ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

T – 24

Aplikasi Matriks Circulant Untuk Menentukan Nilai Eigen Dari Graf Sikel (Cn)

Siti Rahmah Nurshiami dan Triyani
Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknik
Universitas Jenderal soedirman, Purwokerto
E-mail : nurshiami@yahoo.co.id

ABSTRAK. *Matriks Circulant adalah matriks berukuran n× n yang elemen baris ke-i untuk i =* 2, 3*, ..., n diperoleh dengan cara menggeser elemen-elemen baris pertama ke arah kanan sebanyak i –* 1 *langkah. Paper ini mengkaji penggunaan matriks circulant untuk menentukan nilai eigen dari graf Sikel (Cn), n* ≥ 3*.*

Kata kunci : Matriks *Circulant*, Nilai Eigen, Graf *Circulant*.

1. Pendahuluan

Graf *G* adalah suatu struktur (*V,E*) dengan *V(G)* merupakan himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dan *E(G)* merupakan himpunan pasangan tak terurut yang mungkin kosong, dari elemen-elemen di *V* yang disebut sisi. Sebuah graf sederhana *G* dapat direpresentasikan ke dalam matriks ketetanggaan, $A(G)$. Elemen-elemen dari matriks $A(G)$, yaitu a_{ij} adalah 0 atau 1, dengan $a_{ij} = 0$ bila titik v_i dan titik v_j tidak bertetangga, sedangkan $a_{ij} = 1$ bila titik v_i dan titik v_j bertetangga.

Graf yang matriks ketetanggaannya berupa matriks *circulant* disebut graf *circulant*. Salah satu jenis graf yang termasuk graf *circulant* adalah graf sikel. Nilai eigen dari graf sikel dapat ditentukan dengan mencari akar-akar dari polinom karakteristik matrik ketetanggaannya. Paper ini mengkaji cara lain menentukan nilai eigen dari graf Sikel (*Cn*), *n* ≥ 3 dengan menggunakan matriks *circulant*.

2. Tinjauan Pustaka

Suatu matriks bujur sangkar dikatakan matriks *circulant* jika elemen baris ke-i, dengan $i = 2, 3, \dots, n$ diperoleh dengan cara menggeser elemen-elemen baris pertama sebanyak $i-1$ langkah ke arah kanan. Sebagai contoh, matriks A adalah matriks *circulant.*

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

Misal $S=[s_j]$ adalah matriks *circulant* yang baris pertamanya adalah $[s_1,s_2,\cdots,s_n]$ dan W adalah matriks *circulant* yang baris pertamanya adalah $[0,1,0,\cdots,0]$.

Perhatikan bahwa

$$S=\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_n & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_{n-1} & s_n & s_1 & \cdots & s_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_1 \end{bmatrix} \text{ dan } W=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga matriks S dapat dinyatakan sebagai;

$$S=s_1\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}+s_2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}+s_3\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$+\cdots+s_n\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$=s_1\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}+s_2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$+s_3\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}+\cdots+s_n\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}^{n-1}$$

$= s_1W^0 + s_2W + s_3W^2 + \cdots + s_nW^{n-1}$, dengan $W^0 = I$

$$= \sum_{j=1}^{n} s_j W^{j-1}$$

Menurut [3] nilai eigen matriks $W_{n\times n}$ untuk $n \geq 2$ dengan menggunakan *"nth roots of unity"* adalah $1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$, dengan $\omega = e^{2\pi i/n}$.

Proposisi 1 [2]

Jika S adalah matriks *circulant* berukuran $n \times n$, dengan $[s_1,\ s_2,\ s_3,\ \cdots,\ s_n]$ merupakan baris pertama dari matriks S, maka nilai eigennya adalah

$$\lambda_r = \sum_{j=1}^{n} s_j \omega^{(j-1)r},$$

dengan $\omega = e^{2\pi i/n}$, dan vektor eigen ke-r yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah $\mathbf{u}_r = \left[1, \omega^r, \omega^{2r}, \cdots, \omega^{(n-1)r}\right]^T$, untuk setiap $r = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

Bukti:

Diketahui S adalah matriks *circulant* berukuran $n \times n$, dan $\mathbf{u}_r$ adalah vektor eigen ke-r yang bersesuaian dengan nilai eigen λ, dimana $\mathbf{u}_r = \left[1, \omega^r, \omega^{2r}, \cdots, \omega^{(n-1)r}\right]^T$ untuk setiap $r = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, maka $S\mathbf{u}_r = \lambda_r\mathbf{u}_r,\ \mathbf{u}_r \neq \mathbf{0}$.

