A – 20

Eigenvalue Dan *Eigenvector* Dari Matriks Polinomial Dalam Aljabar Max-Plus

[1]Ratna Novitasari, [2]Dinar Mutiara Kusumo Nugraheni
[1] Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Universitas Diponegoro
[2]Program Studi Teknik Informatika, Jurusan Matematika, Universitas Diponegoro
Jl. Prof. Soedharto Tembalang, Semarang

ABSTRAK

Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai *eigenvalue* dan *eigenvector* dari polinomial dalam bentuk matriks di dalam Aljabar Max-Plus. Teorema Perron-Frobenius diterapkan seperti halnya pada aljabar biasa dengan membentuk korespondensi satu-satu antara *eigenvalue* dan *eigenvector* dari matriks polinomial dengan *eigenvalue* dan *eigenvector* dari matriks Companion. Proses perhitungan akan digunakan Program Scilab.

Kata Kunci : *eigenvalue*, *eigenvector*, matriks polinomial, Aljabar Max-Plus

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Dalam aljabar biasa, *eigenvalue* dan *eigenvector* mempunyai peranan sangat penting dalam fisika dan teknik, antara lain dalam bentuk diagonalisasi matriks dan muncul dalam aplikasi umum seperti analisis stabilitas, fisika *rotating bodies*, dan osilasi dari *vibrating system* dan sebagainya. Berbagai penelitian terus dilakukan mengenai *eigenvalue* dan *eigenvector* ini serta cara mendapatkannya dalam bentuk berbagai matriks. Salah satunya adalah matriks polinomial yang mempunyai banyak aplikasi, diantaranya yaitu penelitian oleh Ann Sinap (1996), Psarrakos (2004), Byers(2008) dan Adhikari (2011).

Seperti halnya dalam Aljabar biasa, *eigenvalue* dan *eigenvector* dalam Aljabar Max Plus juga penting dalam penyelesaian suatu sistem ataupun untuk menentukan kestabilan suatu sistem. *Eigenvalue* dan *eigenvector* pada matriks interval dalam aljabar max plus telah dibahas oleh *Cechlarova* (2005) sedangkan *eigenvalue* dan *eigenvector* matriks Monge pada Aljabar Max-Plus telah dibahas oleh Gavalec (2006). *Eigenvalue* dan *eigenvector* matriks polinomial dalam Aljabar Max dibahas oleh Gursoy (2011). Pada penelitian ini, akan dibahas mengenai *eigenvalue* dan *eigenvector* dari polinomial dalam bentuk matriks di dalam Aljabar Max-Plus. Teorema Perron-Frobenius diterapkan seperti halnya pada aljabar biasa dengan membentuk korespondensi satu-satu

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

antara *eigenvalue* dan *eigenvector* dari matriks polinomial dengan *eigenvalue* dan *eigenvector* dari matriks Companion. Proses perhitungan akan digunakan Program Scilab.

1.2. Rumusan masalah

Eigenvalue dan *eigenvector* dari matriks polinomial dalam Aljabar Max-plus dengan menerapkan Teorema Perron Frobenius. Serta kondisi atau syarat yang diperlukan suatu matriks polinomial mempunyai *eigenvalue* atau *eigenvector* yang tunggal.

1.3. Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan *eigenvalue* dan *eigenvector* dari matriks polinomial dalam Aljabar Max-plus. Serta mendapatkan syarat suatu matriks polinomial dalam Aljabar max-plus mempunyai *eigenvalue* atau *eigenvector* yang tunggal.

1.4.Manfaat

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah menambah kajian mengenai *eigenvalue* dan *eigenvector* dari matriks polinomial dalam Aljabar Max-plus.

2. ALJABAR MAX-PLUS

Didefinisikan $\varepsilon \overset{\text{def}}{=} -\infty$ dan $e \overset{\text{def}}{=} 0$. Himpunan R_{maks} adalah himpunan $R \cup \{\varepsilon\}$, dimana R adalah himpunan bilangan riil.

