A – 18

Rank Matriks Atas Ring

Yuliyanti Dian Pratiwi (Mahasiswa S2 Matematika FMIPA UGM)
Miftah Sigit Rahmawati (Mahasiswa S2 Matematika FMIPA UGM);
Nana Fitria (Mahasiswa S2 Matematika FMIPA UGM);
Sri Wahyuni (Dosen PS S2 Matematika Jurusan Matematika FMIPA UGM)

ABSTRAK

Dalam artikel ini akan dibahas rank matriks atas ring yang merupakan generalisasi dari rank matriks atas lapangan. Sudah diketahui, bahwa pada rank matriks atas lapangan salah satu cara mencari rank menggunakan metode eliminasi *Gauss* dengan menggunakan operasi baris atau kolom elementer, sehingga diperoleh basis dari ruang kolom atau ruang baris matriks tersebut. Dimensi dari ruang kolom atau ruang baris matriks tersebut dikenal sebagai rank matriks atas lapangan.

Misalkan $A \in M$mxn(R) dengan R ring komutatif dengan elemen satuan, maka akan diperoleh submodul yang dibangun oleh kolom-kolom matriks A, dan juga diperoleh submodul yang dibangun oleh baris-baris matriks A. Akan tetapi submodul-submodul tersebut belum tentu mempunyai basis. Dengan demikian, tidak dapat didefinisikan rank matriks A tersebut sebagai dimensi dari submodul-submodul tersebut. Sebagai akibatnya rank matriks atas ring tersebut tidak dapat dihitung menggunakan cara operasi baris elementer atau operasi kolom elementer.

Mengingat rank matriks atas lapangan juga dapat dilihat dari nilai minor matriks A yang tidak nol, dalam artikel ini akan dicoba didefinisikan rank matriks atas ring melalui pendekatan ideal yang dibangun oleh minor-minor $t \times t$ dari matris A atas ring R matriks tersebut. Mengingat ring R juga dapat membagi nol, maka dalam pendefinisian rank matriks atas R pendekatan dilakukan dengan menggunakan pengenolnya yakni jika I adalah suatu ideal maka pengenol (Annihilator) dari I didefinisikan sebagai himpunan AnnRI=x∈R|r.x=0,∀x∈I. Dalam artikel ini diperoleh pendefinisian rank matriks atas ring R sebagai berikut

rank (A) = max t|AnnRItA=0

dengan ItA didefinisikan sebagai ideal yang dibangun oleh semua minor-minor berukuran $t \times t$ dari matris A. Selanjutnya ditunjukkan bahwa pendefinisian ini tidak bertentangan jika diaplikasikan pada matriks atas lapangan.

Kata kunci : rank matriks atas lapangan, ideal, dan annihilator

1. Pendahuluan

Sebelumnya kita akan bahas secara garis besar mengenai rank matriks atas lapangan. Salah satu topik yang kita pelajari adalah bagaimana mencari rank dari suatu matriks lapangan. Andaikan F adalah suatu lapangan, diberikan matriks M = $M_{\text{mxn}}(F)$ = $\left[f_{ij}(F)\right]$ dengan f_{ij}∈F adalah suatu matriks yang elemen-elemennya berasal dari lapangan. Dengan mengubah M tersebut menjadi matriks eselon baris tereduksi maka dapat diketahui ruang kolom dan ruang baris matriks tersebut.

Didefinisikan CS(M) = $\{f_1C_1, f_2C_2, f_3C_3, \dots, f_nC_n | f_i \in \text{F}\}$adalah subruang di F^m yang dibangun oleh kolom-kolom M = $\langle C_1, C_2, C_3, \dots, C_n \rangle$. Karena CS(M) mempunyai basis maka rank (CS(M)) = dim (CS(M)) , rank (CS(M)) ≤ n dan dim (CS(M)) adalah banyaknya kolom-kolom yang merupakan basis. Kemudian didefinisikan pula RS(M) = $\{f_1R_1 + f_2R_2 + \cdots + f_nR_m | f_i \in \mathrm{F}\}$ adalah subruang di F^n yang dibangun oleh baris-baris M = $\langle R_1, R_2, R_3, \dots, R_m \rangle$ dengan rank (RS(M)) = dim (RS(M)), rank (CS(M)) $\leq m$. Kita juga telah mengetahui bahwa CS(M) = RS(M) sehingga dim (CS(M)) = dim (RS(M)) = rank (M).

