) = -X_2$, maka

$T(X) = P\,diag(f_1(X), -f_2(X), 0_{t_3})P^{-1}$ 3.9

Karena T adalah pemetaan linear , maka dari (3.9) didapat bahwa $f_1 : M_n(F) \to M_{t_1}(F)$ dan $f_2 : M_n(F) \to M_{t_2}(F)$ adalah pemetaan linear. Dari (3.6) dan (3.9) diperoleh $f_1(I_n) = I_{t_1}$ dan $f_2(I_n) = I_{t_2}$.

Menggunakan (3.9) kembali dipunyai

$T(X^D) = P\,diag(f_1(X^D), -f_2(X^D), 0_{t_3})\,P^{-1}$ 3.10

Dan

$T(X)^D = P\,diag(f_1(X)^D, -f_2(X)^D, 0_{t_3})\,P^{-1}$ 3.11

Dari persamaan (3.10), (3.11) dan $T(X^D) = T(X)^D$ disimpulkan bahwa $f_1 : M_n(F) \to M_{t_1}(F)$ dan $f_2 : M_n(F) \to M_{t_2}(F)$ adalah pemetaan linear yang mengawetkan invers Drazin matriks.

Selanjutnya dibuktikan bahwa f_1 mengawetkan idempoten. Untuk sebarang $M^2 = M \in M_n(F)$ terdapat matriks $Q \in Gl_n(F)$ sedemikian sehingga

$M = Q(I_r \oplus 0)Q^{-1}$, ...3.12

dengan rank $M = r$.

Diambil $T_1(X) = f_1(QXQ^{-1})$, untuk semua $X \in M_n(F)$, maka T_1 adalah pemetaan linear dari $M_n(F)$ ke $M_{t_1}(F)$ yang mengawetkan invers Drazin matriks dan

ISBN : 978-979-16353-2-5

$T(I_n) = f_1(QI_nQ^{-1}) = f_1(I_n) = I_{t_1}$. Menggunakan lemma 3.3 diperoleh

$T_1(E_{ii}) = T_1(E_{ii})^2 T(I_n) = T_1(E_{ii})I_{t_1} = T_1(E_{ii})^2$ untuk sebarang $i \in [1,n]$ 3.13

Karena $(xE_{ii} \pm E_{jj})^D = x^{-1}E_{ii} \pm E_{jj}$ untuk sebarang $i \neq j, i, j \in [1,n]$ dan sebarang $x \in F^*$, maka $(xT_1(E_{ii}) \pm T_1(E_{jj}))^D = x^{-1}T_1(E_{ii}) \pm T_1(E_{jj})$, selanjutnya jika diambil $T_1(E_{ii}) = A_i$ dan $T_1(E_{jj}) = A_j$ maka berlaku $(xA_i \pm A_j)^D = x^{-1}A_i \pm A_j$ .Selanjutnya diperoleh

$(x^{-1}A_i \pm A_j)(xA_i \pm A_j)(x^{-1}A_i \pm A_j) = x^{-1}A_i \pm A_j$ 3.14

Dari (3.13) dan (3.14) berlaku

$A_jA_i + A_iA_j + x^2A_jA_iA_j = 0$ 3.15

Dengan (3.15) dan lemma 3.1 didapatkan

$A_jA_iA_j = 0$, $A_jA_i + A_iA_j = 0$

Mengkombinasikan kedua persamaan diatas dan dengan (3.13) disimpulkan bahwa

$A_iA_j = A_iA_j = 0$ 3.16

Dengan persamaan (3.11)-(3.13) dan (3.16) diperoleh

$$
\begin{aligned}
f_1(M) &= f_1(Q(I_r \oplus 0)Q^{-1}) \\
&= T_1(I_r \oplus 0) \\
&= \sum_{i=1}^{r} T_1(E_{ii}) \\
&= \sum_{i=1}^{r} T_1(E_{ii})^2 \\
&= (\sum_{i=1}^{r} T_1(E_{ii}))^2 \\
&= (T_1(I_r \oplus 0))^2 = f_1(M)^2
\end{aligned}
$$

Hal ini berarti bahwa f_1 mengawetkan idempoten.Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa f_2 juga mengawetkan idempoten.

Karena f_1 dan f_2 keduanya mengawetkan idempoten , maka dengan lemma 3.8 dan teorema 3.1 didapat kasus berikut:

Jika $n > t_1$ maka dengan lemma 3.8 disimpulkan bahwa f_1=0, dan jika $n \leq t_1$ maka f_1 mempunyai bentuk salah satu dari(i) atau (ii) pada teorema 3.2.Secara sama , jika

$n > t_2$ maka dengan lemma 3.8 disimpulkan bahwa $f_2 = 0$ dan jika $n \le t_2$ maka f_2 mempunyai bentuk salah satu dari (i) atau (ii) pada teorema 3.2. Dengan pertimbangan tentang f_1 dan f_2 diatas disimpulkan bahwa T mempunyai bentuk salah satu dari (i) atau (ii) pada teorema 3.9.

Kebalikan teorema 3.9, Jika T mempunyai bentuk salah satu dari (i), (ii) pada teorema 3.9 maka dapat ditunjukkan bahwa T merupakan pemetaan linear dari $M_n(F)$ ke $M_m(F)$ yang mempertahankan invers Drazin matriks. Dengan demikian terbukti teorema di atas.

Berikut diberikan contoh untuk memperjelas teorema di atas untuk kasus T bukan pemetaan 0.

Diambil pemetaan $T : M_2(Z_5) \to M_3(Z_5)$, untuk setiap $A \in M_2(Z_5)$, didefinisikan pemetaan sebagai berikut

$T(A) = P\left[(A \otimes I_1) \oplus 0_1\right]P^{-1}$ dengan

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dan dengan operasi baris elementer diperoleh invers dari matriks P

yaitu $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Jika diambil $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ dan $A^D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, maka diperoleh $T(A)$ dan $T(A^D)$ sebagai berikut.

$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $T(A^D) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, setelah dilakukan pengecekan dengan definisi invers Drazin diperoleh bahwa $T(A^D) = T(A)^D$ yaitu memenuhi kondisi berikut

ISBN : 978-979-16353-2-5

$$T(A)T(A^D) = T(A^D)T(A)$$
$$T(A^D)T(A)T(A^D) = T(A^D)$$
$$T(A)T(A^D)T(A) = T(A)$$

Kesimpulan

Berdasarkan uraian di atas diperoleh kesimpulan bahwa telah diperoleh bentuk dari pemetaan linear yang mempertahankan invers Drazin matriks seperti pada teorema 3.9.

Daftar pustaka

1.Ben –Israel, a & Greville, T.N.E, 2003, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, John Wiley & Sons,inc

2.Bu Changjiang, 2005, Linear maps Preserving Drazin inverses of matrices over field,*Linear Algebra and Its Applications*, vol 390, page 159-173.

3.C.G.Cao, X.Zhang. Additive Operators Preserving idempotent matrices over field and applications, *Linear Algebra Appl*.248 (1996)327-338

4.Radhakrishna Rao,C,1971, *Generalized Inverse of Matrices and Applications* , John Wiley & Sons,inc.