 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

S – 3

Model Statistika untuk Fertilitas Perkawinan dengan Pendekatan Eksponenesial

Endang Sri Kresnawati
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Sriwijaya
endangsrikresnawati@yahoo.co.id

Abstrak

Fertilitas perkawinan dipengaruhi oleh faktor fertilitas alami dan perilaku hentian. Kedua faktor tersebut dapat dibangun melalui pengembangan Model Coale-Trussell dengan pendekatan eksponensial menjadi model statistika. Tingkat fertilitas alami (m) dan tingkat perilaku hentian (M) diperoleh dengan memaksimumkan model statistika tersebut dengan *maximum likelihood*.
Kata kunci: fertilitas perkawinan, eksponensial, *maximum likelihood*

Pendahuluan

Kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi dewasa ini mempengaruhi sikap manusia dalam memutuskan jumlah anak yang dimiliki. Fertilitas adalah ukuran yang menunjukkan jumlah kelahiran. Fertilitas perkawinan adalah banyaknya jumlah anak yang dilahirkan dari wanita menikah selama masa suburnya. Pada masyarakat modern, pola fertilitas dipengaruhi oleh faktor biologi, psikologi, ideologi, politik, sosial, ekonomi, budaya, dan faktor religi yang dianut. Berbagai faktor tersebut melahirkan berbagai sikap manusia dalam membuat keputusan mengenai jumlah kelahiran. Secara teori, tingkat fertilitas ditentukan dari dua faktor utama, yaitu penjarangan kelahiran dan pembatasan kelahiran. Kompleksnya faktor yang mempengaruhi kelahiran menyebabkan penaksiran angka kelahiran menggunakan model fertilitas diskrit tidak mampu lagi menggambarkan arah dan tingkat fertilitas. Model fertilitas kontinu lebih dapat menggambarkan fenomena fertilitas saat ini melalui keluasan jangkauan pembahasan yang dimilikinya. Sumarno, H 1997 telah menaksir fertilitas perkawinan menggunakan Distribusi Poisson. Distribusi Poisson adalah distribusi peluang bervariabel acak diskrit. Dalam rangka pengembangan model yang disesuaikan dengan pola fertilitas saat ini, maka dibangun suatu model fertilitas perkawinan melalui pendekatan eksponensial.

Model statistika adalah gambaran sederhana dari data, biasanya dibangun dari hubungan matematika atau numeric terdefinisi. Model statistika juga dapat dinyatakan sebagai formula yang mendefinisikan bagian struktur model, yaitu data apa yang dimodelkan, dengan data lain apa, dan dalam bentuk apa. Model statistika harus

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

memiliki tiga poin, yaitu: variable acak, parameter konstan yang tidak diketahui, dan suatu fungsi $g(.)$ yang menggambarkan fungsi densitas dari variable acak untuk setiap objek. Salah satu penerapan model statistika adalah untuk menentukan fertilitas perkawinan.

Salah satu model yang digunakan untuk menjelaskan fertilitas perkawinan adalah Model Coale-Trussell (Population Index, 1974). Model ini menyatakan fertilitas perkawinan melalui rasio antara fertilitas kelompok umur dengan fertilitas alami. Sumarno, 1977 menyatakan model Coale-Trussell dalam bentuk Poisson. Kresnawati, 1999 mengembangkan Model Coale-Trussell menggunakan eksponensial. Distribusi Poisson dapat digunakan untuk menaksir kejadian yang bersifat acak dalam kurun waktu tertentu, contohnya fertilitas. Pendugaan fertilitas sangat dipengaruhi oleh waktu dan peristiwa kelahiran.

Distribusi eksponensial, memiliki bilangan pokok *e*, sehingga distribusi ini dapat digunakan untuk menaksir kejadian acak dan bebas yang berkaitan dengan waktu. Alas an penggunaan distribusi ini adalah karena penaksoiran angka fertilitas untuk waktu yang akan dating tidak dipengaruhi oleh peristiwa kelahiran masa lampau. Kejadian masa lampau hanya berfungsi sebagai pembanding untuk pendugaan masa depan. Karena kemiripan sifat tersebut, maka sangat mungkin mengembangkan model diskrit dalam Sumarno, 1977 menjadi model fertilitas perkawinan dengan pendekatan eksponensial yang bersifat kontinu.

Metode Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan melalui beberapa tahap, yaitu: transformasi distribusi gamma ke distribusi eksponensial, menentukan penaksir m dan M, pengujian ratio likelihood, dan menyusun model fertilitas perkawinan.