Definisi 2.1 Struktur aljabar R_{maks} (Bacelli dkk., 1992)

Simbol R_{maks} menyatakan himpunan $R \cup \{-\infty\}$ dengan dua operasi biner yaitu maksimum yang dinotasikan $\oplus$ dan penjumlahan yang dinotasikan $\otimes$. □

Untuk setiap a, b $\in$ R_{maks}, didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ adalah $a \oplus b \overset{\text{def}}{=} \text{maks}(a,b)$ dan $a \otimes b \overset{\text{def}}{=} a + b$. Himpunan R_{maks} dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ disebut Aljabar Max-Plus dan dinyatakan dengan R = (R_{maks}, $\oplus$, $\otimes$, ε, e).

Sedangkan operasi pangkat dalam Aljabar Max-plus untuk setiap $x \in \mathrm{R}_{\mathrm{maks}}$ adalah $x^{\otimes n} \stackrel{def}{=} \underbrace{x \otimes x \otimes \ldots \otimes x}_{n \;\; \mathrm{kali}}$, untuk semua $n \in \mathrm{N}$ dengan $n \neq 0$, dan untuk $n = 0$ didefinisikan $x^{\otimes 0} \stackrel{def}{=} e = 0$. Sehingga $x^{\otimes n}$, untuk setiap $n \in \mathrm{N}$, dalam aljabar biasa dapat ditulis $x^{\otimes n} = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n\; kali} = n \times x$.

2.1 Vektor dan Matriks dalam Aljabar Max-Plus

Himpunan matriks di dalam Aljabar Max-Plus dinyatakan dengan $\mathrm{R}_{\mathrm{maks}}^{n \times m}$. Untuk $n \in \mathrm{N}$ dengan $n \neq 0$, didefinisikan $\underline{n} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{1, 2, \ldots n\}$. Elemen dari matriks $A \in \mathrm{R}_{\mathrm{maks}}^{n \times m}$ pada baris ke i dan kolom ke j dinyatakan dengan a_{ij}, untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$. Matriks A dapat ditulis dengan
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Operasi penjumlahan matriks A, $B \in \mathrm{R}_{\mathrm{maks}}^{n \times m}$, dinotasikan dengan $A \oplus B$, didefinisikan $[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \mathrm{maks}(a_{ij}, b_{ij})$, dimana $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$.

Adapun operasi perkalian $A \in \mathrm{R}_{\mathrm{maks}}^{n \times m}$ dengan skalar $\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{maks}}^{n \times m}$, didefinisikan oleh $\alpha \otimes A = [\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}$, dengan $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$.

Sedangkan operasi perkalian matriks A, $B \in \mathrm{R}_{\mathrm{maks}}^{n \times m}$, didefinisikan sebagai $A \otimes B = \bigoplus_{j=1}^{l} a_{ij} \otimes b_{jk} = \underset{j \in l}{maks}\{a_{ij} + b_{jk}\}$, untuk $i \in \underline{n}$ dan $j \in \underline{m}$. Sifat perkalian matriks ini adalah tidak komutatif, yaitu $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Elemen-elemen dari $\mathrm{R}_{\mathrm{maks}}^{n} \stackrel{def}{=} \mathrm{R}_{\mathrm{maks}}^{n \times 1}$ disebut vektor. Elemen ke j dari sebuah vektor $x \in \mathrm{R}_{\mathrm{maks}}^{n}$ dinotasikan dengan x_j atau ditulis $[x]_j$. Vektor di $\mathrm{R}_{\mathrm{maks}}^{n}$ dengan semua elemennya sama dengan e disebut vektor unit dan dinotasikan dengan **u**, atau ditulis $[\mathbf{u}]_j = e$ untuk $j \in \underline{n}$. Untuk sebarang $\alpha \in \mathrm{R}_{\mathrm{maks}}^{n}$ perkalian $\alpha \otimes \mathbf{u}$ menghasilkan sebuah vektor dengan semua elemennya sama dengan α.

2.2 Graph Berarah dalam Aljabar Max-Plus

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Graph berarah G adalah sebuah pasangan (V, E) dimana V adalah himpunan berhingga dari *node* atau *verteks* dan E adalah himpunan pasangan berurutan dari *node* yang disebut *arc* atau *edge*. Yang dimaksud dengan berurutan bahwa *arc* (i, j) tidak sama dengan *arc* (j, i). Jika $(i, j) \in$ E, berarti G memuat *arc* dari i ke j sehingga disebut *incoming arc j* dan *outgoing arc i*.

