 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

T – 13

Teori dan Aplikasi Optimisasi Dalam Masalah Strategi Vaksinasi

Jonner N[1], Sudradjat[2], D. Chaerani[3], dan R. E. Siregar[4]
[1]Mahasiswa S3 Matematika Universitas Padjajaran Bandung Indonesia,
[2,3]Jurusan Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran Bandung Indonesia
[4]Jurusan Fisika FMIPA Universitas Padjajaran Bandung Indonesia
[1]jonn_cesil@yahoo.co.id, [2]adjat03@yahoo.com, [3]d.chaerani@unpad.ac.id, [4]rustam_siregar@yahoo.com

Abstrak

Paper ini membahas teori dan aplikasi bidang matematika riset operasi dan optimisasi pada masalah strategi vaksinasi dari kajian literatur hasil penelitian Hethcote dan Waltman (1973), Tanner dkk. (2008), Zaman dkk. (2008) dan beberapa hasil penelitian lainnya. Fokus utama pembahasan paper ini adalah memberikan argumentasi untuk menjamin pentingnya pemodelan optimisasi dalam masalah matematika epidemiologi, dengan topik kajian yang spesifik dalam masalah penentuan strategi vaksinasi yang optimal. Untuk memberikan pemahaman yang lebih baik tentang penentuan strategi vaksinasi, pada akhir pembahasan paper ini, disajikan aplikasi teori riset operasi dan optimisasi matematika epidemiologi pada penyakit tuberkulosis dari hasil penelitian Revelle dkk. (1969).
Kata kunci: optimisasi, strategi vaksinasi, matematika epidemiologi.

1. Pendahuluan

Pengembangan teknik optimisasi pada masalah Pemrograman Non-linear (PNL) pertama diusulkan oleh Kuhn dan Tucker yang mengemukakan teorema syarat perlu dan cukup penyelesaian optimal. PNL dikembangkan secara mendalam oleh Rockafeller, Wolve dan Cottle.

Selanjutnya pengembangan teknik optimisasi cukup pesat dengan ditemukannya Metode Simpleks oleh Dantzig pada tahun 1947 yang digunakan untuk menyelesaikan masalah Pemrograman Linear. Sejalan dengan berkembang teknologi komputer, teori dan aplikasi optimisasi semula hanya dapat diselesaikan secara analitik, pada tahun 1960 teknik optimisasi semakin berkembang setelah masalah optimasi tanpa kendala dapat diselesaikan menggunakan program komputer (Dantzig, 2002). Masalah Pemrograman Linear dapat diaplikasikan pada kesehatan masyarakat (Moreira, 2003). Pentingnya optimisasi pada epidemiologi yaitu untuk menentukan solusi model optimisasi strategi penanggulangan epidemik.

Model epidemik tipe *SIR* telah dibahas dalam penelitian Kermack dan McKendrick (1927). Hethcote dan Waltman (1973) mengembangkan dari model tipe *SIR* (Kermack dan McKenderick, 1927) memformulasikan suatu model epidemik deterministik dengan adanya faktor vaksinasi atau pengontrolan suatu epidemik.

Sedangkan Becker dan Starczak (1997) mengkonstruksi model efektifitas pelaksanaan program vaksinasi untuk mengendalikan penyebaran suatu penyakit pada komunitas rumah tangga-rumah tangga. Tanner dkk. (2008) mengembangkan model Becker dan Starczak (1997) pada rumah tangga- rumah tangga dengan parameter taktentu.

Aplikasi model optimisasi pada vaksinasi pada suatu penyakit telah dikaji oleh Matrajt dan Longini (2009), serta Patel dkk. (2005) mengkaji model vaksinasi untuk mengendalikan endemik influenza dengan persediaan vaksin yang terbatas. Selanjutnya Revelle dkk. (1969), memformulasikan model optimisasi untuk menanggulangi penyebaran penyakit tuberkulosis, dengan memberikan faktor vaksinasi, pengobatan dan pemberian obat sebelum terinfeksi (*prophylaxis*).

