 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

T – 4

Simulasi Level Sanitasi Pada Model Sir Dengan Imigrasi Dan Vaksinasi

Anita Kesuma Arum dan Sri Kuntari
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sebelas Maret
Surakarta
kesumaarumnita@yahoo.com

Abstrak

Model endemik *suscepctible, infected, recovered* (SIR) merupakan salah satu model matematika yang menyatakan pola penyebaran penyakit dengan memperhatikan upaya pengendaliannya. Model ini menggambarkan penyebaran penyakit pada individu terinfeksi yang sudah sembuh tidak akan terinfeksi lagi. Penyakit yang bersifat endemik menyebar dalam kurun waktu tertentu dengan laju yang sangat tinggi. Salah satu usaha untuk menurunkan laju penyebarannya yaitu dengan perbaikan level sanitasi.

Penelitian ini dilakukan dengan mensimulasi level sanitasi pada model endemik SIR dengan faktor imigrasi dan vaksinasi. Hal ini dilakukan untuk mengetahui seberapa besar pengaruh sanitasi terhadap penurunan laju kontak dilakukan dengan simulasi. Hasil simulasi menunjukkan bahwa level sanitasi mempengaruhi besarnya laju penyebaran penyakit.

Kata kunci : model SIR, imigrasi, vaksinasi, simulasi, level sanitasi

1. PENDAHULUAN

Penyakit infeksi seperti *rubella, measles, mumps,* dan *pertussis* merupakan penyakit infeksi yang berbahaya. Penyakit yang demikian bersifat endemik, yaitu menyebar dalam kurun waktu tertentu dengan laju yang sangat tinggi. Pada beberapa kasus epidemi, individu yang rentan terkena infeksi dapat terinfeksi. Kemudian individu yang telah sembuh dari infeksi tidak akan terinfeksi lagi. Menurut Kermak dan McKendrick [7] pola penyebaran penyakit seperti ini dapat dijelaskan melalui model *suscepctible, infected, recovered (SIR).* Model SIR untuk mempelajari penyebaran penyakit yang bersifat endemik disebut model endemik SIR.

Pada beberapa jenis penyakit dengan karakteristik SIR memiliki laju penyebaran yang sangat tinggi. Salah satunya dikarenakan faktor sanitasi yang kurang baik. Menurut Hetchote [3] peningkatan program sanitasi dapat mengurangi laju penyebaran penyakit. Untuk itu pada penelitian ini akan dibahas mengenai pengaruh sanitasi pada model SIR dengan faktor imigrasi, dan vaksinasi. Sebelumnya, model SIR dengan memperhatikan faktor imigrasi dan vaksinasi telah dibahas oleh Piccolo dan Billings [5].

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Epidemi dapat menimbulkan kerugian yang cukup besar sehingga perlu dilakukan upaya untuk menghentikannya. Salah satu langkah awal yang dapat dilakukan untuk menghentikan epidemi adalah dengan mengetahui seberapa besar pengaruh sanitasi dengan level sanitasi tertentu terhadap laju kontak atau laju penyebaran suatu penyakit.

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

2.1 Konstruksi Model

Model SIR menggambarkan penyebaran suatu penyakit. Menurut Hethcote [4] populasi pada model epidemi SIR klasik dibagi menjadi tiga kelompok yaitu individu yang rentan terhadap penyakit (*susceptible* (S)), individu yang sudah terinfeksi penyakit serta dapat menyebarkan penyakit ke sejumlah individu lain (*infected* (I)) dan individu yang sudah sembuh/bebas dari penyakit *recovered* (R). Jumlah individu pada kelompok *susceptible, infected* dan *recovered* pada suatu waktu t dinyatakan sebagai $S(t), I(t)$ dan $R(t)$.

Dalam suatu model matematika, diperlukan asumsi-asumsi yang harus dipenuhi. Berikut asumsi dalam penurunan model.

1. Terjadi pada populasi konstan. Laju kelahiran ditambah dengan laju imigrasi sama dengan laju kematian. Setiap individu yang baru lahir dan individu yang masuk ke dalam suatu wilayah tersebut (imigran) dalam keadaan sehat tetapi dapat terinfeksi penyakit karena belum kebal terhadap penyakit.
2. Tidak memperhatikan masa inkubasi dari penyakit.
3. Populasi bercampur secara homogen, artinya setiap individu memiliki kemungkinan yang sama dalam melakukan kontak dengan individu lain. Hanya satu penyakit yang menyebar dalam populasi
4. Tingkat vaksinasi 100%. Hal ini berarti setiap individu yang telah divaksin akan kebal terhadap penyakit.
5. Tidak terjadi emigrasi pada daerah tersebut.