Hasil Penelitian dan Pembahasan

Model Coale-Trussell

Fertilitas menunjukkan kemampuan secara nyata dari seorang wanita atau sekelompok wanita untuk melahirkan yang terjadi dalam masa reproduksi antara 15 tahun sampai 49 tahun. Fertilitas adalah ukuran kesuburan. Fertilitas yang diukur dari wanita menikah disebut fertilitas perkawinan. Kenyataannya,. Tidak semua wanita yang

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

berada dalam masa reproduksi secara potensial mampu melahirkan bayi. Keadaan ini disebabkan beberapa factor.

Population Index, 1974 memberikan salah satu model yang digunakan untuk menjelaskan fertilitas perkawinan yaitu Model Coale-Trussel

$$\frac{r(a)}{n(a)} = Meks[mv(a)] \qquad (1)$$

Dengan $r(a)/n(a)$ menyatakan rasio fertilitas menurut umur, r(a), dengan fertilitas alami, n(a). M adalah suatu konstanta yang menyatakan fertilitas alami, m adalah konstanta untuk perilaku hentian, dan v(a) menyatakan perilaku hentian.

Sumarno, 1977 menotasikan r(a) dengan ASMFR(a) (Age Specific Marital Fertility Rate). Model ini menyatakan bahwa pola pertilitas dipengaruhi oleh perilaku hentian. Ada dua perilaku hentian, yaitu penjarangan kelahiran dan pembatasan jumlah anak yang dilahirkan. Dua factor ini menjadi pendorong tidak terjadinya kelahiran. Berdasarkan itu, Model Coale-Trussell pada persamaan (1) dapat ditulis sebagai berikut:

$$ASMFR(a) = Meks[mv(a)] \qquad (2)$$

M dan m berbanding terbalik. Jika M besar, maka m kecil dan sebaliknya. Model Coale-Trussell masuk dalam keluarga eksponensial./ oengembangannya k distribusi eksponensial adalah dalam rangka mendapatkan angka taksiran yang mendekati adapt sebenarnya dengan galat sekecil mungkin.

Tahapan berikutnya yang dilakukan dalam menyususn model (20 menjadi kkodel eksponensiaql adalah dengan mentransformasi distribusi gamma ke ditribusi eksponensial dan menentukan penaksir Maximum Likelihood untu *M* dan *m*.

Transformasi Distribusi Gamma ke Distribusi Eksponensial

Distribusi eksponensial diperoleh dari distribussi gamma dengan nilai parameter tertentu. Distribusi gamma sendiri berasal dari transformasi Poisson. Distribusi Gamma adalah model peluang untuk waktu tunggu yang merupakan variable acak.

Dimisalkan variable acak Y_j sebagai umur wanita ke-j ($j = 1,2,3,..., N_w$. N_w: jumlah wanita) saat ia melangsungkan perkawinan pertama. Umur yang dibutuhkan untuk memperoleh fertilitas adalah y_j, dinotasikan dengan t, di mana t adalah bilangan bulat positif.

Distribusi Y_j adalah:

$$G(y_j) = \Pr(Y_j \le y_j) = 1 - \Pr(Y_j > y_j) \qquad (3)$$

Untuk kejadian yang kurang dari total t dalam umur ke-y wanita ke-j, jika variable acak K adalah angka kelahiran alami dalam umur y_j, maka:

$$\Pr(Y_j > y_j) = \sum_{k=0}^{t-1} \Pr(K = k),$$

dengan

$$\sum_{k=0}^{t-1} \Pr(K = k)$$

sehingga

$$\begin{aligned}\Pr(Y_j > y_j) &= \sum_{k=0}^{t-1} \Pr(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} \frac{(np)^k e^{-np}}{k!} \qquad (4) \\ &\approx \sum_{j=1}^{N_w} \frac{\mu_{y_j} e^{-\mu_{y_j}}}{B(y_j)!}\end{aligned}$$

Lalu persamaan (4) ditransformasi guna memperoleh distrubusi Gamma, hasilnya sebagai berikut:

$$\sum_{k=0}^{t-1} \frac{(np)^k e^{-np}}{k!} = \int_{np}^{\infty} \frac{\mu^{t-1} e^{-\mu}}{(t-1)!}$$

dengan $k = t - 1 = B_{y_j}$ dan $\mu = np = \mu_{y_j}$ menjadi:

$$\int_{np}^{\infty} \frac{\mu_{y_j}{}^{B_{y_j}} e^{-\mu_{y_j}}}{B(y_j)!} d\mu_{y_j} \qquad (5)$$