Karena lapangan adalah bentuk khusus dari suatu ring, maka kita mengkaji lebih lanjut apakah cara mencari suatu rank dari suatu matriks atas lapangan dapat juga digunakan untuk mencari rank matriks atas ring.

2. Rank Matriks Atas Lapangan

Berikut ini akan dibahas pendefinisian rank matriks atas ring

Definisi 2.1: Misalkan diberikan lapangan dan $A \in M_{m\times n}(F)$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vektor-vektor:

$$B_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n})$$
$$B_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$B_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots a_{mn})$$

yang di bentuk dari baris-baris matriks A disebut vektor-vektor baris matriks A, dan vektor-vektor:

$$K_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n2} \end{bmatrix} \cdots, K_n = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

yang dibentuk dari kolom-kolom matriks A disebut vektor-vektor matriks A. Selanjutnya, subruang R^n yang di bangun oleh vektor-vektor baris matriks A disebut ruang baris A, dan subruang R^m yang di bangun oleh vektor-vektor kolom matriks A disebut ruang kolom A.

Contoh 1 :

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \epsilon M_{2\times3}(\mathbb{R})$

Dari matriks A tersebut, dapat diperoleh vektor-vektor baris, yaitu:

$B_1 = (2,1,0)$ dan $B_1 = (3,-1,4)$

Dan vektor-vektor kolom, yaitu:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ dan } K_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa pada suatu matriks $A \epsilon M_{m\times n}(F)$, operasi baris elementer tidak mengubah ruang baris suatu matriks A, dan operasi kolom elementer juga tidak mengubah ruang kolom A. Selanjutnya, vektor-vektor baris tak nol yang berbentuk eselon dari matriks A akan membangun basis untuk ruang baris A, dan vektor-vektor kolom tak nol yang berbentuk eselon dari matriks A akan membangun basis untuk ruang kolom A.

Definisi 2.2: Diberikan F adalah lapangan dan $A \epsilon M_{m\times n}(F)$. Rank dari matriks A, dinotasikan $rank_F(A)$ adalah dimensi dari ruang baris dan ruang kolom A.

Perhatikan bahwa definisi $rank_F(A)$ tersebut juga bisa dinyatakan sebagai maksimal dari vektor-vektor baris (atau vektor-vektor kolom) dari matriks A yang bebas linear. Dengan kata lain, $rank_F(A)$ juga bisa dinyatakan sebagai *t* maksimal dimana matriks A memiliki submatriks berkuran *t x t* yang determinannya tidak sama dengan nol.

Contoh 2:

Diberikan $\mathbb{R}$ adalah lapangan, dan matriks $= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$!

Dalam matriks B itu hanya ada dua baris, jadi rank matriks B tersebut adalah 2. Di lain pihak, dalam matriks B tersebut juga hanya ada dua kolom yang bebas linear, yaitu:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Karena untuk sebarang $a, b \in \mathbb{N}$ jika $a\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ maka berlaku:

$$2a + b = 0$$
$$b = 0$$

Sehingga a = 0. Oleh karena itu, rank matriks B tersebut adalah 2.

3. Rank Matriks Atas Ring

Berikut ini akan dibahas pendefinisian rank matriks atas ring. Seperti halnya matriks atas lapangan, matriks atas ring dibangun oleh ruang baris dan ruang kolom.

