ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

T – 27

Dimensi Metrik Graf Kincir Dengan Daun Bervariasi

Oleh :
Titik Mudjiati
Jurusan Matematika Fmipa Its

.

IMENSI METRIK GRAF KINCIR DENGAN DAUN BERVARIASI

ABSTRAK

Graf adalah suatu sistem atau pasangan (V,E) dengan V adalah himpunan *vertex* berhingga, tidak kosong dan E adalah himpunan *edge* yaitu pasangan *vertex* dari V. Jika G adalah graf terhubung, jarak antara dua *vertex* u dan v di G, $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek diantara keduanya. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ dari *vertex-vertex* dalam graf terhubung G tidak berarah, tidak terdapat *edge* rangkap dan *vertex* $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W adalah k vektor.

$$r(v \mid W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \cdots, d(v,w_k)).$$

Jika $r(v|W)$ untuk setiap *vertex* $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan *resolving* dari $V(G)$. Himpunan resolving dengan kardinalitas minimum disebut himpunan *resolving* minimum, dan kardinalitas tersebut menyatakan dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan $\dim(G)$.

Pada penelitian ini diteliti dimensi metrik graf kincir dengan daun bervariasi $G = P_1 + nP_m$ dengan $n \geq 1$, $m \geq 2$. Dari penelitian yang dilakukan diperoleh hasil bahwa dimensi metriknya adalah $n + 1$ untuk $n \geq 1$ dan $m = 2$; 3 untuk $n = 2$ dan $m \geq 3$; $n+2$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 3$.

Kata kunci : himpunan resolving, dimensi metrik, graf kincir.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf adalah himpunan *vertex* dan *edge*, didefinisikan sebagai $G(V, E)$, dengan V adalah himpunan dari *vertex* dan E adalah himpunan dari *edge*. Setiap *edge* menghubungkan satu atau lebih *vertex* yang lain dan setiap *vertex* dapat mempunyai banyak *edge* yang menghubungkan ke *vertex* yang lain (Robin dkk, 1992).

Banyak penelitian telah dilakukan pada graf, diantaranya, dimensi metrik, dimensi partisi dll.. Dimensi metrik diperkenalkan oleh F. Harary dan R. Melter pada tahun 1976 dalam Jurnal On Metric Dimension of a Graf. Sampai saat ini, dimensi metrik masih terus dipelajari dan dikembangkan diantaranya adalah Carmen Hernando, Mercie Mora "On the metric dimension of some families graph" (2005). Pada penelitian ini diteliti mengenai "Dimensi Metrik Graf Kincir Dengan Daun bervariasi".

1.2 Perumusan Masalah

Bagaimana menentukan dimensi metrik graf kincir dengan daun bervariasi.

1.3 Batasan Masalah

Pada penelitian ini diteliti dimensi metrik pada graf kincir dengan daun bervariasi. .

1.4 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah :

Mencari dimensi metrik graf G , $\dim(G)$ dari graf kincir dengan daun bervariasi.

Adapun manfaatnya adalah :

Memberi kontribusi penelitian dalam bidang teori graf terutama pada dimensi metrik dan diharapkan dapat menambah wawasan yang lebih luas pada dimensi metrik graf.

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Beberapa Pengertian dalam Teori Graf

Graf tak berarah dan terhubung, selanjutnya disebut sebagai graf G, didefinisikan sebagai pasangan berurut $G(V,E)$ dengan V adalah himpunan hingga tidak kosong $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dan E himpunan dari *edge* $\{e_1, ..., e_n\}$. Anggota dari V disebut *vertex* dan anggota dari E disebut *edge*. Secara grafis *vertex* digambarkan sebagai lingkaran atau titik dan *edge* digambarkan sebagai ruas garis yang menghubungkan dua buah *vertex*.

2.2 Jarak

Jarak (*distance*) antara *vertex* u dan v pada garf G, dinotasikan dengan $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada graf G. Jika tidak ada lintasan antara u dan v, maka $d(u,v)=\infty$, (F. Harary, 1994)

2.3 Dimensi Metrik

Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pembeda (*resolving set*) pada G. Untuk *vertex-vertex* u dan v dalam graf terhubung G, jarak $d(u,v)$ adalah panjang dari lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut $W=(w_1, w_2, ..., w_k)$ dari *vertex-vertex* dalam graf terhubung G dan *vertex* r pada G.

$$r=(v|w)=(d(v,w_1), d(v,w_2), ..., d(v,w_k)) \qquad ...(2.1)$$

menunjukkan representasi dari v terhadap w. Himpunan w dinamakan himpunan pembeda (*resolving set*) G jika semua *vertex* di G mempunyai representasi berbeda.Himpunan pembeda (*resolving set*) dengan kardinalitas minimum disebut himpunan *resolving* minimum, dan kardinalitas tersebut menyatakan dimensi metrik dari G dan dinotasikan dengan $\dim(G)$, (Hernando, 2005; Glenn dkk,2005).