Masalah dalam paper ini adalah membahas pentingnya model optimisasi untuk mengembangkan teknik penyelesaian masalah epidemiologi khususnya masalah penentuan strategi vaksinasi. Sehingga tujuan paper ini adalah untuk menentukan solusi optimal dari model strategi vaksinasi untuk menanggulangi penyebaran suatu penyakit menular. Berdasarkan argumentasi tentang pentingnya pemodelan optimisasi pada penentuan strategi vaksinasi yang optimal dapat bermanfaat sebagai ide bahan kajian untuk penelitian berikutnya khususnya masalah optimisasi vaksinasi.

2. Teori Model Optimisasi

Untuk menyelesaikan solusi dari suatu model optimisasi memerlukan suatu teknik optimisasi. Berikut dijelaskan secara singkat teknik optimisasi: Pemrograman Linear, Pemrograman Non-linear, metode Lagrange, dan metode *steepest descent*.

Pemrograman Linear (Dantzig, 2002)

Masalah PL mulai berkembang setelah Dantzig pada tahun 1947 menemukan metode simpleks untuk menyelesaikan masalah PL (Dantzig, 2002). Perumusan masalah pada Pemrograman Linear ada tiga hal penting yang diperhatikan: (a) variabel keputusan, yaitu unsur-unsur dalam persoalan yang dapat dikendalikan oleh pengambil keputusan, (b) fungsi tujuan, yaitu penetapan tujuan untuk membantu mengambil keputusan, (c) fungsi kendala, yaitu batasan alternatif sumber daya yang tersedia. Formulasi model matematis dari suatu masalah (Hillier 1990), yaitu mengalokasikan sumber daya pada kegiatan-kegiatan, dengan memilih nilai-nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (variabel keputusan) sedemikian sehingga masalah PL di atas terdiri dari n variabel dengan m kendala dan dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\text{maks } c^T x \qquad (1)$$

s.t $Ax \le b$ (2)

$x \ge 0$ (3)

dimana

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Jika suatu masalah pemrograman yang tidak linear biasanya disebut Pemrograman Non-linear.

Pemrograman Non-linear

Metode Pemrograman Non-linear (PNL) digunakan untuk menentukan penyelesaian masalah optimisasi dengan fungsi objektif atau fungsi kendala yang nonlinear. Untuk menyelesaikan suatu masalah PNL dengan secara efisien diperlukan suatu algoritma penyelesaian sesuai dengan masalahnya. Salah satu algoritma yang memuat langkah-langkah sistematis dan efisien seperti pada masalah optimisasi tanpa kendala, yang memuat suatu iterasi, kemudian menggunakan pendekatan kuadratik atau sesuai untuk masalah awalnya (Hillier, 1990).

Secara umum PNL didefinisikan sebagai berikut (Bazzara, 1990)

min $f(x)$ (4)

s.t $g_i(x) \le 0, \ i = 1,2,3,\ldots,m$

$h_j(x) = 0, \ j = 1,2,\ldots,p$ (5)

dimana $x = (x_1, x_2,\ldots,x_n) \in R^n$ adalah variabel keputusan, f adalah fungsi tujuan, dan g_i dan h_j adalah fungsi kendala. Metode simpleks tidak efisien digunakan untuk menyelesaikan masalah PNL, sehingga untuk menyelesaikan masalah PNL diperlukan metode penyelesaian lain. Beberapa metode optimisasi sudah ditemukan untuk menyelesaikan masalah PNL antara lain Metode Lagrange dan Metode *Steepest Descent*.

Metode Lagrange

Metode Lagrange yang ditemukan oleh Joseph Louis Lagrange, memberikan suatu metode alternatif untuk menyelesaikan masalah PNL dengan adanya kendala (Luenberger, 1984). Salah satu metode dengan menggunakan persamaan Lagrange untuk menyelesaikan masalah PNL yaitu dengan Metode *Kuhn-Tucker* (Bazaraa, 1990). Karena adanya dua jenis bentuk fungsi kendala yang berbeda, maka masalah optimisasi

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

PNL tersebut menjadi sulit untuk diselesaikan. Penggunaan teori yang dibangun oleh H.W Kuhn dan A.W.Tucker dapat diselesaikan dengan menggunakan teorema berikut.