Misalkan $A \in M_{mxn}(R)$ dan R ring komutatif dengan elemen satuan, maka

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ dengan $a_{11}, a_{12}, \dots a_{mn} \in R$

Ruang kolom dari matriks A dinotasikan CS(A) = $< C_1, C_2, \dots, C_n >$ merupakan sub modul di R^m dan baris dari matriks A dinotasikan RS(A) = $< R_1, R_2, \dots, R_m >$ merupakan sub modul di R^n, tetapi sub modul-submodul ini belum tentu mempunyai basis. Karena itu perlu dilakukan inovasi sehingga dapat didefinisikan rank matriks atas ring yang tidak bertentangan dengan definisi matriks atas lapangan. Pada suatu ring dikenal sebuah himpunan $A_{nn_R}(I) = \{x \in R | r.x = 0, \forall x \in I\}$ yang disebut Annihilator dari ideal I yang menyerupai pendefinisian basis pada matriks atas lapangan, sehingga dapat digunakan untuk mencari rank matriks atas ring. Dan mengingat definisi rank matriks atas lapangan yang telah kita bahas sebelumnya juga dapat dilihat dari sisi adanya minor matriks A yang tidak nol, maka pendefinisian rank matriks atas ring dapat dilakukan melalui pengkajian ideal dari R yang dibangun semua minor $t \times t$ dari matriks A atas ring R.

Definisi 3.1: Diketahui R Ring komutatif dengan elemen satuan dan A $\in M_{mxn}(R)$. Untuk $t = 1, 2, \dots, r = \min\{m, n\}$, notasi $I_t(A)$ menyatakan ideal dari R yang dibangun oleh semua minor matriks A yang berukuran $t \times t$.

Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut:

Karena A $\in$ M_{mxn}(R), maka matriks A dapat ditulis sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ dengan } a_{ij} \in \text{R}.$$

Minor-minor matriks A yang berukuran 1 × 1 adalah

a_{11} , a_{12}, … a_{1n}, a_{21}, a_{22}, …, a_{2n}, …a_{m1}, a_{m2}, …, a_{mn} $\in$ R.

Dari minor-minor ini dapat dibentuk ideal yang dibangun oleh minor-minor 1 × 1 dari matriks A, dinotasikan I_1(A).

Sedangkan minor-minor berukuran 2 × 2 dari matriks A adalah

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} a_{(m-1)(n-1)} & a_{(m-1)n} \\ a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{vmatrix} \in \text{R}.$$

Dari minor-minor ini dapat dibentuk ideal yang dibangun oleh minor-minor berukuran 2 × 2 dari matriks A, dinotasikan I_2(A)

Dengan cara yang sama, jika t = 1, 2, …, r = min {m, n}, maka dari minor-minor matriks A yang berukuan t×t dapat dibentuk ideal yang dibangun semua minor matriks A yang berukuran t×t (M_{txt}) , dinotasikan I_t(A). Karena

$$M_{txt} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + ... + a_{1t}M_{1t} ,$$

dengan $M_{11}, M_{12}, ..., M_{1t}$ minor-minor matriks berukuran (t-1) × (t-1) , maka $M_{txt} \in I_{t-1}(A)$. Berarti semua minor matriks berukuran t×t dari matriks A berada dalam I_{t-1}(A). Dengan demikian $I_t \subseteq I_{t-1}$, sehingga diperoleh sifat berikut ini

Sifat 1. Jika A $\in$ M_{mxn}(R), dan $1 \le t \le r$ = min {m, n}, berlaku

$$I_r(A) \subseteq I_{r-1}(A) \subseteq \dots \subseteq I_2(A) \subseteq I_1(A) \subseteq R \text{ ....(1)}$$

Telah diketahui bahwa R di sini ring komutatif. Karena R ring komutatif, maka R dan {0} merupakan ideal dalam R, sehingga dalam kasus ini, t > min {m, n}, maka I_t(A) = {0}, sedangkan karena semua ideal berada di dalam R maka bisa diambil I_0(t) = R. Akibatnya definisi 3 dapat diperluas seperti berikut ini.