Misalkan $(i, j) \in$ E tetapi $(j, i) \notin$ E berarti bahwa ada *arc* dari i ke j tetapi tidak ada *arc* dari j ke i, hal ini menunjukkan arah dari graph sehingga disebut graph berarah atau digraph. Graph berarah disebut mempunyai bobot jika setiap *arc* $(i, j) \in$ E mempunyai sebuah bobot $w(i, j) \in$ R.

Jika sebarang matriks A berukuran $n \times n$ dalam R_{maks} dapat di ubah menjadi sebuah graph yang saling berhubungan, maka graph tersebut dinamakan *Communication Graph* dari matriks A yang dinotasikan dengan $G(A)$. Himpunan node-node dari sebuah graph dari matriks A dinotasikan dengan $V(A) = \underline{n}$ dan sebuah pasangan $(i, j) \in \underline{n} \times \underline{n}$ adalah sebuah *arc* dari graph jika $a_{ji} \neq \varepsilon$. Himpunan *arc*-*arc* dari sebuah graph dari matriks A dinotasikan E (A).

Untuk sebarang dua *node* i, j, sebuah barisan *arc* $p = ((i_k, j_k) \in \text{E} : k \in \underline{m}$ sehingga $i = i_1$, $j_k = i_{k+1}$ untuk $k < m$ dan $j_m = j$ disebut sebuah *path* dari i ke j. *Path* yang terdiri dari node $i = i_1, i_2, \ldots. i_m = j$ dikatakan mempunyai panjang m, yang dinotasikan $|p|_l = m$. Selanjutnya, jika $i = j$, maka *path* seperti ini disebut sebuah *circuit*.

Definisi 2.2 *Precedence Graph* (Bacelli dkk., 1992)

Precedence graph dari matriks bujur sangkar A dengan elemennya a_{ij} adalah sebuah digraph berbobot dengan node n dan sebuah arc (j, i) jika $a_{ij} \neq \varepsilon$, dimana bobot pada *arc* ini adalah nilai dari a_{ij}. *Precedence graph* dinotasikan $G(A)$. □

Dari definisi di atas, untuk sebuah *arc* (i, j) di $G(A)$ mempunyai bobot a_{ji} dan bobot dari sebuah *path* di $G(A)$ adalah jumlahan dari bobot-bobot semua *arc* yang membangun graph tersebut. Bobot dari sebuah *path* dinyatakan dengan $|p|_w$. Sehingga bobot rata-rata dari sebuah *path* adalah $\frac{|p|_w}{|p|_l}$. Notasi ini juga berlaku untuk bobot rata-rata sebuah *circuit* atau *circuit mean*.

Lemma 2.3 (Heidergott dkk., 2006)

Misalkan $A \in \mathrm{R}_{\text{maks}}^{n\times m}$ adalah sebarang *circuit* di $G(A)$ mempunyai bobot rata-rata *circuit* kurang atau sama dengan e. Maka, matriks A memenuhi:

$$A^{+} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} A^{\otimes k} = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n} \in \mathbb{R}_{\text{maks}}^{n\times n}$$

Sebuah graph disebut terhubung (*connected*) jika untuk semua pasangan *node* i dan j ada *arc* yang menghubungkan i dan j. Graph disebut *strongly connected* jika untuk sebarang *node* i dan j ada sebuah *path* dari i ke j. Sebuah matriks $A \in \mathrm{R}_{\text{maks}}^{n\times m}$ disebut *irreducible* jika graph $G(A)$ adalah *strongly connected*. Jika sebuah matriks tidak *irreducible*, maka matriks tersebut disebut *reducible*.