Teorema 1. *Kondisi perlu Kuhn-Tucker* (Bazzara, 1990)

Masalah optimisasi dengan fungsi kendala pertidaksamaan dan persamaan di atas, misalkan fungsi-fungsi f(x), $g_i(x)$, $h_j(x)$ adalah fungsi kontinu dan terdiferensial. Misalkan juga $\hat{x}$ adalah titik feasible yang merupakan penyelesaian (4) *dan* (5) *secara lokal dan vektor gradien $\Delta g_i(\hat{x})$ untuk $i \in B = \{i : g_i(\hat{x}) = 0\}$ dan $\Delta h_j(\hat{x})$ saling bebas linear. Maka terdapat skalar λ_i, μ_j sedemikian sehingga*

$$\nabla f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla h_j(\hat{x}) = 0 \qquad (6)$$

$$\lambda_i g_i(\hat{x}) = 0,\ i = 1, \cdots, m \qquad (7)$$

$$\lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m \qquad (8)$$

dengan kendala

$$g_i(\hat{x}) \leq 0,\ i = 1, \cdots, m, \quad h_j(\hat{x}) = 0,\ j = 1, \cdots, p. \qquad (9)$$

Dari persamaan (4) dan (5) dapat didefinisikan persamaan Lagrange sebagai berikut:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x) \qquad (10)$$

dimana $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ dan $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$.

Selanjutnya untuk menyelesaikan masalah optimisasi tanpa kendala dengan menggunakan metode *Steepest Descent* diungkapkan secara singkat sebagai berikut.

Metode *Steepest Descent*

Metode *steepest descent* digunakan dalam algoritma dengan metode *exact line search* untuk menentukan panjang langkah optimum pada setiap iterasi. Metode *steepest descent* terkait dengan gradient suatu fungsi yang menentukan kecepatan pencapaian solusi optimal. Pada metode ini digunakan negatif dari vektor gradien sebagai arah proses minimisasi seperti yang diperkenalkan oleh Cauchy pada tahun 1847 (Bazaraa, 1990), dalam metode ini mulai dengan sebuah titik awal percobaan x_1, kemudian secara iteratif mencari titik optimum berdasarkan aturan

$$x_{i+1} = x_i + \lambda_i^* d_i = x_i - \lambda_i^* \nabla f_i$$

dimana λ_i^* adalah panjang langkah optimal sepanjang arah pencarian $d_i = -\nabla f_i$.

Metode *Steepest descent* dikembangkan ke suatu jumlah langkah baru *metode steepest descent* oleh Ya-xiang Yuan (2006). Metode ini mencari jalur yang lebih cepat, dapat memperoleh solusi optimal hanya dalam 3 iterasi pada dimensi dua. Selanjutnya diungkapkan pentingnya optimisasi pada epidemiologi.

Pentingnya Optimisasi dalam Matematika Epidemik

Pentingnya masalah optimisasi secara teoritis yaitu untuk menentukan solusi optimal dari suatu fungsi tujuan yang dibatasi oleh kendala-kendala, sedangkan dalam masalah epidemiogi yaitu untuk mengoptimalkan penanggulangan penyebaran penyakit dan menghemat biaya penanggulangan penyebaran penyakit. Paper ini menyajikan secara singkat perkembangan teori optimisasi yang banyak digunakan dalam masalah matematika epidemiologi. Perkembangan teori optimisasi dapat dilihat seperti pada Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Perkembangan Teori Optimisasi dalam Masalah Matematika Epidemiologi

Year	Author	Article Title	The Publisher
2010	Matrajt dan Longini	Optimizing Vaccine Allocation at Different Points in Time During an Epidemic	PLoS ONE, 5:11, 1-11.
2008	Tanner dkk.	Finding Optimal Vaccination Strategies under Parameter Uncertainty using Stochastic Programming	Mathematical Biosciences 215:144-151.
	Zaman dkk.	Stability analysis and optimal vaccination of an SIR epidemic model	BioSystems 93, 240–249.
2005	Patel dkk.	Strategi Vaksinasi Optimal pada Endemik Influenza dengan Menggunakan Algoritma Genetik	Theoretical Biology 234 (2005) 201–212.
2002	Goldmann dan Lightwood	Cost Optimization in the SIS Model of Infectious Disease with Treatment	Topics in Economic Analysis & Policy, 2(1), 1-22.
1997	Becker dan Starczak	Optimal Vaccination Strategies for a Community of Household	Mathematical Biosciences 139(2): 117-132.
1973	Hethcote dan Waltman	Optimal Vaccination Schedules in a Determinstic Epidemic Model	Mathematical Biosciences 18: 365-381.
1969	Revelle dkk.	An Optimization Model of Tuberculosis Epidemiology	Management Science. vol. 16, no. 4;B-1990-B.221.

