ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

T – 7

Model Sir (*Suspectible Infected Recovered*) Dengan Imigrasi Dan Pengaruh Sanitasi Serta Perbaikan Tingkat Sanitasi

Evy Dwi Astuti dan Sri Kuntari
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sebelas Maret
math_evy@yahoo.com

Abstrak

Model SIR dapat digunakan untuk memodelkan suatu penyakit infeksi seperti *measles* (campak), *mumps* (gondong), *rubella* (campak Jerman) serta *poliomyelitis* (polio) dalam suatu populasi tertutup dengan asumsi-asumsi tertentu. Selanjutnya dilakukan simulasi untuk mengetahui pengaruh sanitasi pada laju kontak penularannya. Sehingga dapat ditentukan bahwa sanitasi yang baik dapat menekan atau memperkecil laju kontak penyebaran suatu penyakit infeksi.

Kata kunci : ***penyakit infeksi, model SIR, tingkat sanitasi.***

1. PENDAHULUAN

Penyakit infeksi yang bersifat endemik seperti *measles* (campak), *mumps* (gondong), *rubella* (campak Jerman) serta *poliomyelitis* (polio) merupakan penyakit yang sering menyerang manusia pada suatu negara tertentu. Penularan ini bisa terjadi secara kontak langsung dengan individu terinfeksi melalui batuk, udara, air minum, makanan, bersin dan kotoran manusia. Penyakit yang bersifat endemik tersebut merupakan penyakit yang menyerang suatu negara dalam jangka waktu yang lama.

Perpindahan penduduk dari suatu negara ke negara lain atau sering disebut dengan imigrasi sangat berpengaruh terhadap penyebaran penyakit infeksi. Individu yang baru saja berperan sebagai imigran ini memiliki kesehatan yang baik tetapi juga rawan terinfeksi suatu penyakit. Menurut Picollo dan Billings [4] menjelaskan bahwa suatu negara yang memiliki populasi yang sangat padat, faktor imigrasi sangat mempengaruhi laju penyebaran suatu penyakit infeksi.

Terjadinya penyebaran penyakit infeksi bisa dipengaruhi oleh buruknya tingkat kebersihan pada suatu wilayah tertentu. Negara yang memiliki wilayah dengan pemukiman penduduk yang sangat banyak dan padat biasanya tidak memiliki tingkat kebersihan yang cukup baik. Sehingga untuk menekan terinfeksinya seorang individu yang sehat agar tidak mudah untuk terinfeksi suatu penyakit, dapat dilakukan dengan perbaikan lingkungan hidup yang bersih agar terbentuk sanitasi yang baik.

Perkembangan ilmu pengetahuan di bidang matematika mempunyai peranan yang sangat penting untuk menggambarkan fenomena penyebaran penyakit infeksi. Peranan tersebut dituangkan dalam bentuk pemodelan matematika. Menurut Hethcote [2] model *Suspectible Infected Recovered* (SIR) dapat digunakan untuk memodelkan penyebaran penyakit infeksi. Memperhatikan faktor pertambahan dan pengurangan penduduk, yaitu faktor kelahiran yang dapat berpengaruh pada bertambahnya jumlah penduduk. Sedangkan faktor kematian yang berpengaruh pada berkurangnya jumlah penduduk. Sebagaimana yang disebutkan oleh Hethcote [2] bahwa model SIR yang menggambarkan fenomena penyakit infeksi dengan memperhatikan faktor kelahiran dan kematian disebut sebagai model endemik SIR.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1. Konstruksi Model

Menurut Iannelli [3], penyebaran penyakit infeksi dapat dimodelkan dengan mengelompokkan jumlah individu pada populasinya menjadi 3 kelompok, yaitu *suspectible*, *infected*, dan *recovered*. Pada kelompok *suspectible* misalkan $S(t)$ merupakan kelompok yang sehat tetapi rawan terkena suatu penyakit dalam waktu t. Kelompok *infected* misalkan $I(t)$ merupakan kelompok yang telah terinfeksi suatu penyakit dalam waktu t, sedangkan kelompok *recovered* misalkan $R(t)$ merupakan suatu kelompok yang telah memiliki kekebalan permanen dalam waktu t.

Untuk menentukan penurunan model SIR diperlukan beberapa asumsi. Berikut ini asumsi-asumsi menurut Hethcote [2] dan Iannelli [3].

