

Studi Simulasi Grafik Pengendali Non Parametrik Berdasarkan Fungsi Distribusi Empirik

Jantini Trianasari Natangku¹⁾, Adi Setiawan²⁾, Lilik Linawati²⁾

¹⁾Mahasiswa Program Studi Matematika FSM-UKSW

Email : n4n4_020190@yahoo.co.id

²⁾ Dosen Program Studi Matematika FSM-UKSW

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Matematika
Universitas Kristen Satya Wacana
Jl. Diponegoro 52 – 60 Salatiga 50711

Abstrak

Grafik pengendali Shewhart sering digunakan untuk merepresentasikan kualitas suatu produk secara statistik. Grafik pengendali ini dapat dipergunakan pada data berdistribusi normal namun sering dijumpai data yang tidak berdistribusi normal, sehingga perlu adanya grafik pengendali lain yang dapat digunakan untuk merepresentasikan data tersebut. Grafik yang dimaksud adalah grafik pengendali non parametrik. Penelitian ini akan mengkaji tentang grafik pengendali non parametrik untuk data berdistribusi empirik melalui studi simulasi. Batas – batas grafik pengendali non parametrik diperoleh berdasarkan nilai kuantil dari fungsi distribusi empiriknya. Sampel akan dibangkitkan secara random melalui fungsi berdistribusi Normal dan Gamma serta menggunakan kuantil tipe 1 dan tipe 7 dalam menentukan batas pengendalinya. Dari hasil simulasi diperoleh bahwa semakin banyak titik sampel yang dibangkitkan maka prosentase data yang *out of statistical control* semakin mendekati nilai tingkat signifikansi α yang digunakan yaitu 0.0027 .

Kata kunci : Grafik Pengendali Non Parametrik, Distribusi Empirik, Kuantil.

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Pengendalian kualitas harus dilakukan oleh perusahaan untuk menjaga kestabilan kualitas produk yang dihasilkan. Hal tersebut dapat dibentuk melalui *Statistical Process Control* (SPC) yang direpresentasikan melalui grafik pengendali atau *control chart*. Grafik pengendali Shewhart merupakan grafik pengendali yang sering digunakan untuk mengetahui kualitas produk pada data berdistribusi normal, namun terdapat data tidak berdistribusi normal sehingga dipergunakan grafik pengendali non parametrik yang dibangun berdasarkan kuantil fungsi distribusi empirik (Natangku et al., 2011).

Rumusan Masalah

Permasalahan dalam penelitian ini mengenai bagaimana membangun grafik pengendali non parametrik berdasarkan nilai kuantil fungsi distribusi empirik pada data berdistribusi Normal dan berdistribusi Gamma.

Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini yaitu mengimplementasikan nilai kuantil fungsi distribusi empirik untuk membangun grafik pengendali non parametrik melalui simulasi.

Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini bermanfaat membantu memberikan alat bantu untuk proses kualiti kontrol dalam produk.

KAJIAN PUSTAKA

Grafik pengendali dinyatakan dalam gambar sederhana yang terdiri dari dua garis horizontal sebagai batas – batas pengendali meliputi batas pengendali atas atau *upper control limit* (UCL) dan batas pengendali bawah atau *lower control limit* (LCL) serta satu garis sebagai garis tengah atau *centerline* (CL). Menurut Natangku et al. (2011), grafik pengendali non parametrik dapat dibangun melalui fungsi distribusi empirik yang dinyatakan dalam persamaan :

$$F_n(x) = \frac{\#\{x_1, x_2, \dots, x_n \leq x\}}{n}, x \in \mathfrak{R} \quad (1)$$

dengan # menyatakan banyaknya data x_1, x_2, \dots, x_n . Grafik pengendali non parametrik dibentuk dengan menggunakan batas pengendali berdasarkan nilai kuantil fungsi distribusi empirik. Penelitian ini menggunakan kuantil tipe 1 dan tipe 7 yang didefinisikan sebagai berikut (Wikipedia) :