Untuk mencegah terinfeksi dari suatu penyakit menular salah satunya dengan melakukan vaksinasi. Untuk mengoptimalkan suatu model vaksinasi diperlukan metode penyelesaian. Penyelesaian suatu model optimisasi menggunakan teknik optimisasi. Berikut diungkapkan perkembangan model, kajian dan teknik optimisasi pada epidemiologi khususnya pada masalah vaksinasi seperti pada Tabel 2.

Tabel 2. Perkembangan Model, Kajian dan Teknik Optimisasi pada Epidemiologi

Peneliti (Tahun)	Variabel Keputusan (VK) Fungsi Objektif, dan Fungsi Kendala	Kajian	Teknik Optimisasi
Matrajt dan Longini (2010)	FK : Kolompok umur min : Jumlah kematian atau rawat inap masing-masing kelompok s.t : Persediaan vaksin terbatas.	1. *The reproduction* vaksin 2. Menentukan stategi vaksinasi optimal 3. Menentukan distribusi vaksin yang optimal 4. Memprioritaskan vaksinasi pada kelompok umur yang lebih rentan terinfeksi H1N1 dan influenza.	1.*Line search optimization algorithm* 2. Analisis sensitifitas.
Tanner dkk. (2008)	FK: Proporsi keluarga-keluarga tipe *f* yang divaksinasi min : *Coverage* vaksin s.t : 1. Jumlah total proporsi keluarga-keluarga tipe *f* yang divaksinasi sama dengan satu 2. *The reproductive number* setelah vaksinasi ≤ 1.	1. Memformulasikan penentukan kebijakan biaya vaksinasi yaitu minimum peluang kendala yang harus memenuhi bahwa probabilitas ($R_* \leq 1) > \alpha$, dimana R_* adalah *the reproduction number* vaksinasi, dan α adalah suatu parameter. 2. Formulasi model optimisasi vaksinasi apabila persediaan vaksin terbatas tetapi peluang vaksinasi masih dapat mengontrol penyebaran penyakit. 3. Analisis biaya dengan α sebagai suatu variabel *instead* dari suatu parameter.	1. Pemrograman Stokastik 2. Program *mixed-integer* 3. Numerik.
Zaman dkk. (2008)	FK : *S, I, R* min: Jumlah kompartemen *S, I* s.t : Sistem dinamik tipe *SIR* dengan faktor vaksinasi, $S(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$, $R(0) \geq 0$.	1. Analisis kestabilan titik ekuilibrium 2. *The basic reproductin ratio* dan *the basic reproduction* vaksin 3. Teorema eksistensi kontrol optimum dan eksistensi variabel *adjoint* dengan kondisi *transversality.*	1.Kontrol optimum dengan Prinsip Maksimum Pontryagin 2.Numerik.
Patel dkk. (2005)	FK: n_i = Jumlah kelompok v_i = Jumlah yang divaksinasi masing-masing kelompok min : Jumlah masing-masing kelompok untuk divaksinasi s.t : Jumlah vaksin yang didistribusikan terbatas.	1.Model vaksinasi untuk mengendalikan endemik influenza dengan persediaan vaksin yang terbatas 2. Aplikasi AG dan RMHC dapat menentukan jumlah vaksin yang optimal dengan pendekatan suatu distribusi 3. Distribusi vaksin yang optimal, dengan jumlah dosis terbatas berada kisaran 10-90% dari populasi.	1.Simulasi stokastik, 2.Algoritma Genetika (AG), 3.Random *mutation hill climbing* (RMHC).
Goldmann dan Lightwood (2002)	VK: *S,I* min : Jumlah terinfeksi dan biaya s.t : Persamaan terinfeksi.	1.Model penyebaran epidemik tipe *SIS* dengan faktor pengobatan. 2. Solusi model epidemik tipe *SIS* secara analitik. 3. Merumuskan model optimisasi pengobatan suatu penyakit tipe *SIS* dengan kalkulus variasi.	1.Prinsip maksimum 2.Numerik.
Becker dan Starczak (1997)	FK: *S,V,I,R* min: Alokasi vaksinasi minimum s.t : *The reproduction* vaksinasi sama dengan satu.	1. *The reproduction number* untuk rumah tangga-rumah tangga yang terinfeksi dengan faktor vaksinasi dan tanpa vaksinasi. 2. Model strategi vaksinasi yang optimal untuk pencegahan epidemik pada rumah tangga-rumah tangga. 3. Perhitungan alokasi vaksinasi pada	Pemrograman Linear.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