Misal $M=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ himpunan terurut dari *vertex* pada graf berhingga, terhubung dan tak berarah G. Maka $(d(u,v), d(u,v_2), ..., d(u,v_n))$ dinamakan *M*-

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

koordinat dari *vertex u* pada graf *G*. Himpunan *M* dinamakan basis metrik jika *vertex G* mempunyai *M-koordinat* yang berbeda. Basis metrik himpunan *M* dengan kardinalitas minimum dinamakan minimum dimensi metrik. (Bharati Rajan dkk, 2005; Jose C, 2007)

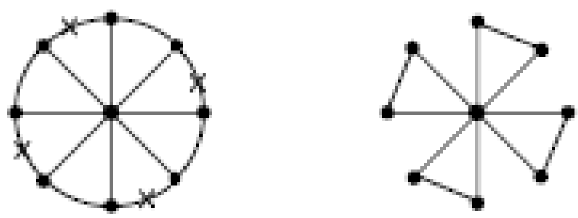
Ide awal untuk mencari dimensi metrik dari graf kincir sebagai berikut :

Graf kincir dibentuk dari graf *cycle* C_n, *n* bilangan bulat positif genap.

<u>Contoh 2.1</u>

Pembentukan graf kincir dari C_8 dapat dilakukan sebagai berikut :

Setiap *vertex* di C_8 dihubungkan ke pusat C_8. Setiap busur yang diberi tanda X dihapus, maka diperoleh graf kincir 4 daun



(a) (b)

Gambar 2.1 Graf Kincir 4 Daun (b) dari C_8 (a)

Untuk menentukan dimensi metrik graf kincir yang terbentuk dari C_n tidak mudah. Kemudian didefinisikan graf kincir $G = P_1 + nP_m$ dan lebih mudah untuk mencari dimensi metrik dari gaf kincir *G*. Selanjutnya definisi graf kincir yang digunakan dalam penelitian ini adalah $G = P_1 + nP_m$.

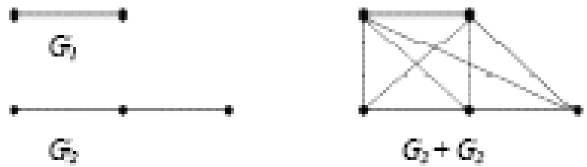
2.4 Operasi Jumlah Dari Graf

Definisi : Operasi Jumlah dari graf G_1 dan G_2 adalah graf $G = G_1 + G_2$ dengan himpunan *vertex* $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan edge-nya $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(x,y);x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$ (Frank Harary, 1994)

<u>Contoh 2.2</u>

Pada Gambar 2.2 Graf G = $G_1 + G_2$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3



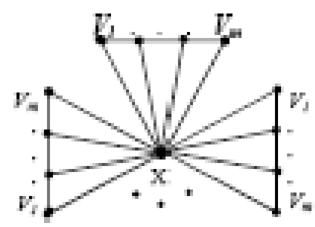
Gambar 2.2 Graf $G = G_1 + G_2$

2.5 Graf Kincir m,n

Definisi :

Graf kincir G adalah jumlahan (operasi +) graf path (P_1) dan n graf path (P_m), dimana m,n bilangan bulat positip dan $n \geq 1$, $m \geq 2$ dituliskan sebagai

$G = P_1 + n\,P_m$, $m,n \geq 2$ dan dapat digambarkan sebagai



s/d n daun

2.6 Dimensi Metrik Graf Kincir

Dimensi metrik graf Kincir dapat dicari melalui cara:

a. Kardinalitas minimum dari *resolving set* yang diberikan pada sub bab 2.3, dan / atau

b. Teorema 2.2

Dim(P_m) = 1 , $m \geq 1$, P_1, P_m, dim(P_1) + dim(P_m) $\leq$ dim($P_1 + P_m$).