Perhatikan bahwa

$$S\mathbf{u}_r = \lambda_r\mathbf{u}_r$$

$$\begin{bmatrix}s_1&s_2&s_3&\cdots&s_n\\s_n&s_1&s_2&\cdots&s_{n-1}\\s_{n-1}&s_n&s_1&\cdots&s_{n-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\s_2&s_3&s_4&\cdots&s_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\\omega^r\\\omega^{2r}\\\vdots\\\omega^{(n-1)r}\end{bmatrix} = \lambda_r\begin{bmatrix}1\\\omega^r\\\omega^{2r}\\\vdots\\\omega^{(n-1)r}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 + s_2\omega^r + s_3\omega^{2r} + \cdots + s_n\omega^{(n-1)r} \\ s_n + s_1\omega^r + s_2\omega^{2r} + \cdots + s_{n-1}\omega^{(n-1)r} \\ s_{n-1} + s_n\omega^r + s_1\omega^{2r} + \cdots + s_{n-2}\omega^{(n-1)r} \\ \vdots \\ s_2 + s_3\omega^r + s_4\omega^{2r} + \cdots + s_1\omega^{(n-1)r} \end{bmatrix} = \lambda_r \begin{bmatrix} 1 \\ \omega^r \\ \omega^{2r} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 + s_2\omega^r + s_3\omega^{2r} + \cdots + s_n\omega^{(n-1)r} \\ s_1\omega^r + s_2\omega^{2r} + \cdots + s_{n-1}\omega^{(n-1)r} + s_n \\ s_1\omega^{2r} + \cdots + s_{n-2}\omega^{(n-1)r} + s_{n-1} + s_n\omega^r \\ \vdots \\ s_1\omega^{(n-1)r} + s_2 + s_3\omega^r + s_4\omega^{2r} + \cdots + s_n\omega^{2(n-1)r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_r \\ \lambda_r\omega^r \\ \lambda_r\omega^{2r} \\ \vdots \\ \lambda_r\omega^{(n-1)r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} s_j\omega^{(j-1)r} \\ \sum_{j=1}^{n} s_j\omega^{jr} \\ \sum_{j=1}^{n} s_j\omega^{(j+1)r} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} s_j\omega^{(j+n-2)r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_r \\ \lambda_r\omega^r \\ \lambda_r\omega^{2r} \\ \vdots \\ \lambda_r\omega^{(n-1)r} \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} s_j\omega^{(j-1)r} \\ \sum_{j=1}^{n} s_j\omega^{(j-1)r} \\ \sum_{j=1}^{n} s_j\omega^{(j-1)r} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} s_j\omega^{(j-1)r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_r \\ \lambda_r \\ \lambda_r \\ \vdots \\ \lambda_r \end{bmatrix}$$

Jadi nilai eigen ke- r dari matriks S adalah

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$\lambda_r = \sum_{j=1}^{n} s_j \omega^{(j-1)r},$$

untuk setiap $r = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. ■

Suatu graf dikatakan reguler berderajat *r* (*r*-reguler) jika untuk setiap titiknya mempunyai derajat *r*. Misalkan *G* = (*V*, *E*) adalah graf sederhana dengan *n* titik dan *m* sisi. Matriks ketetanggaan dari graf *G* adalah matriks $A_{n\times n} = A(G)$ dengan entri

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{jika } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0, \text{jika } (v_i, v_j) \notin E(G). \end{cases}$$

Suatu graf G dikatakan graf *circulant* apabila matriks ketetanggaannya merupakan matriks *circulant*. Jika baris pertama matriks ketetanggaan dari graf *circulant* adalah $a_1, a_2, \cdots, a_n$, maka $a_1 = 0$ dan $a_i = a_{n-i+2}$ untuk $i = 2,3, \cdots, n$. Salah satu graf reguler dan graf *circulant* adalah graf Sikel. Sebagai contoh, matriks ketetanggaan dari graf C_3 adalah

$$A(C_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposisi 2 [1]

Jika G adalah graf k-reguler dengan n titik maka:

i. k adalah nilai eigen dari G,

ii. untuk setiap nilai eigen λ dari G, berlaku $|\lambda| \leq k$.

Proposisi 3 [1]

Misalkan $[0, a_2, \cdots, a_n]$ adalah baris pertama dari matriks ketetanggaan pada graf *circulant* G. Maka nilai eigen dari graf G adalah

$$\lambda_r = \sum_{j=2}^{n} a_j \omega^{(j-1)r}$$

untuk setiap $r = 0, 1, \cdots, n-1$ dengan $\omega = e^{2\pi i/n}$

Bukti:

Diketahui G adalah graf *circulant* dan A adalah matriks ketetanggaan dari graf G.