Definisi 3.2: Untuk semua $t \in \mathbb{Z}$ berlaku $I_t(A) = \begin{cases} (0), & \text{jika } t > \min\{m,n\} \\ R, & \text{jika } t \leq 0 \end{cases}$

Dengan demikian (1) menjadi

$\{0\} = I_{r+1}(A) \subseteq I_r(A) \subseteq I_{r-1}(A) \subseteq \ldots \subseteq I_2(A) \subseteq I_1(A) \subseteq I_0(A) = R$ ....(2)

Lemma: Jika $B \in M_{mxp}(R)$ dan $C \in M_{pxn}(R)$, maka $I_t(BC) \subseteq I_t(B) \cap I_t(A)$ untuk semua $t \in \mathbb{Z}$

Bukti:

Pembuktian lemma ini dapat dibagi dalam 3 kasus sebagai berikut:

(i) Kasus 1

Untuk $t \leq 0$ maka $I_t(BC) = R$

Perhatikan bahwa

$I_t(BC) = R$ artinya $I_t(B) = R$ dan $I_t(C) = R$, akibatnya $I_t(B) \cap I_t(C) = R$

Dengan demikian $I_t(BC) \subseteq I_t(B) \cap I_t(C)$

(ii) Kasus 2

Untuk $t > \min\{m, n\}$, maka $I_t(BC) = \{0\}$

Pada bagian ini, pembuktian dibagi dalam 4 sub kasus, yaitu

(a) Sub kasus I , $m \leq p \leq n$

Jika $m \leq p \leq n$, maka $I_t(B) = \{0\}$ dan $\{0\} \subseteq I_t(C)$, akibatnya

$I_t(B) \cap I_t(C) = \{0\}$

Dengan demikian $I_t(BC) \subseteq I_t(B) \cap I_t(C)$

(b) Sub kasus 2, $n \leq p \leq m$

Jika $n \leq p \leq m$, maka $I_t(C) = \{0\}$ dan $\{0\} \subseteq I_t(B)$, akibatnya

$I_t(B) \cap I_t(C) = \{0\}$

Berarti $I_t(BC) \subseteq I_t(B) \cap I_t(C)$

(c) Sub kasus 3 , $p < m, n$ dan $t > p$

Jika $p < m, n$ dan $t > p$, maka $I_t(B) = \{0\}$, $I_t(C) = \{0\}$, $I_t(BC) = \{0\}$, akibatnya $I_t(B) \cap I_t(C) = \{0\}$

Jadi $I_t(BC) \subseteq I_t(B) \cap I_t(C)$

(d) Sub kasus 4, $p > m, n$ dan $t > p$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Jika p > m, n dan t > p, maka $I_t(BC) = \{0\}$, $I_t(B) = \{0\}$, $I_t(C) = \{0\}$, akibatnya $I_t(B) \cap I_t(C) = \{0\}$

Dengan demikian $I_t(BC) \subseteq I_t(B) \cap I_t(C)$

(iii) Kasus 3

Untuk $1 \le t \le \min\{m, n\}$

Akan ditunjukkan $I_t(BC) \subseteq I_t(B) \cap I_t(C)$

Ekuivalen dengan menunjukkan

a. $I_t(BC) \subseteq I_t(C)$

b. $I_t(BC) \subseteq I_t(B)$

Yaitu sebagai berikut,

a. Akan ditunjukkan $I_t(BC) \subseteq I_t(C)$

Misalkan C dipartisi menjadi n kolom , maka $C = (\delta_1|\delta_2|...|\delta_n)$, dengan δ_i kolom ke-i dari C.