(Hernando dkk, 2005)

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

BAB 3

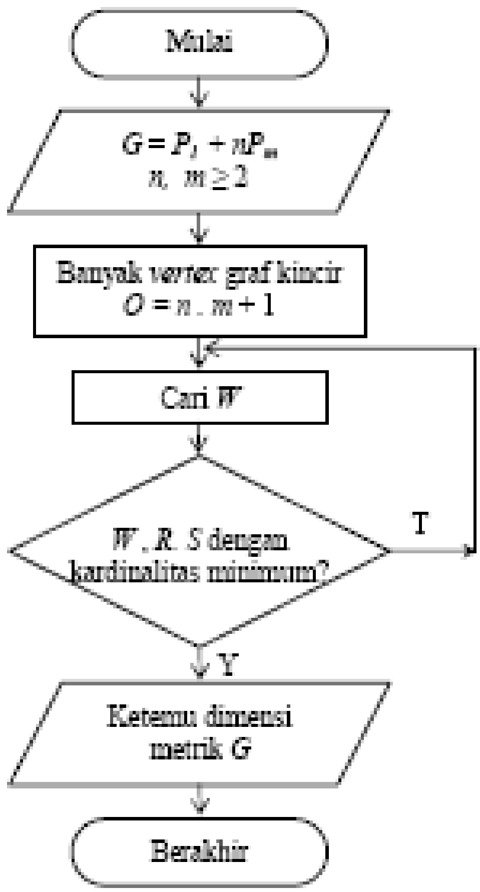
METODOLOGI PENELITIAN

3. 1. Metodologi Penelitian

Metodologi penelitian ini menggunakan langkah-langkah kerja untuk menentukan dimensi metrik graf kincir dengan daun bervariasi adalah

$\mathrm{Dim}(P_m) = 1$, $m \geq 1$, G_1, G_2, maka $\dim(G_2) + \dim(G_1) \leq \dim(G_1 + G_2)$ dan / atau kardinalitas minimum *resolving set* $(R.S)$

3. 2. Diagram Alir Metodologi Penelitian



Gambar 3.1 Diagram Alir Pencarian *Resolving Set*

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

3. 3. Algoritma Pencarian *W*

(Kardinalitas Minimum *Resolving Set*)

L = banyaknya *vertex* di graf kincir

Langkah/Prosedur.

A. Ambil $W = \{V_1\}$, W dengan jumlah anggota himpunan satu *vertex* dan banyaknya $W = \binom{L}{1}$

$$= \frac{L!}{1!\,(L-1)!}$$

Setiap W diperiksa, apakah W merupakan *resolving set* dengan kardinalitas minimum, jika ya ketemu dimensi metrik.

Jika tidak lanjutkan langkah B.

B. Ambil $W = \{V_1, V_2\}$, W dengan jumlah anggota himpunan dua *vertex* dan banyaknya $W = \binom{L}{2}$

$$= \frac{L!}{2!\,(L-2)!}$$

Setiap W diperiksa, apakah W merupakan *resolving set* dengan kardinalitas minimum, jika ya ketemu dimensi metrik.

Jika tidak, lanjutkan ke langkah berikutnya yaitu dengan mengambil W dengan jumlah anggota *vertex*-nya ditambah satu, dan begitu langkah seterusnya sampai dengan jumlah anggota W adalah sebanyak L *vertex*.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

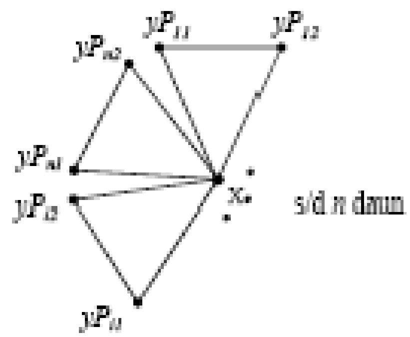
BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang dimensi metrik dari graf kincir secara umum. Dalam hal ini graf kincir dengan daun bervariasi dapat didefinisikan dengan $G = P_1 + nP_m$ dengan $m \geq 2, n \geq 1$. Untuk mendapatkan hasil dimensi metrik dari berbagai bentuk graf kincir dilakukan dengan 3.1 dan/atau dengan menentukan kardinalitas minimum dari himpunan *resolving*.

4.1 Dimensi Metrik Graf Kincir dengan $m = 2$

Secara umum graf kincir dengan $m = 2$ dapat digambarkan seperti Gambar 4.1 dibawah ini.



Gambar 4.1 Graf Kincir $G_7 = P_1 + nP_2$

Untuk menentukan dimensi metrik dari graf G_7 pada Gambar4.1 dilakukan sebagai berikut :

Cara I:

resolving set dari G

n gasal → $W = \{yP_{11}, yP_{21}, \ldots, yP_{i1}, \ldots, yP_{n1}, yP_{n2}\}, i = 1, \ldots, n$

yp_{n2} dapat diganti yP_{i2}, terdapat sepasang / 2 *vertex* dalam satu path pada satu daun kincir

Resolving set dari G

n genap → $W = \{yP_{11}, yP_{21}, \ldots, yP_{i1}, \ldots, yP_{n1}, x\}$

$i = 1, \ldots, n$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

terdapat *vertex* x (*vertex* pusat kincir)

Dengan demikian kardinalitas minimum W adalah $n + 1$

Cara II:

$\dim(P_1 + nP_2) \leq \dim(G)$

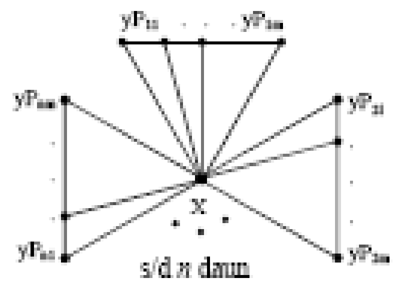
$1 + n \,.\, 1 \leq n + 1$

$n + 1 \leq n + 1$

Jadi $\dim(G) = n + 1$

4.2 Dimensi Metrik Graf Kincir dengan m, n ≥ 3

Secara umum graf kincir dengan $G_{19} = P_1 + nP_m$ dapat digambarkan seperti Gambar 4.23



Gambar 4.23 Graf Kincir $G_{19} = P_1 + nP_m$

Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $G_{19} = P_1 + nP_m$ pada Gambar 4.23 dilakukan sebagai berikut :

Cara I:

Ambil $W = \{yP_{11}, yP_{21}, \ldots, yP_{i1}, \ldots, yP_{n1}, yP_{12}, yP_{22}\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$\dim(G) = n + 2.$

Cara II:

$\dim(P_1 + nP_m) \leq \dim(G)$

$1 + n \,.\, 1 \leq n + 2$

$n + 1 \leq n + 2$

Jadi $\dim(G) = n + 2$

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5. 1. Kesimpulan

Sesuai dengan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa dimensi metrik graf kincir dengan daun bervariasi didefinisikan sebagai $G = P_1 + nP_m$, n, m bilangan bulat positif dan $n \geq 1$, $m \geq 2$, diperoleh dim(G) adalah n + 1 dan selengkapnya dapat ditabelkan sebagai berikut :

GRAF KINCIR, $G = P_1 + nP_m$			
n	m	dim(G)	*Resolving set*
Gasal	2	$n + 1$	$W = \{yP_{11}, \ldots, yP_{i1}, \ldots, yP_{n1}, yP_{n2}\}$ yP_{n2} dapat diganti yP_{12}, terdapat sepasang / 2 *vertex* dalam satu path pada 1 daun kincir
Genap	2	$n + 1$	$W = \{yP_{11}, \ldots, yP_{i1}, \ldots, yP_{n1}, x\}$ terdapat *vertex* x (*vertex* pusat kincir)
2	≥ 3	3	$W = \{yP_{11}, yP_{12}, yP_{21}\}$
$n \geq 3$	$m \geq 3$	$n + 2$	$W = \{yP_{11}, yP_{21}, \ldots, yP_{n1}, yP_{12}, yP_{22}\}$

Keterangan :

$n \geq 1$, $m \geq 2$, bilangan bulat positif

m : banyaknya *vertex* di path pada setiap daun kincir

n : banyaknya daun kincir

pemberian nomor indeks pada *vertex* di daun kincir berurutan sesuai dengan arah gerak jarum jam

5. 2. Saran

Penelitian mengenai dimensi metrik graf kincir dengan daun bervariasi ini masih ada kemungkinan bisa dikembangkan untuk bentuk modifikasi kincir yang lain.

Misalnya, $G = K_1 + nK_m$ dengan K_m adalah graf komplit dengan m *vertex*.

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

DAFTAR PUSTAKA

Bharati Rajan, Indra Rajasingh, Chris Monica M, (2005) "*On Minimum Metrik Dimension of Circulant Networks*", Department of Mathematics, Loyola College, Chennai 600 034, India, Paul Manuel, Department of Information Science, Kuwait 13060

Carmen Hernando, Merce Mora, Ignacio M. Pelayo, Carlos Seara, (2005), "*On the metrik dimension of some families of graphs*", Electronic Notes in Discrete Mathematics 22 (129-133), Departemen de Matematica Alicada I, II, III Universitat Politecnica de Catalunya Barcelona, Spain.

F. Harary dan R. Melter (1976), "*Journal On Metric Dimenstion of a Graph*"

Frank Harary, (1994), "*Graph Theory*", Addison-Wesley Publishing Company, The Advanced Book Program.

Glenn G.C. & John Gimbel, (2005), "*Bounds on the metric and partition dimensions of graph*", Departmen of Computer Science University of Alaska.

AK 99775 - 6670

Jose Careres, (2007), "*On the metric dimension on cartesion products of graphs*", Society for Industrial and Applied Mathematics.

Vol. 21, No.2, PP. 423 - 441

Robin J. Wilson & John J. Watkins, (1992), "*Graf Pengantar*", IKIP Surabaya, Buku I

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3