Penerapan Aljabar Max-Plus Interval pada Jaringan Antrian dengan Waktu Aktifitas Interval

M. Andy Rudhito
[1]Mahasiswa S3 Matematika FMIPA UGM dan Staff Pengajar FKIP Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
rudhito@staff.usd.ac.id

Sri Wahyuni, Ari Suparwanto
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada
Sekip Utara Yogyakarta
swahyuni@ugm.ac.id, ari_suparwanto@yahoo.com

F. Susilo
Jurusan Matematika FST , Universitas Sanata Dharma Yogyakarta
fsusilo@staff.usd.ac.id

Abstrak

Makalah ini membahas tentang pemodelan dan interval waktu periodik layanan jaringan antrian *fork-join* taksiklik kapasitas penyangga takhingga dengan waktu aktifitas interval, dengan menggunakan aljabar max-plus interval. Hasil pembahasan menunjukkan bahwa dinamika jaringan antrian *fork-join* taksiklik kapasitas penyangga takhingga dengan waktu aktifitas interval dapat dimodelkan ke dalam suatu persamaan matriks atas aljabar max-plus interval. Interval waktu sikel layanan jaringan antrian adalah nilai eigen max-plus interval dari matriks pada persamaan tersebut.

Kata-kata kunci: aljabar max-plus interval, nilai eigen max-plus interval, jaringan antrian fork-join dan waktu aktifitas interval.

1. Pendahuluan

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan, kadang-kadang waktu aktifitasnya belum diketahui. Hal ini misalkan karena jaringan masih pada tahap perancangan, data-data mengenai waktu aktifitas belum diketahui secara pasti maupun distribusinya. Waktu aktifitas ini dapat diperkirakan berdasarkan pengalaman maupun pendapat dari para ahli maupun operator jaringan tersebut. Untuk itu waktu aktifitas jaringan dimodelkan dalam suatu interval, yang selanjutnya di sebut waktu aktifitas interval.

Aljabar max-plus (himpunan semua bilangan real **R** dilengkapi dengan operasi max dan plus) telah dapat digunakan dengan baik untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah-masalah jaringan, seperti masalah: penjadwalan (proyek) dan sistem antrian, lebih detailnya dapat dilihat pada Bacelli, *et al*. (2001), Rudhito, A. (2003). Dalam Krivulin N.K. (1996a) dan Rudhito, A dan Suparwanto, A (2008) telah dibahas pemodelan dinamika jaringan antrian *fork-join* taksiklik dengan kapasitas penyangga takhingga ke dalam suatu persamaan matriks aljabar max-plus.

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Aljabar, Pengajaran Dan Terapannya dengan tema Kontribusi Aljabar dalam Upaya Meningkatkan Kualitas Penelitian dan Pembelajaran Matematika untuk Mencapai World Class University yang diselenggarakan oleh Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY Yogyakarta pada tanggal 31 Januari 2009

Penyusunan model tersebut menggunakan suatu hasil dalam penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-plus. Dalam Rudhito, A dan Suparwanto, A (2008) juga telah ditunjukkan bahwa waktu periodik layanan jaringan antrian tersebut adalah nilai eigen max-plus interval dari matriks pada persamaan tersebut.

Konsep aljabar max-plus interval yang merupakan perluasan konsep aljabar max-plus, di mana elemen-elemen yang dibicarakan berupa interval telah dibahas dalam Rudhito, dkk (2008a). Pembahasan mengenai matriks atas aljabar max-plus telah dibahas dalam Rudhito, dkk (2008b). Dalam Rudhito, dkk (2008c). Telah dibahas eksistensi dan ketunggalan penyelesaian sistem persamaan linear iteratif max-plus interval. Sementara pembahasan mengenai nilai eigen dan vektor eigen atas aljabar max-plus interval telah dibahas dalam Rudhito, dkk (2008d).

Sejalan dengan cara pemodelan dan pembahasan waktu periodik layanan jaringan seperti dalam Rudhito, A dan Suparwanto, A (2008), dan dengan memperhatikan hasil-hasil pada aljabar max-plus interval, makalah ini akan membahas pemodelan dan interval waktu sikel layanan jaringan antrian fork-join taksiklik kapasitas penyangga takhingga dengan waktu aktifitas interval, dengan menggunakan aljabar max-plus interval.