Perhatikan bahwa

$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & 0 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

dengan mengasumsikan matriks $A=S$ sehingga menurut proposisi 1, diperoleh nilai eigen ke-r dari graf G adalah

$$\lambda_r=\sum_{j=1}^{n} a_j\omega^{(j-1)r}$$

$$=a_1\omega^{0.r}+a_2\omega^{1.r}+a_3\omega^{2.r}+\cdots+a_n\omega^{(n-1).r}$$

Karena $a_1=0$ maka

$$\lambda_r=\sum_{j=2}^{n} a_j\omega^{(j-1)r}$$

untuk setiap $r=0,1,\cdots,n-1$. ■

3. Pembahasan

Matriks ketetanggaan dari graf C_n adalah

$$A(C_n)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

dengan $[0,1,0,\cdots,0,1]$ baris pertama dari graf *circulant* C_n. Misal terdapat matriks $W_{n\times n}$ dengan nilai eigen dari matriks $W_{n\times n}$ adalah 1, $\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$, dengan $\omega=e^{2\pi i/n}$ dan n merupakan banyaknya titik pada graf C_n. Sehingga berdasarkan proposisi 3 diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda_r=\sum_{j=2}^{n} a_j\omega^{(j-1)r} \quad \text{untuk setiap } r=0,1,\cdots,n-1.$$

Perhatikan bahwa

$$\lambda_0 = \sum_{j=2}^{n} a_j \omega^{(j-1)0} = a_2\omega^0 + a_n\omega^0 = 1 + 1 = 2$$

$$\lambda_1 = \sum_{j=2}^{n} a_j \omega^{(j-1)1} = a_2\omega^1 + a_n\omega^{n-1} = 1.\omega + 1.\omega^{n-1} = \omega + \omega^n.\omega^{-1}$$

$$= \omega + \omega^{-1} = e^{2\pi i/n} + e^{-2\pi i/n} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

$$\lambda_2 = \sum_{j=2}^{n} a_j \omega^{(j-1)2} = a_2\omega^2 + a_n\omega^{(n-1)2} = 1.\omega^2 + 1.\omega^{2(n-1)}$$

$$= \omega^2 + \omega^{2n}.\omega^{-2} = \omega^2 + \omega^{-2} = \left(e^{2\pi i/n}\right)^2 + \left(e^{2\pi i/n}\right)^{-2} = 2\cos\left(\frac{2.2\pi}{n}\right).$$

$$\lambda_3 = \sum_{j=2}^{n} a_j \omega^{(j-1)3} = a_2\omega^3 + a_n\omega^{(n-1)3} = 1.\omega^3 + 1.\omega^{3(n-1)}$$

$$= \omega^3 + \omega^{3n}.\omega^{-3} = \omega^3 + \omega^{-3} = \left(e^{2\pi i/n}\right)^3 + \left(e^{2\pi i/n}\right)^{-3} = 2\cos\left(\frac{3.2\pi}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{n-1} = \sum_{j=2}^{n} a_j \omega^{(j-1)n-1} = a_2\omega^{(n-1)} + a_n\omega^{(n-1)^2} = 1.\omega^{n-1} + 1.\omega^{(n-1)(n-1)}$$

$$= \omega^{n-1} + \omega^{n(n-1)}.\omega^{-(n-1)} = \omega^{n-1} + \omega^{-(n-1)}$$

$$= \left(e^{2\pi i/n}\right)^{n-1} + \left(e^{2\pi i/n}\right)^{-(n-1)} = 2\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Sehingga nilai eigen ke-r dari graf sikel $(C_n), n \geq 3$ diperoleh

$$\lambda_r = 2\cos\frac{2\pi r}{n},$$

untuk setiap $r = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

Selain itu, karena graf sikel merupakan graf *reguler* berderajat 2 maka menurut proposisi 2 nilai eigen λ_r dari graf sikel $(C_n), n \geq 3$, $|\lambda_r| \leq 2$, $r = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

4. Kesimpulan

Berdasarkan dari hasil pembahasan maka dapat disimpulkan bahwa nilai eigen dari graf sikel (C_n), $n \geq 3$ dengan menggunakan matriks *circulant* adalah $\lambda_r = 2\cos\frac{2\pi r}{n}$, dan $|\lambda_r| \leq 2$ untuk setiap $r = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Biggs, Norman. 1993. *Algebraic Graph Theory*. Second Edition. Cambridge University Press, New York.

[2] Bronson, Richard. 1989. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrix Operations.* McGraw-Hill, Inc, Amerika.

[3] Frank, Dave. *Circulant Matrices and Polynomial*. http://online.redwood.cc.ca.us/instruct/darnold/laproj/Fall2002/dfrank/paper.pdf.

[4] Kolman, Bernard. 1997. *Introductory Linear Algebra with Applications.* 6th Edition. New Jersey, Prentice-Hall.

[5] Rosen, H. K. 2003. *Discrete Mathematics and Its Applications, 5th ed.* Singapura, McGraw-Hill Book Co.

[6] Wilson, Robin J. and John J. Watkins. 1990. *Graph An Introductory Approach: A First Course in Discrete Mathematics.* John Willey & Sons, Inc, New York.