		rumah tangga-rumah tangga.	
Hethcote dan Waltman (1973)	VK: Kompartemen *S, V, I, R* min: Mencari tingkat vaksinasi suatu epidemik dengan biaya penanggulangan yang minimum s.t : 1.Jumlah maksimum *I* di setiap waktu . 2.Jumlah individu yang sedang dan pernah terinfeksi pada [$0,T$] dinotasikan $R(T) + I(T)$.	1. Mengembangkan model epidemik tipe *SIR* dengan menambahkan faktor vaksiansi. 2. Merumuskan model deterministik dari epidemik sebagai persamaan diferensial yang bergantung terhadap waktu. 3. Model untuk menentukan tingkat vaksinasi dengan biaya yang minimum.	1.Pemrograman Dinamik 2. Metode Runge-Kutta orde empat.
Revelle dkk. (1969)	VK: Kompartemen S, V, E_1, E_2, E_3, E_4, I, R_1, R_2. min: Jumlah individu yang terinfeksi dan biaya s.t : Sistem dinamik tuberkulosis, $v_S \leq S_0$, dan $v_j \leq \Lambda_j$.	Model optimisasi penanggulangan penyakit yang dapat digunakan sebagai acuan informasi untuk mengefisienkan penanggulangan penyakit tuberkulosis.	1.Analitik 2.Pemrograman Linear.

Diskusi

Berdasarkan hasil-hasil penelitian pada Tabel 2, sebagian besar kajian model penelitian tentang optimisasi vaksinasi berbeda-beda, bergantung pada kompartemen pada populasi, parameter, host, faktor demografi dan penyebaran penyakit yang dikaji. Teknik penyelesaian masalah optimisasi juga bergantung dari karakteristik model yang dikaji. Penyelesaian model optimal kontrol dari sistem dinamik pada umumnya menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Model optimisasi dalam bidang Riset Operasi antara lain Pemrograman Linear, Pemrograman Nonlinear, Pemrograman Stokastik, dapat digunakan untuk melengkapi pengembangan teknik dalam penyelesaian sistem dinamik epidemiologi yaitu untuk menentukan solusi optimal dari model yang dikaji. Dari beberapa hasil penelitian pada Tabel 2 dapat diberikan argumentasi berikut.

Hasil penelitian Revelle dkk. (1969) yang mengkonstruksi model optimisasi penanggulangan penyakit tuberkulosis dengan menggunakan metode Pemrograman Linear, dalam penyelesaian model dinamik dengan mengasumsikan, diketahui jumlah rata-rata individu yang terinfeksi tiap-tiap periode waktu. Penyelesaian model tersebut masih mengandung variansi, oleh karena itu perlu dicari solusi pendekatan yang lebih eksak dari model dinamik tuberkulosis, sehingga dapat diperoleh model yang mempunyai validitas dan reliabilitas yang lebih tinggi.

Hasil penelitian Hethcote dan Waltman (1973) mengkonstruksi model epidemik deterministik untuk menentukan biaya vaksinasi optimal. Model penyebaran penyakit menular yang dikaji oleh Hethcote dan Waltman (1973) belum memperhatikan vektor dan faktor demografi. Sedangkan kenyataan di lapangan penyebaran penyakit selalu dipengaruhi oleh vektor dan faktor demografi, oleh karena itu agar model lebih realistis dengan keadaan di lapangan pada sistem dinamika model perlu ditambah vektor dan faktor demografi.

Kemudian dari hasil penelitian Tanner dkk. (2008) menentukan strategi vaksinasi optimal dengan parameter tak tentu dan menggunakan metode Pemrograman Stokastik. Karena sulitnya memperoleh keakuratan estimasi parameter pada model epidemik, sehingga untuk dapat memperoleh parameter yang lebih akurat perlu dikembangkan validasi model vaksinasi dengan simulasi.