- Tipe 1

Merupakan nilai invers dari fungsi distribusi empirik yang dinyatakan pada persamaan (2).

$$Q_1(p) = \begin{cases} x_{(1)} & , \quad p = 0 \\ x_{\lceil \frac{h-1}{2} \rceil} & , \quad p \text{ lainnya} \end{cases} \quad (2)$$

dengan menggunakan :

$$h = np + \frac{1}{2} \quad (3)$$

Keterangan :

n = banyaknya data,

p = probabilitas kuantil yang diinginkan , $0 < p < 1$,

- $Q_1(p)$ = nilai kuantil tipe ke 1 untuk probabilitas p ,

- $\lceil h \rceil$ = *ceiling* dari indeks ke h ,

$x_{(1)}$ = data pertama setelah diurutkan.

- Tipe 7

Merupakan interpolasi linear, dengan menggunakan nilai kuantil pada persamaan (4) yaitu

$$Q_7(p) = \begin{cases} x_{(n)} & , \quad p = 1 \\ x_{\lfloor h \rfloor} + (h - \lfloor h \rfloor)(x_{\lfloor h \rfloor + 1} - x_{\lfloor h \rfloor}) & , \quad p \text{ lainnya} \end{cases} \quad (4)$$

dan menggunakan nilai h pada persamaan (5).

$$h = (n - 1)p + 1 \quad (5)$$

dengan

n = banyaknya data,

p = probabilitas kuantil yang diinginkan, $0 < p < 1$,

$Q_7(p)$ = nilai kuantil tipe ke 7 untuk probabilitas p ,

$\lfloor h \rfloor$ = *floor* dari indeks ke h ,

$x_{(n)}$ = data ke- n setelah diurutkan.

Penelitian ini menyimulasikan n titik sampel yang dibangkitkan melalui distribusi Normal (Persamaan (6)) dan Gamma (Persamaan (7)) (Roussas, 1997).

- Distribusi Normal

Fungsi distribusi Normal dinyatakan dalam persamaan (6).

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x \in \mathfrak{R} \quad (6)$$

Estimasi parameter dari fungsi distribusi normal adalah μ = mean dengan $\mu \in \mathfrak{R}$ dan σ^2 = variansi dengan $\sigma > 0$.

- Distribusi Gamma

Persamaan untuk fungsi distribusi Gamma dinyatakan di bawah ini.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases} \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (7)$$

dengan $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$. Estimasi parameter yang digunakan dalam distribusi

Gamma adalah $\alpha = \frac{\bar{x}^2}{s^2}$ dan $\beta = \frac{s^2}{\bar{x}}$ dengan \bar{x} = mean atau rata – rata sampel dan s^2 = variansi sampel.

METODE PENELITIAN

Data

Penelitian ini menggunakan data univariat yang dibangkitkan secara random melalui fungsi distribusi Normal dan Gamma. Data random yang dibangkitkan secara Normal pada penelitian ini menggunakan $\mu = \bar{x} = 7.315674$ dan $\sigma^2 = s^2 = 0.01844163$

sedangkan data random fungsi Gamma menggunakan parameter

$$\alpha = \frac{(7.315674)^2}{0.01844163} = \frac{53.51909}{0.01844163} = 2902.08 \text{ dan } \beta = \frac{0.01844163}{7.315674} = 0.002520839$$