2. Pemodelan Jaringan Antrian

Diperhatikan suatu jaringan dengan n titik pelayan tunggal (*single-server*) dan pelanggan klas tunggal (*single-class*). Struktur jaringan antrian ini dapat dinyatakan dengan graf berarah tak siklik G = (N, A) dengan busur yang ditentukan oleh rute transisi pelanggan. Untuk setiap titik $i \in$ N, didefinisikan himpunan *pendahulu* (*predecessors*) dan *penerus* (*saccessors*) titik i berturut-turut dengan $P(i) = \{ j \mid (j, i) \in$ A) dan $S(i) = \{ j \mid (j, i) \in$ A).

Untuk setiap titik $i \in$ N terdiri dari sebuah pelayan dan penyangga dengan kapasitas takhingga yang bekerja dengan prinsip *First-In First-Out* (*FIFO*). Pada waktu-awal jaringan bekerja diasumsikan bahwa pelayan bebas pelanggan, penyangga untuk semua titik i dengan $P(i) \neq \emptyset$ dalam keadaan kosong, sedangkan penyangga titik yang tidak mempunyai pendahulu ($P(i) = \emptyset$) mempunyai takhingga banyak pelanggan.

Operasi *fork* pada titik *i* diawali setiap kali layanan sebuah pelanggan selesai dan diperoleh beberapa pelanggan baru untuk antrian berikutnya. Banyaknya pelanggan baru yang muncul pada titik *i* sebanyak titik dalam *S*(*i*). Pelanggan-pelanggan baru ini secara serentak meninggalkan titik *i* dan menuju titik-titik $j \in S(i)$ secara terpisah. Operasi *join* pada titik *i* terjadi saat pelanggan-pelanggan datang ke titik *i* , tidak hanya di menunggu di penyangga, tetapi juga menunggu sedikitnya satu pelanggan dari setiap titik $j \in P(i)$ datang. Segera setelah pelanggan datang, bersama satu pelanggan dari setiap titik pendahulunya, mereka bersatu menjadi satu pelanggan dan masuk dalam penyangga dalam pelayan berikutnya. Dalam pengoperasian jaringan ini diasumsikan bahwa perpindahan pelanggan antar titik tidak memerlukan waktu.

Misalkan $a_i(k)$ = interval waktu kedatangan pelanggan ke-*k* pada titik *i*.

$d_i(k)$ = interval waktu keberangkatan pelanggan ke-*k* pada titik *i*.

t_{ik} = interval lama waktu layanan untuk pelanggan ke-*k* pada pelayan *i*.

Diasumsikan jaringan mulai beroperasi pada nol waktu, yaitu bahwa $d_i(0) = 0 = [0, 0]$ dan $d_i(k) = \varepsilon = [\varepsilon,\varepsilon]$ untuk semua $k < 0$, $i = 1, \ldots, n$. Dinamika antrian pada titik *i* dapat dinyatakan dengan

$$d_i(k) = \max(t_{ik} + a_i(k),\ t_{ik} + d_i(k-1)) \qquad (1)$$

$$a_i(k) = \begin{cases} \max\limits_{j\in P(i)}(d_j(k)), & \text{jika } P(i) \neq \phi, \\ \varepsilon, & \text{jika } P(i) = \phi. \end{cases} \qquad (2)$$

Dengan notasi aljabar max-plus interval persamaan (1) dan (2) dapat dituliskan sebagai berikut

$$d_i(k) = t_{ik} \,\overline{\otimes}\, a_i(k) \oplus t_{ik} \,\overline{\otimes}\, d_i(k-1) \qquad (3)$$

$$a_i(k) = \begin{cases} \bigoplus\limits_{j\in P(i)} d_j(k), & \text{jika } P(i) \neq \phi, \\ \varepsilon, & \text{, jika } P(i) = \phi. \end{cases} \qquad (4)$$