Dengan mensubstitusikan (5) ke (3)

$$G(y_j) = 1 - \int_{np}^{\infty} \frac{\mu_{y_j}{}^{B_{y_j}} e^{-\mu_{y_j}}}{B(y_j)!} d\mu_{y_j}$$

Dimisalkan: $(y_j)! = \Gamma(B_{y_j}) = \Gamma(t-1)$

Maka:

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$G(y_j) = 1 - \int_{np}^{\infty} \frac{\mu_{y_j}{}^{B_{y_j}} e^{-\mu_{y_j}}}{\Gamma(By_j)} d\mu_{y_j} = \int_{0}^{np} \frac{\mu_{y_j}{}^{B_{y_j}} e^{-\mu_{y_j}}}{\Gamma(By_j)} d\mu_{y_j}$$

Untuk $y_j \le 0$ dan $G(y_j) = 0$. Jika kita ubah μ_{y_j} dengan memisalkan $\mu_{y_j} = p_{y_j} S_{y_j}$, maka:

$$G(y_j) = \int_{0}^{np} \frac{p_{y_j}{}^{B_{y_j}-1} S_{y_j}{}^{B_{y_j}} e^{-p_{y_j} S_{y_j}}}{\Gamma(By_j)} d\mu_{y_j}, \; y_j > 0$$

Akhirnya diperoleh fungsi densitas peluang dari Y_j, yaitu:

$$g(y_j) = G'_{y_j} = \frac{p_{y_j}{}^{B_{y_j}-1} n_{y_j}{}^{B_{y_j}} e^{-n_{y_j} p_{y_j}}}{\Gamma(By_j)}, \; 0 < y_j < 49$$

Y_j berdistribusi Gamma dengan $\alpha = B_{y_j} - 1$, $\beta = \frac{1}{p}$. Jika $B_{y_j} = 1$, maka fungsi densitas peluang dari Y_j adalah:

$$g(y_j) = \frac{n_{y_j} e^{-n_{y_j} p_{y_j}}}{\Gamma(1)} = n_{y_j} e^{-n_{y_j} p_{y_j}}, \Gamma(1) = 1$$

Dinamakan f.d.p. Poisson dengan:

$$\mu_{y_j} = 0{,}89MT(y_j)\exp\left\{-\left(\frac{y_j - 29{,}88}{14{,}77}\right)^4 - 0{,}02y_j - 0{,}44m\left(\frac{y_j}{30}\right)^{6,4}\exp\left(\frac{(y_j/30)^{7,4}}{15{,}21}\right)\right\} \quad (7)$$

dengan:

n_{y_j} : jumlah anak yang dilahirkan oleh wanita ke-j yang menikah pada usia ke-y

p_{y_j} : peluang jumlah anak yang akan dilahirkan oleh wanita ke-j yang menikah di usia ke-y

μ_{y_j} : rata-rata kelahiran yang dihasilkan wanita ke-j yang menikah di usia ke-y

Model di atas belum sepenuhnya dapat digunakan, sebelumnya harus dibuat ke bentuk gabungan, dimaksimumkan, dan dicari penaksirnya.

Fungsi Gabungan

Fungsi gabungan merupakan perkalian dari fungsi densitas peluang Poisson yang dimaksimumkan

$$g(y_1)=n_{y_1}e^{-\mu_{y1}};g(y_2)=n_{y_2}e^{-\mu_{y2}};...;g(y_w)=n_{yw}e^{-\mu_{yw}}$$

$$g(y_1,y_2,...,y_w)=n_{y_1}e^{-\mu_{y1}}.n_{y_2}e^{-\mu_{y2}}.....n_{yw}e^{-\mu_{yw}}$$

$$g(y_j)=\prod_{j=1}^{N_w}n_{y_j}e^{-\mu_{yj}} \quad (8)$$

dengan N_w = jumlah wanita menikah

Penaksir Maximum Likelihood

Untuk mendapatkan nilai m dan M yang belum diketahui, dilakukan dengan cara me-ln-kan fungsi gabungan model eksponensial pada persamaan (8) dan dilakukan diferensial, sehingga menghasilkan penaksir $\hat{m}$ dan $\hat{M}$. Penaksir $\hat{m}$ dan $\hat{M}$ merupakan taksiran terbaik untuk m dan M.