Telah diketahui, Jika $A \in M_{mxp}(R)$ dan $B \in M_{pxn}(R)$, maka

$$AB = (A\ Kolom_1\ (B) \mid A\ Kolom_2\ (B) \mid \dots \mid A\ Kolom_n\ (B))$$

Berdasarkan sifat tersebut, diperoleh:

$$BC = (B\delta_1|B\delta_2|...|B\delta_n) = B(\delta_1|\delta_2|...|\delta_n)$$

Misalkan Δ adalah sebarang minor t x t dari BC, yaitu pembangun ideal $I_t(BC)$, dan kolom-kolom dari Δ berasal dari kolom-kolom ke $j_1, j_2, \dots, j_t$ dengan $j_1 < j_2 < \dots < j_t$ dari matriks BC. Karena $\{\delta_{j_1}, \delta_{j_2}, ..., \delta_{j_t}\} \subset \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$,

maka

$$I_t(\delta_{j_1}, \delta_{j_2}, ..., \delta_{j_t}) \subseteq I_t(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = I_t(C)$$

dan karena

$$\Delta \in I_t((B\delta_{j_1}|B\delta_{j_2}|...|B\delta_{j_t})) = I_t(B(\delta_{j_1}|\delta_{j_2}|...|\delta_{jt}))$$

maka di sini cukup cukup untuk menunjukkan

$$I_t(B(\delta_{j_1}|\delta_{j_2}|...|\delta_{jt})) \subseteq I_t(\delta_{j_1}|\delta_{j_2}|...|\delta_{jt})$$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Dengan kata lain , dalam membuktikan $\Delta \in I_t(C)$, tanpa mengurangi keberlakuan secara umum, kita dapat mengasumsikan $t = n \leq m$. Dengan demikian $\Delta = \Delta(i_1, i_2, \ldots, i_n; 1, 2, \ldots, n)$ untuk suatu pilihan indeks-indeks baris $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq m$.

Misalkan $B = (b_{ij}) \in M_{mxp}(R)$, maka

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Row_i(BC)} &= \mathrm{Row_i(B)\ C} \\
&= \mathrm{Row_i(B)}\begin{pmatrix} Row_1(C) \\ Row_2(C) \\ . \\ . \\ . \\ Row_p(C) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \ldots & b_{ip} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Row_1(C) \\ Row_2(C) \\ . \\ . \\ . \\ Row_p(C) \end{pmatrix} \\
&= b_{i1}Row_1(C) + b_{i2}Row_2(C) + \ldots + b_{ip}Row_p(C) \\
&= \sum_{j=1}^{p} b_{ij}Row_j(C), \forall i = 1,2,\ldots,m
\end{aligned}
$$

Sehingga

$$\Delta(i_1, i_2, \ldots, i_n; 1,2,\ldots,n) = \det((Row_{1_1}(BC);\ldots; Row_{i_n}(BC))$$

$$= \det((\sum_{j=1}^{p} b_{i_1 j}Row_j(BC);\ldots; \sum_{j=1}^{p} b_{i_n j}Row_j(BC)))$$

$$= \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{p} c_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \det((Row_{\alpha_1}(C);\ldots; Row_{\alpha_n}(C)))$$

$c_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ berbagai konstan dalam R akibat ekspansi determinan. Simbol $\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n=1}^{p}$ berarti jumlahan diambil atas semua indeks $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Untuk masing-masing $i = 1, 2, \ldots, n$, indeks α_i berjalan dari 1 sampai p.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Perhatikan bahwa untuk semua pilihan α_1, …, α_n $\det((Row_{\alpha_1}(C);...;Row_{\alpha_n}(C)))$ minor $n \times n$ dari matriks C. Berarti untuk semua pilihan α_1, …, α_n $\det((Row_{\alpha_1}(C);...;Row_{\alpha_n}(C))) \in$ I_n(C). Determinan-determinan ini semuanya bernilai nol jika $n > p$. Dengan demikian $\Delta(i_1, i_2, ..., i_n; 1, 2, ..., n) \in$ I_t(C). Karena Δ sebarang pembangun dari I_t(BC) , maka dapat disimpulkan bahwa $I_t(BC) \subseteq I_t(C)$.

Terbukti

b. Akan ditunjukkan $I_t(BC) \subseteq I_t(B)$ untuk semua $t \in \mathbb{Z}$

Sebelumnya akan ditunjukkan $I_\alpha(A^t) = I_\alpha(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$.