Misalkan $\mathbf{d}(k) = [\ d_1(k)\ , d_2(k), \ldots , d_n(k)]^T$, $\mathbf{a}(k) = [\ a_1(k)\ , a_2(k), \ldots , a_n(k)]^T$ dan $T_k = \begin{bmatrix} t_{1k} & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & t_{nk} \end{bmatrix}$. Persamaan (3) dan (4) di atas dapat dituliskan menjadi

$$\mathbf{d}(k) = T_k \,\overline{\otimes}\, \mathbf{a}(k) \,\overline{\oplus}\, T_k \,\overline{\otimes}\, \mathbf{d}(k-1). \qquad (5)$$

ISBN : 978-979-16353-2-5

$$\mathbf{a}(k) = \mathrm{G} \;\overline{\otimes}\; \mathbf{d}(k), \tag{6}$$

dengan matriks G yang unsur-unsur adalah $\mathrm{G}_{ij} = \begin{cases} 0 = [0,0], & \text{jika } j \in P(i) \\ \varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon], & \text{untuk yang lain} \end{cases}$.

Perhatikan bahwa G merupakan matriks adjesensi dari graf stuktur jaringan antrian. Dari persamaan (5) dan (6) dapat dituliskan persamaan

$$\mathbf{d}(k) = \mathrm{T}_k \;\overline{\otimes}\; \mathrm{G} \;\overline{\otimes}\; \mathbf{d}(k) \;\overline{\oplus}\; \mathrm{T}_k \;\overline{\otimes}\; \mathbf{d}(k-1). \tag{7}$$

Teorema 1.

Diberikan jaringan antrian *fork-join* tak siklik dengan waktu aktifitas interval, dengan graf struktur jaringannya yang mempunyai panjang lintasan terpanjang p dan matriks adjesensi G. Persamaan state eksplisit jaringan tersebut adalah

$$\mathbf{d}(k) = \mathrm{A}(k) \;\overline{\oplus}\; \mathbf{d}(k-1), \tag{8}$$

dengan $\mathrm{A}(k) = (\mathrm{E} \;\overline{\oplus}\; (\mathrm{T}_k \;\overline{\otimes}\; \mathrm{G}))^p \;\overline{\otimes}\; \mathrm{T}_k$.

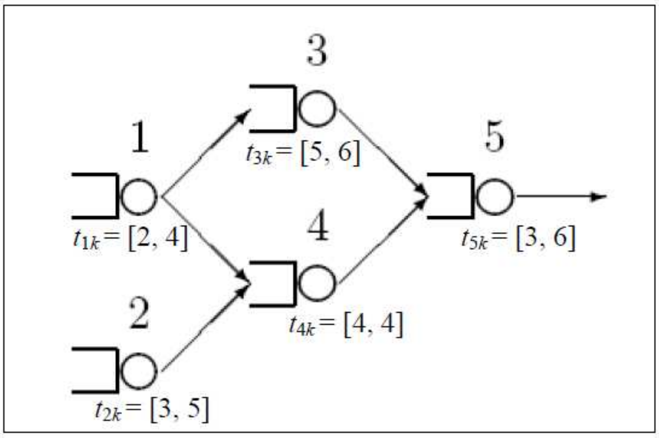
Bukti:

Dari persamaan (7) dapat dituliskan $\mathbf{d}(k) = (\mathrm{T}_k \;\overline{\otimes}\; \mathrm{G}) \;\overline{\otimes}\; \mathbf{d}(k) \;\overline{\oplus}\; (T_k \;\overline{\otimes}\; \boldsymbol{d}(k-1))$. Karena G adalah matriks adjesensi graf taksiklik dengan panjang lintasan p maka menurut hasil pada Rudhito, A dan Suparwanto, A (2008) dan Rudhito, dkk (2008b), diperoleh $\mathrm{G}^{\otimes q}$ = ε untuk semua $q > p$. Akibatnya $(\mathrm{T}_k \;\overline{\otimes}\; \mathrm{G})^q = \varepsilon$ untuk semua $q > p$. Selanjutnya menurut hasil pada Rudhito, A dan Suparwanto, A (2008) dan Rudhito, dkk (2008c), persamaan di atas mempunyai penyelesaian

$$\mathbf{d}(k) = (\mathrm{E} \;\overline{\oplus}\; (\mathrm{T}_k \overline{\otimes}\, \mathrm{G}))^p \;\overline{\otimes}\; (\mathrm{T}_k \overline{\otimes}\, \mathbf{d}(k-1)) = ((\mathrm{E} \;\overline{\oplus}\; (\mathrm{T}_k \overline{\otimes}\, \mathrm{G}))^p \;\overline{\otimes}\; \mathrm{T}_k) \;\overline{\otimes}\; \mathbf{d}(k-1)). \quad \square$$

Contoh 1.