EIGENVALUE DAN *EIGENVECTOR* DALAM ALJABAR MAX-PLUS

Definisi 3.1. (Heidergott dkk., 2006)

Misalkan $A \in \mathrm{R}_{\text{maks}}^{n\times m}$ adalah matriks bujur sangkar. Jika λ adalah sebuah skalar dan $v \in \mathrm{R}_{\text{maks}}^{n}$ adalah sebuah vektor yang memuat minimal satu elemen yang berhingga sehingga memenuhi $A \otimes v = \lambda \otimes v$, maka λ disebut *eigenvalue* dari matriks A dan v adalah *eigenvector* dari matriks A yang bersesuaian dengan *eigenvalue* λ. □

Dari definisi di atas, sebuah *eigenvalue* bisa bernilai ε. Sedangkan untuk sebuah *eigenvector* bisa mempunyai elemen-elemen yang nilainya sama dengan ε asalkan masih memiliki elemen yang berhingga minimal satu.

Lemma 3.2 (Heidergott dkk., 2006)

Misalkan $A \in \mathrm{R}_{\text{maks}}^{n\times m}$ mempunyai *eigenvalue* λ yang berhingga. maka ada sebuah *circuit* p di $G(A)$ sehingga $\lambda = \frac{|p|_w}{|p|_l}$.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Sebuah *circuit* p di $G(A)$ disebut *critical* jika mempunyai bobot rata-rata maksimum, yaitu $\lambda = \frac{|p|_w}{|p|_l}$. *Critical graph* A dinotasikan dengan $G^C(A)$ yaitu graph yang terdiri dari semua *node* dan *arc* yang menjadi anggota *critical circuit* di $G(A)$. Semua node yang menjadi anggota $G^C(A)$ disebut *critical node*. Sedangkan *subpath* dari *critical circuit* disebut *critical path*.

Lemma 3.3 (Heidergott dkk., 2006)

Misalkan $G(A)$ memuat minimal satu *circuit*, maka sebarang *circuit* di $G^C(A)$ adalah *critical*.

Misalkan *eigenvalue* λ adalah bilangan riil yang berhingga, diberikan matriks A_λ dengan anggotanya adalah $[A_\lambda]_{ij} = a_{ij} - \lambda$. Matriks A_λ kadang-kadang mengarah pada matriks normalisasi. Sehingga bobot rata-rata maksimum di $G(A_\lambda)$ adalah nol sehingga muncul adanya matriks A_λ^+.

Lemma 3.4 (Heidergott dkk., 2006)

Jika graph $G(A)$ dari matriks $A \in \mathrm{R}_{\text{maks}}^{n\times m}$ mempunyai maksimal bobot rata-rata *circuit* λ yang berhingga, maka skalar λ adalah sebuah *eigenvalue* dari matriks A dan kolom $\left[A_\lambda^*\right]_j$ adalah sebuah *eigenvector* dari matriks A yang bersesuaian dengan λ untuk sebarang *node* j di $G^C(A)$.

Teorema 3.5 (Heidergott dkk., 2006)

Sebarang matriks *irreducible* $A \in \mathrm{R}_{\text{maks}}^{n\times m}$ mempunyai satu dan hanya satu *eigenvalue* λ. *Eigenvalue* λ ini adalah bilangan riil berhingga dan nilainya sama dengan bobot rata-rata maksimum dari *circuit* pada $G(A)$ yaitu: $\lambda(A) = \underset{p \in C(A)}{\text{maks}} \frac{|p|_w}{|p|_l}$.

Untuk perhitungan *eigenvalue* dan *eigenvector* berikutnya digunakan *Power Algorithm* oleh Subiono (2000). Program yang digunakan adalah Scilab dengan *Max-plus Algebra Toolbox* oleh Subiono (2007).

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

3. *EIGENVALUE* DAN *EIGENVECTOR* MATRIKS POLINOMIAL DALAM ALJABAR MAX-PLUS

Seperti dalam Aljabar biasa, Matriks polinomial dalam Aljabar Max-Plus didefinisikan sebagai berikut:

$$P(\lambda) = A_0 \oplus \lambda A_1 \oplus \dots \oplus \lambda^{m-1} A_{m-1},$$

dimana $A_0, A_1, \dots, A_{m-1} \in \mathrm{R}_{\text{maks}}^{n\times m}$. Matriks polinomial $P(\lambda)$ dikatakan sebagai matriks polinomial dengan derajat m – 1.