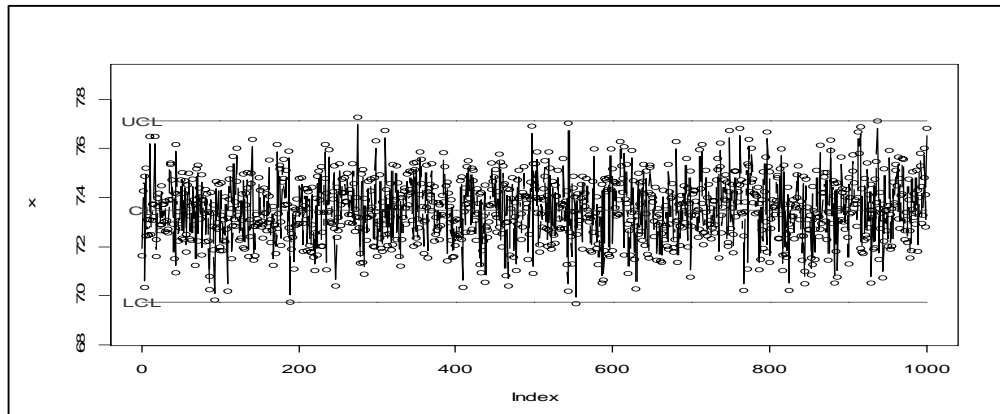
(Natanku et al., 2011). Simulasi akan dilakukan untuk $n = 1000$ dan $n = 5000$ berdasarkan kuantil tipe 1 dan tipe 7.

Analisis Data

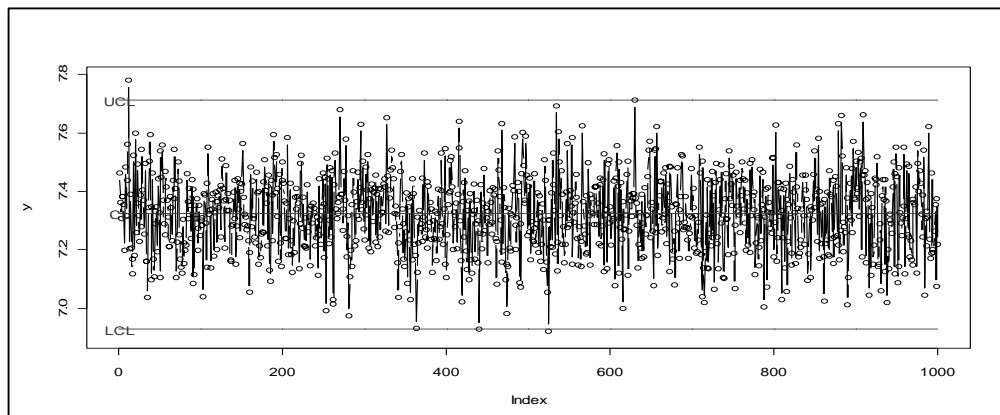
Pada penelitian ini akan diberikan beberapa simulasi dengan n titik sampel yang dibangkitkan secara random dari distribusi Normal dan Gamma untuk setiap nilai kuantil tipe 1 dan tipe 7.

- Tipe 1

Menggunakan persamaan (2) dan (3) dibentuk grafik pengendali non parametriknya untuk $n = 1000$ berdasarkan tipe 1. Grafik pengendali non parametrik yang tersaji pada Gambar 1 untuk sampel berdistribusi Normal dan Gambar 2 untuk sampel berdistribusi Gamma.



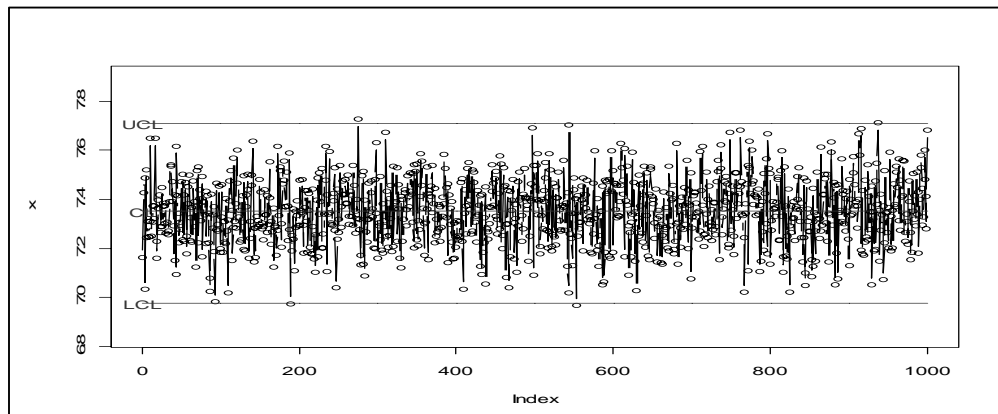
Gambar 1. Grafik Pengendali Non Parametrik Normal $n = 1000$ Tipe 1