Selanjutnya dari hasil penelitian Zaman dkk. (2008) menganalisis stabilitas dan vaksinasi optimal pada model epidemik tipe *SIR*. Penyelesaian model kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Model tersebut dapat diselesaikan dengan metode eksak dalam bentuk suatu deret eksponensial dalam waktu t, sehingga dapat dibandingkan hasil dari kedua teknik optimisasi tersebut yang mana lebih realistis dengan kenyataan di lapangan.

4. Model Optimisasi Epidemiologi Tuberkulosis

Aplikasi optimisasi matematika epidemiologi pada paper ini yaitu menentukan strategi penanggulangan penyakit tuberkulosis yang dikaji oleh Revelle (1969), yang dikembangkan dari model Kermack dan McKendrikck (1973). Strategi yang dimaksud dalam penelitian Revelle dkk. (1969) adalah menentukan alokasi jumlah individu yang seharusnya divaksinasi tiap tahun pada suatu populasi. Kebaruan yang ditemukan oleh Revelle dkk. (1969) adalah formulasi model optimisasi penanggulangan tuberkulosis dengan metode Pemrograman Linear, dimana sebelumnya model tersebut belum pernah dikaji oleh peneliti yang lain. Periode waktu dibagi dalam interval tiap tahun, persamaannya dinyatakan dengan laju masing-masing kompartemen terhadap waktu t dalam tahun, adapun persamaan dinamik epidemiologi tuberkulosis dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan berikut (Revelle, 1969).

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N_j} + \Lambda_j - \mu S - v_j - v_s \qquad (11)$$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\beta VI}{N_j} - \mu v + v_j + v_s \quad (12)$$

$$\frac{dE_1}{dt} = \frac{\beta SI}{N_j} - m_A E_1 - \mu E_1 - g_j \quad (13)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = \frac{\beta VI}{N_j} - m_B E_2 - \mu E_2 - k_j \quad (14)$$

$$\frac{dR_1}{dt} = \gamma I - m_C R_1 - \mu R_1 \quad (15)$$

$$\frac{dE_3}{dt} = g_j - m_D E_3 - \mu E_3 \quad (16)$$

$$\frac{dE_4}{dt} = k_j - m_E E_4 - \mu E_4 \quad (17)$$

$$\frac{dR_2}{dt} = f_j I - m_F R_2 - \mu R_2 \quad (18)$$

$$\frac{dI}{dt} = m_A E_1 + m_B E_2 + m_C R_1 + m_D E_3 + m_E E_4 + m_F R_2 - \gamma I - \alpha I - R_{1j}. \quad (19)$$

Perubahan jumlah populasi terhadap waktu t adalah

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu(N - I) - \alpha I, \quad (20)$$

Keterangan:

Notasi	Deskripsi
E_1	Kompartemen *exposed* tanpa vaksinasi
E_2	Kompartemen *exposed* dengan faktor vaksinasi
E_3	Kompartemen *exposed* tanpa faktor vaksinasi dengan *prophylaxis*
E_4	Kompartemen *exposed* dengan vaksinasi dan tanpa *prophylaxis*
R_1	Kompartemen *recovery* tanpa pengobatan
R_2	Kompartemen *recovery* dengan perlakuan kemoterapi
f_j	Jumlah individu R_2 dengan faktor kemoterapi selama interval j; f_j dari R_2 ke I sebagai variabel kontrol
g_j	Jumlah individu E_1 dengan faktor *prophylaxis* selama interval j; g_j dari E_1 ke E_3 sebagai variabel kontrol
m_A	Laju perpindahan dari E_1 ke I
m_B	Laju perpindahan dari E_2 ke I
m_C	Laju perpindahan dari R_1 ke I
m_D	Laju perpindahan dari E_3 ke I
m_F	Laju perpindahan dari R_2 ke I
m_G	Laju perpindahan dari E_4 ke I
α	Laju meninggal individu kompartemen terinfeksi
v_j	Jumlah individu yang baru lahir yang divaksinasi pada interval ke j sebagai variabel kontrol
v_s	Jumlah individu V yang divaksinasi secara massal pada awal tahun pertama, sebagai variabel kontrol