Penerapan teorema Perron Frobenius seperti halnya pada Aljabar biasa, yaitu *eigenvalue* dan *eigenvector* didefinisikan:

(i) *Eigenvalue* $\kappa \geq 0$ dikatakan sebagai *eigenvalue* max-plus kanan dari matriks polinomial $P(\lambda)$ yang bersesuaian dengan *eigenvector* max-plus kanan $\upsilon \geq 0$ jika memenuhi persamaan $P(\kappa) \otimes v = \kappa^m . \upsilon$.
Maka (κ, v) adalah pasangan eigen max-plus kanan dari matriks polinomial $P(\lambda)$.

(ii) *Eigenvalue* $\tau \geq 0$ dikatakan sebagai *eigenvalue* max-plus kiri dari matriks polinomial $P(\lambda)$ yang bersesuaian dengan *eigenvector* max-plus kiri $w \geq 0$ jika memenuhi persamaan $P(\tau) \otimes w = \tau^m . w$. Maka (τ, w) adalah pasangan eigen max-plus kiri dari matriks polinomial $P(\lambda)$.

Dengan matriks Companion sebagai berikut:

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ A_0 & A_1 & \cdots & A_{m-2} & A_{m-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{maks}^{mn \times mn}$$

Hubungan antara matriks polinomial dan matriks Companion, lebih lanjut dijelaskan dalam proposisi berikut ini.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Proposisi 4.1.

Suatu matriks polinomial $P(\lambda)$ yang bersesuaian dengan matriks Companion. Maka $(\kappa, v) \in \mathbb{R}_{maks} \times \mathbb{R}_{maks}^{n}$ adalah pasangan eigen max-plus kanan dari matriks polinomial $P(\lambda)$ jika dan hanya jika $(\kappa, \hat{v}) \in \mathbb{R}_{maks} \times \mathbb{R}_{maks}^{mn}$ adalah pasangan eigen max-plus kanan dari matriks Companion, dimana:

$$\hat{v} = \begin{bmatrix} v \\ \kappa v \\ \vdots \\ \kappa^{m-1} v \end{bmatrix}$$

Sedangkan $(\tau, w) \in \mathbb{R}_{maks} \times \mathbb{R}_{maks}^{n}$ adalah pasangan eigen max-plus kiri dari matriks polinomial $P(\lambda)$ jika dan hanya jika $(\tau, \widehat{w}) \in \mathbb{R}_{maks} \times \mathbb{R}_{maks}^{mn}$ adalah pasangan eigen max-plus kiri dari matriks Companion, dimana:

$$\widehat{w} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} A_0^T \otimes w \\ \left(\frac{1}{\tau^2} A_0^T \oplus \frac{1}{\tau} A_1^T\right) \otimes w \\ \vdots \\ \left(\frac{1}{\tau^{m-1}} A_0^T \oplus \frac{1}{\tau^{m-2}} A_1^T \oplus \dots \oplus \frac{1}{\tau} A_{m-2}^T\right) \otimes w \\ w \end{bmatrix}$$

Dibawah ini menjelaskan mengenai *eigenvalue* dari matriks Companion yang *irreducible*.

Teorema 4.2

Diberikan suatu matriks polinomial $P(\lambda)$ yang bersesuaian dengan matriks Companion. Anggap bahwa C_p adalah *irreducible*. Maka $\mu(C_p)$ adalah bobot rata-rata maksimum secara geometri dari $circuit$ matriks Companion C_p. Nilai $\mu(C_p)$ merupakan satu-satunya *eigenvalue* max-plus dari matriks polinomial $P(\lambda)$. Dalam bentuk $\mu \coloneqq \mu(C_p)$ ada vektor positif $v, w > 0$ di $\mathbb{R}_{maks}^{n}$ sehingga $P(\mu) \otimes v = \mu^m v$ dan $w^T \otimes P(\mu) = \mu^m w^T$.