Laju kematian dalam tiap kelompok seimbang dengan jumlah kelahiran dan jumlah imigrasi, sehingga populasi konstan (N). Laju kelahiran (μ_1) ditambah dengan laju imigrasi (μ_2) sama dengan laju kematian. Oleh karena itu $S(t) + I(t) + R(t) = N$. Dengan demikian laju kematian di tiap kelompok adalah $(\mu_1 + \mu_2)$.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Setiap individu yang lahir atau berimigrasi langsung masuk pada kelompok *susceptible*. Dinotasikan laju vaksinasi pada individu yang lahir tiap tahun adalah σ_1, sedangkan laju vaksinasi pada imigran adalah σ_2. Individu yang telah divaksinasi dinyatakan kebal dan langsung masuk ke dalam kelompok *recovered*. Dengan demikian jumlah individu kelompok *susceptible* adalah jumlah individu yang lahir dan imigran dikurangi dengan jumlah individu lahir dan imigran yang telah divaksinasi. Penyebaran penyakit infeksi muncul jika ada kontak antara individu *infected* dengan *susceptible*. Individu yang terinfeksi pindah ke kelompok infected dengan laju kontak β. Jumlah individu *susceptible* juga berkurang karena adanya kematian sejumlah $(\mu_1+\mu_2)S$. Oleh karena itu laju perubahan individu pada kelompok S tiap satuan waktu dapat diekspresikan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = (\mu_1+\mu_2)N - (\mu_1+\mu_2)S - \beta S\frac{I}{N} - (\sigma_1\mu_1+\sigma_2\mu_2)N \tag{2.1}$$

Berdasarkan Gambar 2.1 individu pada kelas *infected* berasal dari individu pada kelompok *susceptible* yang terinfeksi yaitu sejumlah $\beta S\frac{I}{N}$. Jumlah individu pada kelas infected juga berkurang karena adanya kematian sejumlah $(\mu_1+\mu_2)I$ serta jumlah individu yang sembuh. Jumlah individu yang sembuh masuk ke dalam kelompok *recovered* sebesar γI, dengan γ merupakan laju kesembuhan. Laju perubahan individu pada kelompok I tiap satuan waktu dapat diekspresikan sebagai

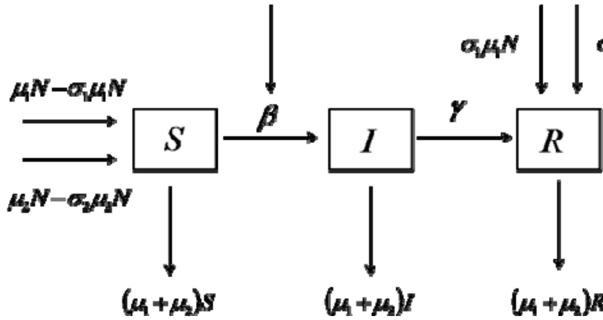
$$\frac{dI}{dt} = \beta S\frac{I}{N} - (\mu_1+\mu_2)I - \gamma I \tag{2.2}$$

Individu pada kelompok *recovered* berasal dari jumlah individu yang sembuh γI ditambah dengan jumlah individu yang terlah divaksinasi (baik individu lahir maupun imigran). Jumlah individu pada kelompok *recovered* juga berkurang dengan adanya kematian sebesar $(\mu_1+\mu_2)R$. Dengan demikian Laju perubahan individu pada kelompok R tiap satuan waktu dapat diekspresikan sebagai

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu_1+\mu_2)R + (\sigma_1\mu_1+\sigma_2\mu_2)N \tag{2.3}$$

Alur perpindahan individu tiap kelompok pada model SIR dengan imigrasi dan vaksinasi disajikan dalam Gambar 2.1.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

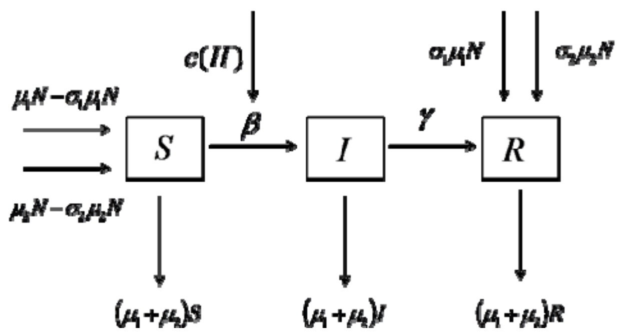


Gambar 2.1 Alur perpindahan individu tiap kelompok pada model SIR dengan imigrasi dan vaksinasi