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Model Optimisasi dari Model Revelle (1969)

Jumlah individu yang divaksinasi secara massal pada tahun pertama adalah v_s dengan c_m adalah biaya vaksinasi perindividu dalam satu kali vaksinasi, sehingga biaya total vaksinasi massal adalah $c_m.v_s$. Variabel v_s, nol untuk setiap tahunnya kecuali pada tahun pertama. Jumlah vaksinasi pada tahun ke j adalah v_j dengan biaya vaksinasi perindividu satu kali vaksinasi adalah c_v, sehingga besarnya biaya vaksinasi pada tahun ke j adalah $c_v.v_j$.

Sedangkan jumlah individu dengan perlakuan *prophylaxis* pada tahun ke j adalah g_j dengan biaya *prophylaxis* perindividu satu kali *prophylaxis* adalah c_g, sehingga besarnya biaya *prophylaxis* pada tahun ke j adalah $c_g.g_j$.

Banyaknya yang dirawat pada tahun ke j adalah f_j, dengan biaya perawatan per individu yang terinfeksi sebesar c_f, maka jumlah biaya perawatan pada tahun ke j adalah $c_f.f_j$. Total biaya selama n tahun adalah

$$c_m.v_s + c_v \sum_{j=1}^{n} v_j + c_g \sum_{j=1}^{n} g_j + c_k \sum_{j=1}^{n} k_j + c_f \sum_{j=1}^{n} f_j. \qquad (21)$$

Masalah optimisasi vaksinasi pada penyakit TB, yaitu dengan meminimumkan persamaan (21) untuk tiap-tiap tahun, yaitu (Revelle dkk., 1969):

$$\min c_m.v_s + c_v \sum_{j=1}^{n} v_j + c_g \sum_{j=1}^{n} g_j + c_k \sum_{j=1}^{n} k_j + c_f \sum_{j=1}^{n} f_j. \qquad (22)$$

s.t $A_j z_j = w_j$, $j = 1, 2, ..., n$, $z_j \geq 0$

$v_j \leq \Lambda_j$, dimana Λ_j = kelahiran ke j, $j = 1, 2, ..., n$ $\qquad v_s \leq S_0$,

dimana A_j = koefisien matriks sisi kiri, tahun ke j dari penyelesaian persamaan (11) – (19), dan w_j = sisi kanan tahun ke j dari penyelesaian persamaan (11) – (19).

Pada perhitungan numerik dalam paper ini, untuk menanggulangi penyakit tuberkulosis hanya dengan memperhatikan faktor vaksinasi. Berdasarkan persamaan (11) – (19) dengan nilai awal dan nilai parameter sebagai berikut: N_0 = 1.000.000, S_0 = 200.000, V_0 = 200.000, E_{10} = 200.000, E_{20} = 200.000, E_{30} = 30.000, E_{40} = 30.000, R_{10} = 50.000, R_{20} = 68.000. Sedangkan nilai-nilai parameter-parameter β = 1,78, m_{E1} = 0,0076, m_{E2} = 0,00228, m_{E3} = 0,017, m_{E3} = 0,003648, m_{E4} = 0,001, m_F = 0,01, λ = 0,014, λ_{TB} = 0,07, μ = 0,037, v_s = 50.000, g_j = 10.000, k_j = 10.000, f_j = 5.000, dan diasumsikan γ = 0,04 (Revelle, 1969). Biaya vaksinasi massal vaksinasi BCG perindividu dan biaya vaksinasi perperiode masing-masing adalah biaya vaksinasi BCG: Rp. 40.000,00 (Rumah Sakit Ibu dan Anak Hermina Bandung, 2011) dengan v_j = 50000 orang dan v_j = 100000 orang, sehingga jumlah yang divaksinasi, jumlah yang terinfeksi, dan biaya vaksinasi, dapat dilihat seperti pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3. Jumlah Individu yang Divaksinasi, Terinfeksi dan Biaya Vaksinasi

	v_j = 50000			v_j = 100000		
Tahun ke	Vaksinasi	Terin-feksi	Biaya dalam jutaan (Rp)	Vaksinasi	Terin-feksi	Biaya dalam jutaan (Rp)
0	200000	22000	22833,56	200000	22000	22881,08
1	38847	19498		39014	19496	
2	37990	17249		38153	17245	
3	37363	15218		37512	15211	
4	36925	13374		37062	13362	
5	36643	11689		36766	11671	
6	36490	10138		36602	10116	
7	36452	8701		36553	8674	
8	36517	7359		36606	7327	
9	36679	6095		36757	6059	
10	36933	4894		37002	4854	