$$g(y_1,y_2,...,y_w)=n_{y_1}e^{-\mu_{y1}}.n_{y_2}e^{-\mu_{y2}}.....n_{yw}e^{-\mu_{yw}}$$

$$L(\Omega)=\prod_{j=1}^{N_w}n_{y_j}e^{-\sum_{j=1}^{N_w}\mu_{y_j}}$$

$$\ln L(\Omega)=\ln\left(\prod_{j=1}^{N_w}n_{y_j}\right)-\sum_{j=1}^{N_w}\mu_{y_j} \quad (9)$$

Substitusikan persamaan (7) ke persamaan (9)

$$\ln L(\Omega)=\ln\left(\prod_{j=1}^{N_w}n_{y_j}\right)$$

$$-\sum_{j=1}^{N_w}0,89MT(y_j)\exp\left\{-\left(\frac{y_j-29,88}{14,77}\right)^4-0,02y_j-0,44m\left(\frac{y_j}{30}\right)^{6,4}\exp\left(\frac{(y_j/30)^{7,4}}{15,21}\right)\right\} \quad (10)$$

Kemudian untuk memperoleh penaksir $\hat{m}$ dan $\hat{M}$, differensialkan persamaan (10) terhadap masing-masing

$$\frac{d\ln L(\Omega)}{dM}=0$$

Diperoleh:

$$\hat{m} = \frac{\sum_{j=1}^{N_w} \ln\left(0{,}89T(y_j)\right) - \left(\frac{y_j - 29{,}88}{14{,}77}\right)^4 - 0{,}02 y_j}{0{,}44\left(\frac{y_j}{30}\right)^{6,4} \exp\left(\frac{(y_j/30)^{7,4}}{15{,}21}\right)}$$

Dan

$$\frac{d \ln L(\Omega)}{dm} = 0$$

$$\hat{M} = \frac{eksp\left[\sum_{j=1}^{N_w} \ln\left(0{,}89T(y_j)\right) - \left(\frac{y_j - 29{,}88}{14{,}77}\right)^4 - 0{,}44 - \left(\frac{y_j}{30}\right)^{6,4}\right]}{0{,}89T(y_j)}$$

Setelah penaksir $\hat{m}$ dan $\hat{M}$ diperoleh, maka model Coale-Trussell pada persamaan (2) menjadi

$$ASMFR(a) = \hat{M}\, eks\left[\hat{m}\, v(a)\right] \tag{13}$$

Berdasarkan penurunan rumus di atas, dapat dikatakan Distribusi Eksponensial adalah fungsi peluang yang memiliki variable acak kontinu untuk semua nilai non negative dengan parameter $p > 0$. Sifat distribusi ini selalu positif, tidak mungkin bernilai negative di titik waktu manapun.jika ditelaah ke belakang, baik Model Coale-Trussell maupun Model (13) sebenarnya mengikuti pola umum Model Pertumbuhan Penduduk Eksponensial. Pada model tersebut, pertumbuhan penduduk digambarkan mengikuti pola bilangan eksponensial. Dalam prinsip pemodelan matematika, model yang sudah ada dapat diubah suai atau dikembangkan. Pengembangan dapat dilakukan terhadap variable amatan dan pendekatan.

Kesimpulan dan Saran

Pemodelan merupakan penggambaran objek berdasarkan pendekatan matematis. Model statistika merupakan model matematika yang erumusannya bergantung pada variable waktu. Model yang baik adalah model yang mampu menggambarkan factor-faktor amatan dengan kesalahan kecil. Pemodelan terhadap fertilitas perkawinan dengan pendekatan eksponensial memberikan gambaran secara eksponen bahwa keputusan

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

dalam menentukan jumlah anak dipengaruhi oleh pola penjarangan kelahiran dan pembatasan kelahiran.

Daftar Pustaka

Bostrom, G., 1985, Practical Aspects on The Estimation of The Parameters in Coale's Model for marital Fertility, Institut of Mathematical Statistics, University of Umea, Sweden.

Office of Population Research, 1974, Population Index, Princeton Univercity and Population Association of America.

Kresnawati, Endang S., 1999. Model Statistika untuk Fertilitas Perkawinan dengan Pendekatan Eksponensial, Skripsi, Universitas Sriwijaya.

Sumarno, Hadi, 1997, Penerapan model fertilitas perkawinan terhadap data jawa-bali, Majalah Forum Statistika dan Komputasi IPB, Institut Pertanian Bogor, Bogor, 2:15-22.