1. Individu yang lahir dan imigrasi merupakan individu yang sehat tetapi rentan terserang suatu penyakit. Laju kelahiran dan laju imigrasi yang masuk sama dengan laju kematiannya, sehingga populasi pada suatu wilayah adalah konstan.
2. Jumlah individu dalam populasi bercampur secara homogen, sehingga bisa terjadi kontak langsung dengan individu terinfeksi atau melalui perantara lainnya dalam penularan penyakit. Dengan laju kontak atau penularannya adalah konstan.
3. Hanya terdapat satu jenis penyakit, sehingga hanya terdapat satu macam penularan dengan penyakit yang sama.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

4. Individu yang telah sembuh dianggap telah sembuh dari penyakit dan tidak terinfeksi lagi sehingga tidak akan tertular penyakit lagi.
5. Tidak memperhatikan masa inkubasi dari penyakit.

Seperti yang telah diasumsikan bahwa penularan terjadi jika terdapat kontak dengan individu *infected.* Sehingga terdapat sebanyak I individu yang terinfeksi yang mengakibatkan individu *suspectible* mempunyai kemungkinan terinfeksi sebesar proporsi individu *infected* yaitu $\frac{I}{N}$ dengan laju β, yang mengakibatkan berkurangnya individu *suspectible* sebesar $\beta S\frac{I}{N}$ pada waktu t. Adanya kelahiran dan imigrasi yang merupakan individu yang sehat tetapi rentan terserang penyakit mengakibatkan bertambahnya jumlah individu *suspectible.* Dimisalkan μ_1 dan μ_2 merupakan laju kelahiran dan laju imigrasi, oleh karena itu individu *suspectible* bertambah sebanyak $(\mu_1+\mu_2)N$. Tetapi adanya kematian karena kerentanan individu terhadap suatu penyakit mengakibatkan berkurangnya individu *suspectible* sebanyak $(\mu_1+\mu_2)S$. Sehingga didapat laju perubahan individu *suspectible* pada waktu t adalah

$$\frac{dS}{dt}=(\mu_1+\mu_2)N-(\mu_1+\mu_2)S-\beta S\frac{I}{N}$$

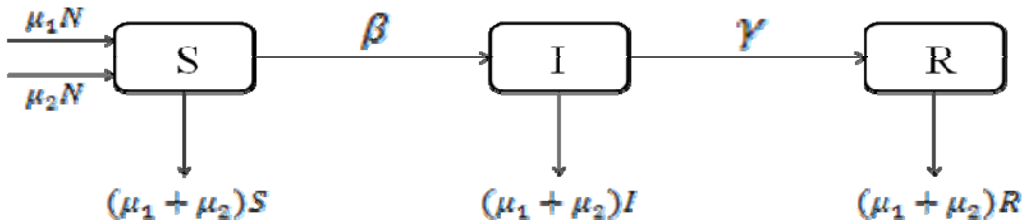
Berkurangnya individu *suspectible* karena terinfeksi oleh suatu penyakit mengakibatkan bertambahnya individu *infected* sebanyak individu *suspectible* yang terinfeksi yaitu $\beta S\frac{I}{N}$. Individu *infected* yang tidak dapat sembuh sehingga terjadi kematian mengakibatkan berkurangnya individu *infected* sebesar $(\mu_1+\mu_2)I$. Individu *infected* yang telah sembuh dari penyakit tidak akan terinfeksi lagi mengakibatkan berkurangnya jumlah individu *infected* dengan laju kesembuhan γ sebanyak γI . Sehingga didapat laju perubahan individu *infected* pada waktu t adalah

$$\frac{dI}{dt}=\beta S\frac{I}{N}-(\mu_1+\mu_2)I-\gamma I.$$

Individu *infected* yang telah sembuh dan memiliki kekebalan permanen mengakibatkan bertambahnya jumlah individu *recovered* sebanyak γI . Individu *recovered* yang tidak dapat bertahan karena daya tahan tubuh individu yang cenderung lemah maka menyebabkan terjadinya kematian sehingga mengakibatkan berkurangnya individu *recovered* sebanyak $(\mu_1+\mu_2)R$. Sehingga didapat laju perubahan individu *recovered* pada waktu t adalah