Misalkan $\Delta = (i_1, i_2, ..., i_\alpha; j_1, j_2, ... j_\alpha)$ minor $\alpha\times\alpha$ dari matriks A dengan $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Maka $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_\alpha} \\ . & & . \\ . & \cdots & . \\ . & & . \\ a_{i_\alpha j_1} & \cdots & a_{i_\alpha j_\alpha} \end{vmatrix} = |A_\alpha| = |A_\alpha{}^t|$$

minor $\alpha\times\alpha$ dari A^t

Dengan demikian $I_\alpha(A^t) = I_\alpha(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$.

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$$I_t(BC) = I_t((BC)^t) = I_t(C^tB^t) \subseteq I_t(B^t) = I_t(B)$$

Karena $I_t(BC) \subseteq I_t(C)$ dan $I_t(BC) \subseteq I_t(B)$ maka $I_t(BC) \subseteq I_t(C) \cap I_t(B)$

Akibat : Misalkan A $\in M_{m\times n}$ (R), P$\in$ Gl(m, R) dan Q $\in$ Gl(n,R). Maka $I_t(PAQ) = I_t(A)$ untuk semua $t \in \mathbb{Z}$. Dengan Gl(m, R) Himpunan matriks invertible dalam $M_{m\times m}$ (R), segangkan himpunan Gl(n,R) merupakan grup dengan operasi kelipatan matriks.

Bukti: Berdasarkan Lemma 1

$$I_t(PA) \subseteq I_t(A) = I_t(P^{-1}(PA)) \subseteq I_t(PA)$$

Karena itu $I_t(PA) = I_t(A)$ untuk semua $t \in \mathbb{Z}$. Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan $I_t(PA) = I_t(PAQ)$. Akibatnya $I_t(PAQ) = I_t(PA) = I_t(A)$.

Terbukti.

Sekarang kita definisikan rank matriks A $\in$ $M_{m\times n}$.

Definisi 3.3: Annihilator ideal I dalam R, dinotasikan $Ann_R(I)$ adalah $Ann_R(I) = \{r \in R \mid r.i = 0, \forall i \in I\}$

Sifat 2. Jika $I \subseteq J$ maka $Ann_R(J) \subseteq Ann_R(I)$

Bukti : Diambil sebarang $r \in Ann_R(J)$, maka $r.j = 0$, $\forall j \in J$. Karena $I \subseteq J$ maka setiap $i \in I$ maka $i \in J$. Jadi $r.i = 0$, $\forall i \in I$.

Dengan kata lain $r \in Ann_R(I)$

Karena $r \in Ann_R(J) \Rightarrow r \in Ann_R(I)$, berarti $Ann_R(J) \subseteq Ann_R(I)$. Terbukti

Sedangkan

$Ann_R(R) = \{ r \in R \mid r.s = 0, \forall s \in R\} = \{0\}$ dan

$Ann_R(0) = \{ r \in R \mid r.0 = 0\} = R$

Berdasarkan (2) dengan menggunakan sifat 1 maka untuk sebarang matriks $A \in M_{m\times n}(R)$ dengan $r = \min\{m, n\}$ berlaku

$R = Ann_R(\{0\}) = Ann_R(I_{r+1}(A)) \supseteq Ann_R(I_r(A)) \supseteq Ann_R(I_{r-1}(A)) \supseteq \ldots \supseteq Ann_R(I_2(A)) \supseteq Ann_R(I_1(A)) \supseteq Ann_R(I_0(A)) = Ann_R(R) = \{0\}$

Atau

$\{0\} = Ann_R(I_0(A)) \subseteq Ann_R(I_1(A)) \subseteq Ann_R(I_2(A)) \subseteq \ldots \subseteq Ann_R(I_{r-1}(A)) \subseteq Ann_R(I_r(A)) \subseteq Ann_R(I_{r+1}(A)) = R$

Jadi jika $Ann_R(I_t(A)) \neq \{0\}$ maka $Ann_R(I_k(A)) \neq \{0\}$, $\forall k \geq t$.