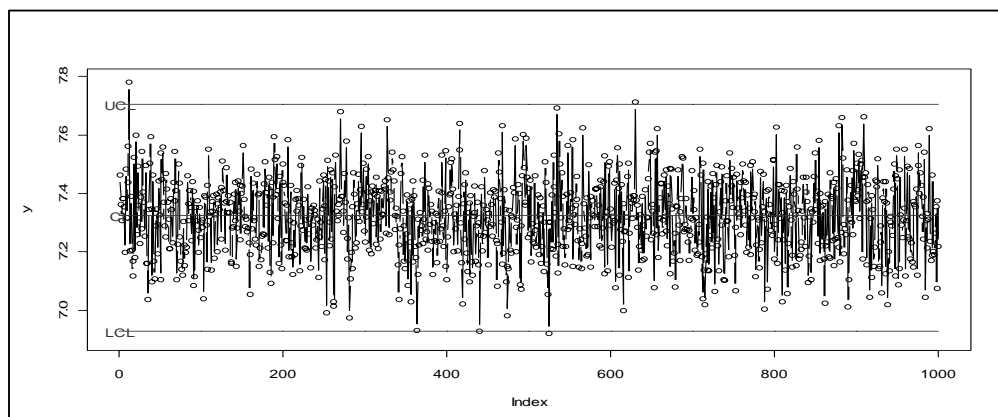
Gambar 2. Grafik Pengendali Non Parametrik Gamma $n = 1000$ Tipe 1

- Tipe 7

Menggunakan persamaan (3) dan (4) dibentuk grafik pengendali non parametriknya untuk $n = 1000$ berdasarkan tipe 7. Grafik pengendali non parametrik untuk sampel berdistribusi Normal tersaji pada Gambar 3 dan Gambar 4 untuk sampel berdistribusi Gamma.



Gambar 3. Grafik Pengendali Non Parametrik Normal $n = 1000$ Tipe 7



Gambar 4. Grafik Pengendali Non Parametrik Gamma $n = 1000$ Tipe 7

Dilakukan proses pembentukan grafik pengendali non parametrik untuk pembangkitan titik sampel $n = 5000$ dan $n = 10000$ berdasarkan kuantil tipe 1 dan tipe 7.

PEMBAHASAN

Setelah dilakukan simulasi untuk semua data sesuai rancangan simulasi, diperoleh hasil seperti Tabel 1 dan Tabel 2. Tabel 1 menunjukkan hasil batas pengendali untuk sampel berdistribusi Normal dengan tipe 1 dan tipe 7 memberikan batas – batas pengendali yang sama. Demikian pula untuk sampel berdistribusi Gamma baik tipe 1 maupun tipe 7 mempunyai batas – batas pengendali yang sama pula.

Tabel 1. Nilai Batas Pengendali Hasil Simulasi

n	Batas Pengendali	Tipe 1		Tipe 7	
		Distribusi Normal	Distribusi Gamma	Distribusi Normal	Distribusi Gamma
1000	LCL	6.93	6.96	6.93	6.96
	CL	7.35	7.31	7.35	7.31
	UCL	7.79	7.75	7.79	7.75
5000	LCL	6.96	6.91	6.96	6.91
	CL	7.35	7.31	7.35	7.31
	UCL	7.79	7.74	7.78	7.74
10000	LCL	6.95	6.91	6.94	6.91
	CL	7.36	7.32	7.36	7.32
	UCL	7.76	7.74	7.76	7.74