Dari Teorema 4.2 di atas, didapatkan bahwa jika matriks Companion dari suatu matriks polinomial ternyata adalah *irreducible*, maka matriks polinomial akan mempunyai *eigenvalue* yang tunggal.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Sedangkan Matriks polinomial yang mempunyai *eigenvector* kiri dan kanan yang tunggal, dijelaskan dalam teorema sebagai berikut:

Teorema 4.3

Diberikan matriks polinomial $P(\lambda)$ yang bersesuaian dengan matriks Companion. Jika notasi C_p^C menyatakan *critical matrix* dari $P(\lambda)$, maka matriks polinomial $P(\lambda)$ mempunyai *eigenvector* kiri dan kanan yang tunggal dalam bentuk skalar beserta kelipatannya, jika dan hanya jika graf dari C_p^C adalah *strongly connected*.

Berdasarkan Teorema 4.3 di atas, suatu matriks polinomial akan mempunyai *eigenvector* kiri dan kanan yang tunggal dengan syarat bahwa graf yang terbentuk dari *critical matrix* Companion adalah *strongly connected*. Nilai *eigenvector* dari matriks polinomial ini juga berlaku untuk kelipatannya.

4. Kesimpulan dan Saran

Adapun kesimpulan dan saran dari penelitian yang telah dilakukan adalah sebagai berikut:

4.1. Kesimpulan

Penerapan Teorema Perron Frobenius pada Aljabar Max-Plus sebagaimana halnya pada Aljabar biasa, didapatkan bahwa dalam matriks polinomial dalam Aljabar Max-Plus mempunyai *eigenvalue* kanan max-plus yang bersesuaian dengan *eigenvector* kanan max-plus. Begitu pula dengan *eigenvalue kiri* max-plus yang bersesuaian dengan *eigenvector* kiri max-plus.

Matriks polinomial dalam Aljabar Max-plus akan mempunyai *eigenvalue* yang tunggal jika matriks Companionnya adalah *irreducible*. Sedangkan matriks polinomial dalam Aljabar Max-plus akan mempunyai *eigenvector* kiri dan kanan yang tunggal serta kelipatannya jika graf yang dibentuk dari *critical* matriks Companionnya adalah *strongly connected*.

4.2. Saran

Penelitian mengenai eigenvalue dan eigenvector dalam Aljabar Max-plus diperlukan kajian yang lebih lanjut. Baik itu untuk matriks polinomial itu sendiri dengan menggunakan metode yang berbeda ataupun dari bentuk-bentuk matriks yang lainnya.

5. Daftar Pustaka

Adhikari, B., Alam, R., Kressner, D. (2011), "Structured eigenvalue condition numbers and linearizations for matrix polynomials", *Journal of Linear Algebra and its Application*, vol.435, hal. 2193-2221.

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. dan Quadrat, J.P. (1992), *Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems*, John Wiley & Sons, New York.

Byers, R., Mehrmann, V., Xu, H. (2008), "Trimmed linearizations for structured matrix polynomials", *Journal of Linear Algebra and its Application*, vol.429, hal. 2373-2400.

Cechlarova, K. (2005), "Eigenvectors of Interval Matrices over Max-Plus Algebra", *Journal of Discrete Applied Mathematics*, vol. 150, hal. 2–15.

Gavalec, M., Plavka, J. (2006), "Computing an eigenvector of a Monge matrix in max-plus algebra", *Journal of Mathematics Method Operation Research*, Vol. 63, hal. 543-551.

Gursoy, B., Mason, O. (2011), "Spectral properties of matrix polynomials in the max algebra", *Journal of Linear Algebra and Its Application*, vol. 435, hal 1626-1636.

Heidergott, B., Olsder, G.J. dan Woude, J. van der (2006), *Max Plus at Work, Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications*, Princeton University Press, New Jersey.

Psarrakos,P., Tsatsomeros, M. (2004), "A primer of Perron–Frobenius theory for matrix polynomials", *Journal of Linear Algebra and its Application*, vol.393, hal. 333-351.

Sinap, Ann, Aschee, W. (1996), "Orthogonal Matrix Polynomial and Applications", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol.66, hal. 27-52.

Subiono, Woude, J. van der (2000), "Power Algorithm for (max, +) and Bipartite (min, max, +) Systems", *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, vol. 10, hal. 369-389.

Subiono (2007), *Max-plus Algebra Toolbox*, ver. 1.0, Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.