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu_1 + \mu_2)R.$$

Perubahan populasi model SIR dengan imigrasi dapat dilihat pada Gambar 2.1

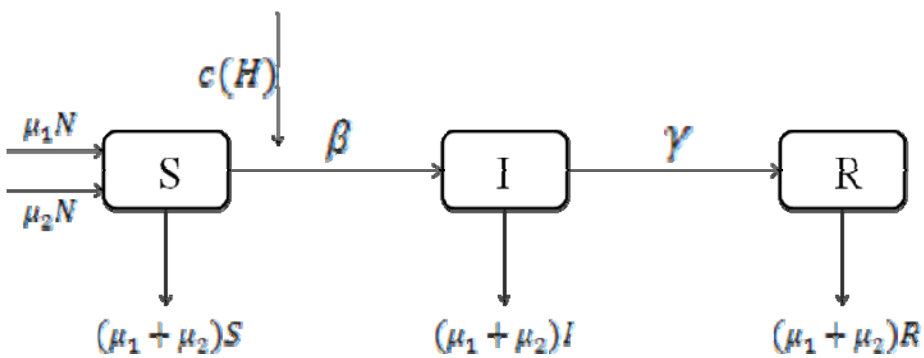


Gambar 2.1. Dinamika model SIR dengan imigrasi

dari Gambar 2.1 diperoleh sistem *autonomous* model endemik SIR dengan imigrasi sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (\mu_1 + \mu_2)N - (\mu_1 + \mu_2)S - \beta S \frac{I}{N}, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S \frac{I}{N} - (\mu_1 + \mu_2)I - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\mu_1 + \mu_2)R. \end{aligned} \tag{1}$$

Fungsi $c(H)$ merupakan pengaruh sanitasi pada laju kontak, dengan H adalah tingkat sanitasi seperti yang disampaikan oleh Alves de Guimaraens dan Codeco [1]. Penambahan fungsi $c(H)$ pada laju kontak penyebaran pada sistem persamaan (1) dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2. Dinamika model SIR dengan imigrasi dan pengaruh sanitasi

Tampak bahwa pada Gambar 2.2 pengaruh sanitasi (fungsi $c(H)$) berada diantara populasi individu *suspectible* dengan populasi individu *infected*. Sehingga pengaruh sanitasi sangat berpengaruh terhadap penyebaran Penyakit infeksi. Mempertimbangkan pengaruh sanitasi pada model SIR dengan imigrasi dan pengaruh sanitasi maka model dapat dimodifikasi menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= (\mu_1 + \mu_2)N - (\mu_1 + \mu_2)S - c(H)S\frac{I}{N},\\
\frac{dI}{dt} &= c(H)S\frac{I}{N} - (\mu_1 + \mu_2)I - \gamma I,\\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\mu_1 + \mu_2)R,
\end{aligned} \tag{2}$$

dengan $S(0), I(0), \mu_1, \mu_2, \beta, \gamma > 0$ dan $R(0) \geq 0$. Sistem persamaan (2) merupakan model *SIR* dengan imigrasi dan pengaruh sanitasi, *S*, *I* dan *R* merupakan banyaknya individu *suspectible*, *infected* dan *recovered*.

2.2 Simulasi Model

Pada simulasi model ini akan dilihat penurunan jumlah individu yang terinfeksi dengan memperbesar level sanitasi yaitu $0 \leq H \leq 1$ dengan nilai H secara berturut-turut adalah $H = 0$, $H = 0.5$ dan $H = 1$. Diambil populasi dalam suatu wilayah yang terdiri dari 763 orang. Pada mulanya didalam daerah tersebut terdapat satu orang yang terinfeksi. Untuk selanjutnya pada wilayah tersebut terdapat 512 orang yang terinfeksi dalam waktu 25 hari. Diberikan nilai-nilai parameter yaitu laju kontak terhadap penyakit $\beta = 1.665$, laju kesembuhan $\gamma = 0.441$, laju kelahiran $\mu_1 = 0.015875$ dan laju imigrasi sebesar $\mu_1 = 0.015$, dengan laju kematian merupakan laju kelahiran ditambah laju imigrasi.