Berdasarkan Tabel 3 di atas, dapat dilihat bahwa semakin meningkat jumlah yang divaksinasi mengakibatkan semakin besar biaya vaksinasi yang dibutuhkan, tetapi semakin menurunkan jumlah individu yang terinfeksi. Jika tujuan pengambil kebijakan untuk meminimumkan biaya maka perlu memvaksinasi v_j = 50000 orang tiap periodenya, sedangkan jika tujuan pengambil kebijakan untuk meminimumkan yang terinfeksi maka perlu memvaksinasi v_j = 100000 orang pada setiap periodenya.

5. Kesimpulan dan Saran

Kesimpulan

Pentingnya pemodelan optimisasi pada bidang epidemiologi khususnya penentuan strategi vaksinasi adalah membuat metode penyelesaian yang baru untuk menentukan solusi optimal dari masalah epidemiologi dengan tujuan meminimumkan penyebaran penyakit menular dan meminimumkan biaya penanggulangan penyebaran penyakit menular.

Saran

Berdasarkan kajian penelitian pada Tabel 3 belum ada peneliti mengkaji masalah penentuan umur seseorang optimal untuk divaksinasi dengan satu jenis vaksin. Oleh karena itu perlu pengkajian model optimisasi strategi vaksinasi dengan memperhatikan faktor umur.

Daftar Pustaka

[1] Bazaraa, M. S., and Shetty, C. M., 1990. *Nonlinear Programming*, John Wiley & Sons.

[2] Becker, N. G. dan Starczak, D. N., 1997. *Optimal Vaccination Strategies for a Community of Household*, Mathematical Biosciences 139(2): 117-132.

[3] Dantzig, G. B., 2002. *Linear Programming*, Operations Research INFORMS 50 (1), 42–47.

[4] Goldmann, S. M. And Lightwood, J. 2002. *Cost Optimization in the SIS Model of Infectious Disease with Treatment*, Topics in Economic Analysis & Policy, 2(1), 1-22.

[5] Hethcote, H. W., Waltman, P., 1973. *Optimal Vaccination Schedules in a Determinstic Epidemic Model*, Mathematical Biosciences 18: 365-381.

[6] Hillier, F.S. and Lieberman, G. J., 1990. *Pengantar Riset Operasi*, jilid 1, Erlangga, 1990.

[7] Kermack, W. O. and McKendrick, A. G., 1927. A *Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*, Royal Society, 115: 700-721

[8] Luenberger, D. G., 1984. *Linear and Nonlinear Programmimg*, Addison Wesley Publishing Company, California.

[9] Matrajt, L. and Longini Jr, I.M, 2010. *Optimizing Vaccine Allocation at Different Points in Time During an Epidemic*, PLoS ONE, 5:11, 1-11.

[10] Moreira, F.R., 2003. *Linear Programming Applied to Healthcare Problems*, Einstein 1:105-109.

[11] Patel, R. dkk., 2005. *Strategi Vaksinasi Optimal pada Endemik Influenza dengan Menggunakan Algoritma Genetik*, Theoretical Biology 234, 201–212.

[12] Revelle, S. Feldmann, F., and Lynn, W. 1969. *An Optimization Model of Tuberculosis Epidemiology*, Management Science. vol. 16, no. 4;B-1990-B.221.

[13] Tanner, M. W., Satenspiel, L., Ntaimo, L. 2008. *Finding Optimal Vaccination Strategies under Parameter Uncertainty using Stochastic Programming*, Mathematical Biosciences 215:144-151.

[14] Ya-xiang Yuan, 2006. *A New Stepsize for the Steepest Descent Method*, Journal of Computational Mathematics, Vol.24, No.2, 149-156.

[15] Zaman, G., Kang, Y.H. and Jung, I.H., 2008. *Stability analysis and optimal vaccination of an SIR epidemic model*, BioSystems 93, 240–249.