Dari model epidemi persamaan (2.1), (2.2), dan (2.3) diperoleh sistem *autonomous* model endemi SIR dengan imigrasi dan vaksinasi sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= (\mu_1+\mu_2)N - (\mu_1+\mu_2)S - \beta S\frac{I}{N} - (\sigma_1\mu_1+\sigma_2\mu_2)N\\ \frac{dI}{dt} &= \beta S\frac{I}{N} - (\mu_1+\mu_2)I - \gamma I\\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\mu_1+\mu_2)R + (\sigma_1\mu_1+\sigma_2\mu_2)N\end{aligned} \tag{2.4}$$

Menurut Alves de Guimaraens dan Codeco [1] fungsi $c(H)$ didefinisikan sebagai pengaruh sanitasi pada laju kontak, $c(H) = \beta - \alpha H$ dengan α sebagai konstanta, laju kontak maksimum β, dan H merupakan level sanitasi lingkungan. Penambahan sanitasi pada laju kontak penyebaran pada sistem (2.4) dapat disajikan dalam Gambar 2.2



Gambar 2.2 Dinamika populasi model SIR dengan imigrasi, vaksinasi dan pengaruh sanitasi

Berdasarkan Gambar 2.2 pengaruh sanitasi terletak diantara kelompok *suscetipble* dan *infected.* Hal ini menunjukkan bahwa pengaruh sanitasi dapat menurunkan jumlah penyebaran penyakit. Dengan menambahkan pengaruh sanitasi pada model SIR dengan imigrasi dan vaksinasi diperoleh sistem *autonomous* model endemi

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

SIR dengan imigrasi, vaksinasi dan pengaruh sanitasi yang telah dimodifikasi sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= (\mu_1+\mu_2)N - (\mu_1+\mu_2)S - c(H)S\frac{I}{N} - (\sigma_1\mu_1+\sigma_2\mu_2)N \\
\frac{dI}{dt} &= c(H)S\frac{I}{N} - (\mu_1+\mu_2)I - \gamma I \\
\frac{dR}{dt} &= \gamma I - (\mu_1+\mu_2)R + (\sigma_1\mu_1+\sigma_2\mu_2)N
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Nilai parameter $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2,$ dan γ adalah positif. Laju vaksinasi adalah $0 \leq \sigma_1 \leq 1$ dan $0 \leq \sigma_2 \leq 1$. Dengan demikian sistem persamaan (2.5) merupakan model SIR dengan imigrasi, vaksinasi dan pengaruh sanitasi.

2.2 Simulasi Model

Simulasi dilakukan pada level sanitasi yaitu $0 < H < 1$ dengan nilai $H = 0, 0.5$ dan 1. Sebagai simulasi dalam artikel ini diberikan laju kesembuhan $\gamma = 0.441$ Total populasi adalah $N = 763$, dengan laju kelahiran $\mu_1 = 0.015875$ dan laju imigrasi $\mu_2 = 0.015.$ Laju kontak penyebaran penyakit adalah $\beta = 1.663$. Laju vaksinasi individu lahir adalah $\sigma_1 = 0.6$ sedangkan laju vaksinasi penduduk imigran adalah $\sigma_2 = 0.5.$

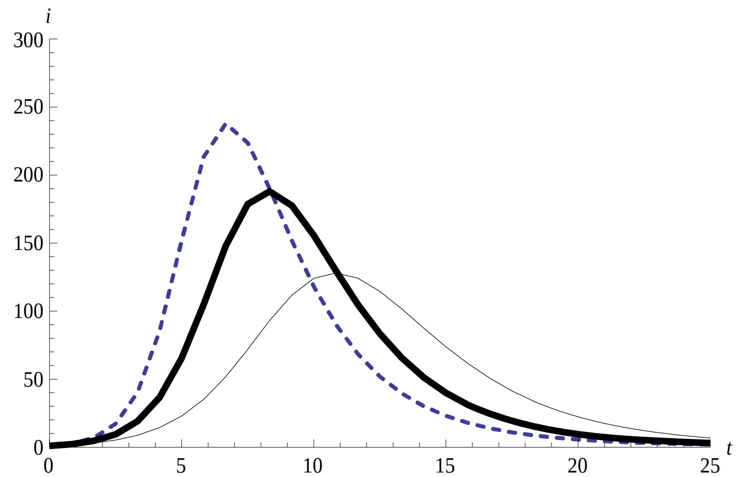
Jumlah individu awal yang terinfeksi pada $t = 0$ adalah $I(0) = 1,$ individu *susceptible* pada waktu $t = 0$ adalah $S(0) = 762$ dan individu *recovered* pada waktu $R(0) = 0$. Dengan demikian model (2.4) dapat ditulis sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= 23.557625 - 0.030875\,S - 0.002179\,SI - 12.990075 \\
\frac{dI}{dt} &= 0.002179SI - 0.030875\,I - 0.441I \\
\frac{dR}{dt} &= 0.441I - 0.030875\,R + 12.990075
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Model SIR (2.6) yang telah diperoleh, diterapkan dalam kasus untuk mengetahui jumlah individu *susceptible, infected* dan *recovered.* Penyelesaian pada kasus ditentukan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat, dengan bantuan *software Mathematica 7.0*.