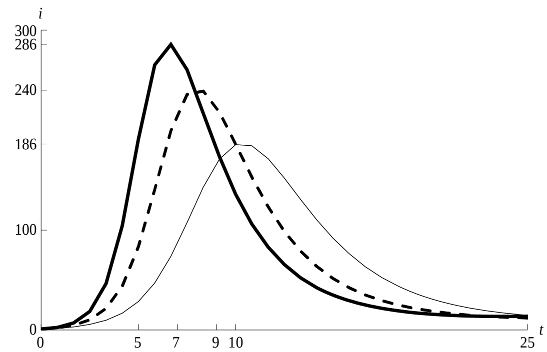
Berdasarkan data tersebut didapat jumlah individu *suspectible* pada waktu $t = 0$ adalah $S(0) = 763$, jumlah individu *infected* pada waktu $t = 0$ adalah $I(0) = 0$ dan jumlah individu *recovered* pada waktu $t = 0$ adalah $R(0) = 0$. Sehingga didapat model SIR dengan imigrasi dengan $\alpha = 0.5$ dan level sanitasi secara berturut-turut adalah sebesar $H = 0$, $H = 0.5$ dan $H = 1$ adalah

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= 0.020875\,N - 0.020875\,S(\beta - \alpha H)S\frac{I}{N},\\
\frac{dI}{dt} &= (\beta - \alpha H)S\frac{I}{N} - 0.020875\,I - 0.441\,I,
\end{aligned} \tag{3}$$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$\frac{dR}{dt} = 0.441\, I - 0.020875\, R.$$

Untuk mengetahui penurunan jumlah individu yang terinfeksi berdasarkan sistem persamaan (3) dapat disajikan pada Gambar 2.3 dengan menggunakan bantuan *software mathematica 7*



Gambar 2.3. Perubahan jumlah individu terinfeksi karena pengaruh $H = 0$ (garis tebal), $H = 0.5$ (garis putus-putus), dan $H = 1$ (garis tipis)

Berdasarkan Gambar 2.3 tampak bahwa jumlah individu terinfeksi saat tidak ada sanitasi atau level sanitasi $H = 0$ pada waktu $t = 7$ hari sebesar 286 orang. Pada Gambar 2.3 terjadi penurunan jumlah terinfeksi sebesar 46 orang ketika level sanitasi ditingkatkan sebesar $H = 0.5$ pada waktu $t = 7$. Ketika level sanitasi ditingkatkan menjadi $H = 1$ terjadi penurunan jumlah individu terinfeksi dari waktu $t = 9$ hari sampai $t = 10$ hari yaitu sebesar 54 orang. Berarti semakin besar tingkat sanitasi maka semakin berkurang jumlah individu yang terinfeksi.

3. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa,

1. Model endemik SIR dengan imigrasi dan pengaruh sanitasi

$$\frac{dS}{dt} = (\mu_1 + \mu_2)N - (\mu_1 + \mu_2)S - c(H)S\frac{I}{N},$$

$$\frac{dI}{dt} = c(H)S\frac{I}{N} - (\mu_1 + \mu_2)I - \gamma I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu_1 + \mu_2)R,$$

dengan S, I dan R berturut-turut adalah individu *suspectible*, *infected* dan *recovered* dengan $S(0), I(0), \mu_1, \mu_2, \beta, \gamma > 0$ dan $R(0) \geq 0$.

2. Adanya perbaikan tingkat sanitasi dengan level sanitasi $0 \leq H \leq 1$ mampu menurunkan laju kontak individu terinfeksi yang semula berjumlah 286 orang pada waktu $t = 7$ hari menjadi 186 orang pada waktu $t = 10$ hari, itu berarti terjadi penurunan jumlah individu terinfeksi sebesar 100 orang dalam 3 hari.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Alves de Guimaraens, M., and Codeco, C. T., *Experience with Mathematical Models to Simulate Hepatitis A Population Dynamics Under Different Levels of Endemicity*, Cad. Saude Publica, Rio de Janeiro, 2005.

[2] Hethcote, H. W., *The Mathematics of Infectious Diseases*, SIAM Review **42** (2000), no. 4, 599-653.

[3] Iannelli, M., *The Mathematical Modeling of Epidemics*, Mathematics Department University of Torornto, 2005.

[4] Picollo, C. III and Billings, L., *The Effect of Vaccinations in an Immigrant Model*, Mathematical and Computer Modelling (2005), no. 42, 291-299.