Jaringan antrian *fork-join* taksiklik dengan n = 5 diperlihatkan dalam Gambar 1 berikut.



Gambar 1.

Matriks adjesensi dari graf pada jaringan di atas adalah G = $\begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$. Nampak bahwa panjang lintasan terpanjangnya adalah p = 2. Dari persamaan (8) diperoleh persamaan state $\mathbf{d}(k) = A(k) \overline{\otimes} \mathbf{d}(k-1)$, dengan

$A(k) = (E \overline{\oplus} (T_k \overline{\otimes} G))^2 \overline{\otimes} T_k = (E \overline{\oplus} (T_k \overline{\otimes} G) \overline{\oplus} (T_k \overline{\otimes} G)^2) \overline{\otimes} T_k$

$$= \begin{bmatrix} t_{1k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & t_{2k} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{1k} \overline{\otimes} t_{3k} & \varepsilon & t_{3k} & \varepsilon & \varepsilon \\ t_{1k} \overline{\otimes} t_{4k} & t_{2k} \overline{\otimes} t_{4k} & \varepsilon & t_{4k} & \varepsilon \\ t_{1k} \overline{\otimes} (t_{3k} \overline{\oplus} t_{4k}) \overline{\otimes} t_{5k} & t_{2k} \overline{\otimes} t_{4k} \overline{\otimes} t_{5k} & t_{3k} \overline{\otimes} t_{5k} & t_{4k} \overline{\otimes} t_{5k} & t_{5k} \end{bmatrix}.$$

Misalkan lama waktu layanan untuk pelanggan ke-k pada pelayan i adalah sebagai berikut: t_{1k} = [2, 4], t_{2k} = [3, 5], t_{3k} = [5, 6], t_{4k} = [4, 4] dan t_{5k} = [3, 6]

maka diperoleh A(k) = $\begin{bmatrix} [2,4] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & [3,5] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [7,10] & \varepsilon & [5,6] & \varepsilon & \varepsilon \\ [6,8] & [7,9] & \varepsilon & [4,4] & \varepsilon \\ [10,16] & [10,15] & [8,12] & [7,10] & [3,6] \end{bmatrix}$. Sehingga untuk k = 1, 2 diperoleh

ISBN : 978-979-16353-2-5

$$\begin{bmatrix} d_1(1) \\ d_2(1) \\ d_3(1) \\ d_4(1) \\ d_5(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2,4] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & [3,5] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [7,10] & \varepsilon & [5,6] & \varepsilon & \varepsilon \\ [6,8] & [7,9] & \varepsilon & [4,4] & \varepsilon \\ [10,16] & [10,15] & [8,12] & [7,10] & [3,6] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \\ [0,0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2,4] \\ [3,5] \\ [7,10] \\ [7,9] \\ [10,16] \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} d_1(2) \\ d_2(2) \\ d_3(2) \\ d_4(2) \\ d_5(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2,4] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & [3,5] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [7,10] & \varepsilon & [5,6] & \varepsilon & \varepsilon \\ [6,8] & [7,9] & \varepsilon & [4,4] & \varepsilon \\ [10,16] & [10,15] & [8,12] & [7,10] & [3,6] \end{bmatrix} \overline{\otimes} \begin{bmatrix} [2,4] \\ [3,5] \\ [7,10] \\ [7,9] \\ [10,16] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [4,8] \\ [6,10] \\ [12,16] \\ [11,14] \\ [15,22] \end{bmatrix}.$$

3. Interval Waktu Layanan Periodik

Diperhatikan interval waktu penuntasan sikel layanan jaringan sebagai barisan sikel layanan: sikel ke-1 mulai saat waktu awal, dan berakhir segera setelah semua pelayan dalam jaringan menuntaskan layanan ke-1-nya, sikel ke-2 berakhir segera setelah semua pelayan dalam jaringan menuntaskan layanan ke-1-nya, dan seterusnya. Dengan demikan interval waktu penuntasan sikel ke-*k* pada titik *i* adalah $d_i(k)$, sehingga waktu penuntasan sikel ke-*k* pada jaringan dapat dinyatakan sebagai

$$\max_i(d_i(k))$$

dengan $d_i(0) = 0 = [0, 0]$, $i = 1, \ldots, n$ dan $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Selanjutnya interval waktu sikel layanan jaringan dinyatakan dengan:

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \max_i(d_i(k)).$$

Teorema 2.