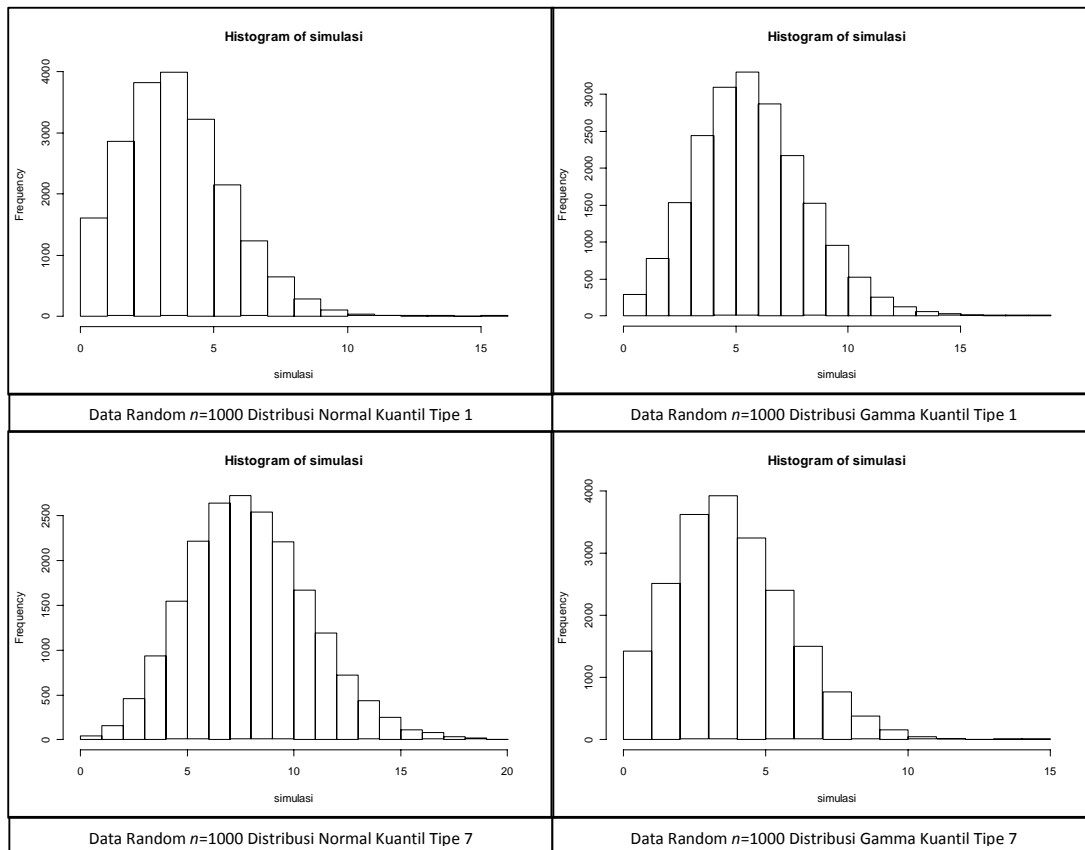
Tabel 2 menunjukkan prosentase titik – titik *out of statistical control* untuk masing – masing n titik sampel. Untuk $n = 1000$ yang berdistribusi Normal dan Gamma untuk tipe 1 terdapat 0.2 % sampel berada di luar kontrol. Prosentase titik sampel *out of statistical control* berdasarkan kuantil tipe 1 baik berdistribusi Normal atau Gamma untuk $n = 1000, 5000, \& 10000$ masing – masing adalah 0.2%, 0.24% dan 0.26%. demikian pula prosentase untuk kuantil tipe 7 masing – masing 0.4%, 0.28% dan 0.28%.

Berdasarkan Tabel 2 terlihat semakin banyak n titik sampel yang dibangkitkan maka titik sampel yang *out of statistical control* makin mendekati nilai tingkat signifikansi α yang digunakan yaitu 0.0027. Hal tersebut berarti semakin banyak titik sampel, tingkat ketelitian untuk titik sampel yang *out of statistical control* makin baik.