Jumlah individu *susceptible, infected* dan *recovered* dengan $H = 0, H = 0.5$ dan $H = 1$ dapat dilihat pada Gambar 2.3

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3



Gambar 2.3 Penurunan individu yang terinfeksi dengan $H = 0$ (putus-putus), $H = 0.5$ (tebal) dan $H = 1$ (tipis)

Dari Gambar 2.3 terlihat bahwa jumlah individu yang terinfeksi maksimal mencapai 238 individu. Selanjutnya akan dilakukan simulasi terhadap level sanitasi (H). Dengan meningkatkan level sanitasi menjadi $H = 0.5$, jumlah individu yang terinfeksi menjadi 188 artinya jumlah individu yang terinfeksi turun sebesar 50 individu. Jika level sanitasi ditingkatkan menjadi $H = 1$, maka jumlah individu yang terinfeksi maksimal adalah 129 atau turun sebesar 109 individu. Berikut tabel nilai puncak endemik dengan simulasi nilai H.

Tabel 2.1 Nilai puncak endemik dengan simulasi variasi nilai H

H	Puncak endemik (I_{maks})
0	238
0.5	188
1	129

Dari Tabel 2.1 terlihat bahwa level sanitasi berpengaruh pada populasi *infected.* Semakin tinggi level sanitasi maka jumlah populasi yang terinfeksi juga semakin sedikit. Begitu pula sebaliknya.

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

3 KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model SIR dengan imigrasi, vaksinasi dan sanitasi dapat diekspresikan sebagai

$$\frac{dS}{dt} = (\mu_1+\mu_2)N - (\mu_1+\mu_2)S - c(H)S\frac{I}{N} - (\sigma_1\mu_1+\sigma_2\mu_2)N$$

$$\frac{dI}{dt} = c(H)S\frac{I}{N} - (\mu_1+\mu_2)I - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu_1+\mu_2)R + (\sigma_1\mu_1+\sigma_2\mu_2)N$$

   dengan $S(t) + I(t) + R(t) = N, \mu_1, \mu_2, \beta, \gamma \geq 0, 0 \leq \sigma_1 \leq 1,$ dan $0 \leq \sigma_2 \leq 1$

2. Hasil simulasi menunjukkan bahwa dengan menaikkan level sanitasi dapat menurunkan jumlah individu *infected*. Semakin tinggi level sanitasi maka jumlah populasi yang terinfeksi juga semakin sedikit, begitu pula sebaliknya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Alves de Guimaraens, M., and Codeco, C. T., *Experience with Mathematical Models to Simulate Hepatitis A Population Dynamics Under Different Levels of Endemicity*, Cad. Saude Publica, Rio de Janeiro, 2005.

[2] Diekmann, O. and J. A. P. Heesterbeek, *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 2000.

[3] Hethcote, H. W., *Rubella*, in Applied Mathematical Ecology, Gross, L., Hal-lam, T.G., and Levin, S.A.,eds., Springer-Verlag, Berlin, 1989,212-234.

[4] Hethcote, H. W., *The Mathematics of Infectious Disease*, SIAM Review 42 (2000), no.4, 599-653.

[5] Picollo, C. III and Billings, L., *The Effect of Vaccinations in an Immigrant Model, Mathematical and Computer Modelling* (2005), no. 42, 291-299

[6] Shim, E., *A Note on Epidemics Model with Infective Immigrants and Vaccination*, Mathematical Biosciences and Engineering (2006).

[7] W. O. Kermack and A. G. McKendrick. *A contribution to the mathematical theory of epidemics*. Proceedings of the Royal Society of London Series A, 115:700–721, 1927.