Jaringan antrian *fork-join* taksiklik kapasitas penyangga takhingga, dengan persamaan state eksplisit jaringan tersebut adalah $\mathbf{d}(k) = A(k) \overline{\otimes} \mathbf{d}(k-1)$, $k = 1, 2, \ldots$, mempunyai interval waktu penuntasan sikel layanan $\gamma = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \max_i(d_i(k)) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]$ yaitu nilai eigen max-plus interval matriks A tersebut.

Bukti:

Sejalan dengan pembuktian Teorema 7 pada Rudhito, A dan Suparwanto, A, 2008, dapat ditunjukkan untuk matriks batas bawah dan matriks batas bawah. Selanjutnya untuk setiap matriks $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$, berlaku $\underline{A} \preceq_m A_{ij} \preceq_m \overline{A}$. Karena sifat kekonsistenan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada matriks terhadap urutan " $\preceq_m$ ", maka berlaku $\underline{A}^{\otimes k} \preceq_m A^{\otimes k} \preceq_m \overline{A}^{\otimes k}$, untuk k = 1, 2, ... , sehingga berlaku $\bigoplus_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^{n} (\underline{A}^{\otimes k})_{ii})$ $\preceq_m \bigoplus_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^{n} (A^{\otimes k})_{ii}) \preceq_m \bigoplus_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} \bigoplus_{i=1}^{n} (\overline{A}^{\otimes k})_{ii})$, atau $\lambda_{\max}(\underline{A}) \preceq_m \lambda_{\max}(A) \preceq_m \lambda_{\max}(\overline{A})$. Dengan demikian $[\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]$ adalah suatu interval. Jadi terbukti γ = $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \max_i (\mathrm{d}_i(k))$ = $[\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})]$ yaitu nilai eigen max-plus interval matriks A tersebut. ∎

Contoh 2

Untuk jaringan pada Contoh 1 di atas, dengan bantuan program komputer yang ditulis dengan MATLAB dapat ditentukan bahwa

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \max_i (\mathrm{d}_i(k)) = [\lambda_{\max}(\underline{A}), \lambda_{\max}(\overline{A})] = [5, 6].$$

Kepustakaan

Bacelli, F., *et al*. 2001. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons.

Krivulin, N.K., 1996a. The Max-Plus Algebra Approach in Modelling of *Queueing Net-works Proc. 1996 SCS Summer Computer Simulation Conference (SCSC-96), Jaly 21-25*, The Society for Computer Simulation, 485-490.

Rudhito, Andy. 2003. *Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant*. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Rudhito, Andy dan Suparwanto, Ari 2008. "Pemodelan Aljabar Max-Plus dan Evaluasi Kinerja Jaringan Antrian *Fork-Join* Taksiklik dengan Kapasitas Penyangga Takhingga". Prosiding Seminar Nasional Sains dan Pendidikan Sains, UKSW. Salatiga. 12 Januari 2008.

ISBN : 978-979-16353-2-5

Rudhito, Andy, dkk. 2008a. "Aljabar Max-Plus Interval". Prosiding Seminar Nasional Matematika S3 UGM. Yogyakarta. 31 Mei 2008.

Rudhito, Andy, dkk. 2008b. "Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval". Prosiding Seminar Nasional Matematika S3 UGM. Yogyakarta. 31 Mei 2008.

Rudhito, Andy, dkk. 2008c. "Nilai Eigen dan Vektor Eigen atas Aljabar Max-Plus Interval". Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY. Yogyakarta. 28 November 2008.

Rudhito, Andy, dkk. 2008d. "Nilai Eigen dan Vektor Eigen atas Aljabar Max-Plus Interval". Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UNY. Yogyakarta. 28 November 2008.