Tabel 2. Prosentase Titik Sampel *Out of Statistical Control* Hasil Simulasi

n	Kuantil Tipe 1		Kuantil Tipe 7	
	Distribusi Normal	Distribusi Gamma	Distribusi Normal	Distribusi Gamma
1000	0.2	0.2	0.4	0.4
5000	0.24	0.24	0.28	0.28
10000	0.26	0.26	0.28	0.28

Simulasi dilakukan dengan sampel ukuran $n=1000$ secara berulang sebanyak bilangan besar $B = 20.000$ kali untuk sampel berdistribusi Normal dan berdistribusi Gamma berdasarkan tipe 1 dan tipe 7. Hasil titik sampel *out of statistical control* untuk untuk $n=1000$ diperlihatkan pada Gambar 5. Perhitungan dan pembentukan histogram dilakukan pula untuk sampel ukuran $n=5000$ dan $n=10000$.



Gambar 5. Frekuensi Titik Sampel *Out of Statistical Control* $n = 1000$

Hasil di atas dapat dinyatakan pada Tabel 3 dalam bentuk proporsi yang didefinisikan sebagai nilai mean dibagi ukuran sampel. Untuk $n=1000$ berdistribusi Normal berdasarkan kuantil tipe 1 dan tipe 7 memiliki proporsi masing – masing 0.00409 dan 0.00839. Hasil untuk sampel yang lain dapat dilihat pada Tabel 3 yang menunjukkan baik distribusi Normal maupun Gamma berdasarkan kuantil tipe 1 dan tipe 7 dengan semakin besar ukuran sampel yang digunakan maka proporsinya makin mendekati nilai $\alpha = 0.0027$.

Tabel 3. Proporsi Titik Sampel *Out of Statistical Control* Hasil Simulasi 20.000 kali

n	Kuantil Tipe 1		Kuantil Tipe 7	
	Distribusi Normal	Distribusi Gamma	Distribusi Normal	Distribusi Gamma
1000	0.00409	0.00622	0.00839	0.00429
5000	0.00358	0.00304	0.00279	0.00307
10000	0.00272	0.00269	0.00274	0.00274

KESIMPULAN

Dalam studi simulasi yang telah ditunjukkan dalam penelitian ini, maka diperoleh kesimpulan yaitu :

1. Prosentase titik sampel yang *out of statistical control* untuk grafik pengendali non parametrik berdasarkan kuantil fungsi distribusi empirik yang dibangkitkan melalui distribusi Normal dan distribusi Gamma berdasarkan kuantil tipe 1 dan tipe 7 adalah sama.
2. Semakin banyak titik sampel yang digunakan maka prosentase titik sampel *out of statistical control* mendekati nilai α yang digunakan dan tingkat ketelitiannya makin baik.

DAFTAR PUSTAKA

- Ariani, D.W. 2004. *Pengendalian Kualitas Statistik*, Yogyakarta : Andi.
- Natangku, Setiawan, A., dan Linawati, L. 2011. *Grafik Pengendali Non Parametrik Univariat pada Data Ph Produk Air Minum Galon Merk “X” berdasarkan*

Fungsi Distribusi Empirik. Seminar Nasional Matematika & Pendidikan Matematika FKIP UNS tanggal 26 November 2011.

Roussas, George G. 1997. *A Course in Mathematical Statistics, Second Edition*. USA : Academic Press.

Web 1 : <http://en.wikipedia.org/wiki/Quantile>

Diunduh pada tanggal 8 Agustus 2011.

Web 2 : <https://www.amherst.edu/media/view/129116/original/Sample%2BQuantiles.pdf>

Hyndman, Rob J and Fan, Yanan. 1996. *Sample Quantiles in Statistical Packages*.

Diunduh pada tanggal 8 Agustus 2011.