Definisi 3.4: Misalkan $A \in M_{m\times n}(R)$. Rank matriks A, dinotasikan rank(A), didefinisikan sebagai maks $\{t \mid Ann_R(I_t(A)) = \{0\}\}$

Berdasarkan definisi di atas, diperoleh beberapa sifat dari rank(A), sebagai berikut:

Sifat 3. Jika $A \in M_{m\times n}(R)$, maka

a. $0 \leq \text{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$
b. $\text{Rank}(A) = \text{rank}(A^t)$
c. Rank(A) = rank(PAQ) untuk setiap $P \in Gl(m, R)$ dan $Q \in Gl(n, R)$
d. Rank(A) = 0 jika dan hanya jika $Ann_R(I_1(A)) \neq \{0\}$
e. Jika $m = n$, maka rank(A) < n jika dan hanya jika $\det(A) \in Z(R)$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Z(R) merupakan himpunan pembagi nol dari R

Bukti

a. Karena $I_0(A) = R$ dan $Ann_R(R) = 0$, maka rank(A) ≥ 0. Di pihak lain, jika t > min{m, n}, maka $I_t(A) = \{0\}$ dan $Ann_R(0) = R$, sehingga rank(A) $\leq$ min $\{m , n\}$. Terbukti $0 \leq$ rank(A) $\leq$ min$\{m, n\}$

b. Karena $I_\alpha(A) = I_\alpha(A^t)$, $\forall\alpha \in \mathbb{Z}$, maka rank(A) = rank($A^t$). Terbukti

c. Pernyataan ini sebagai akibat langsung dari Akibat

Sifat d dan e diturunkan langsung dari definisi rank(A).

Misalkan $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(R)$. Perhatikan kembali sifat bahwa rank(A) = 0 jika dan hanya jika $Ann_R(I_1(A)) \neq \{0\}$, dengan kata lain, ada $x \in$ R tidak nol sedemikian sehingga $xa_{ij} = 0$, untuk semua $i = 1, 2, \ldots, m$ dan $j = 1, 2, \ldots, n$. Khususnya, tidak seperti pada kasus klasik, sebuah matriks dapat mempunyai rank nol walaupun matriksnya bukan matriks nol.

Berikut beberapa contoh perhitungan rank matriks.

Contoh 3:

Diketahui $R = \mathbb{Z}/ 6\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

a. Misalkan A = $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(R)$

Jelas A bukan matriks nol. Setiap elemen di A merupakan pembagi nol dalam R. Minor berukuran 2×2 dari matriks A adalah 4.

Diperoleh $I_2(A) = 4R$.

Karena 4.3 = 0 dan 4.0 = 0 dengan 0 dan 3 di dalam R, sedangkan $4.x \neq 0$, $\forall\ x \in R - \{0, 3\}$, maka $Ann_R(I_2(A)) = \{0, 3\} = 3R \neq \{0\}$

Sedangkan $I_1(A) = 2R$.

Karena 2.0 = 0 dan 2.3 =0 dengan 0 dan 3 di dalam R, sedangkan $2.x \neq 0$, $\forall\ x \in R - \{0, 3\}$, maka $Ann_R(I_1(A)) = \{0, 3\} = 3R \neq \{0\}$

Berdasarkan sifat d, maka rank(A) = 0

b. Misalkan C = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(R)$

$I_1(C) = \{ 1, 2, 3, 5\} = R + 2R + 3R + 5R = R$, sehingga $Ann_R(C) = \{0\}$

$I_2(C) = 5R = R$, sehingga $Ann_R(C) = \{0\}$

Karena berdasarkan definisi, rank (A) = maks $\{t \mid \mathrm{Ann}_R(I_t(A)) = \{0\}\}$, maka rank(C) = 2.

Hasil ini bersesuaian dengan Sifat e.

4. Kesimpulan

Dari pembahasan rank matriks atas lapangan dan rank matriks atas ring di atas, maka dapat disimpulkan bahwa definisi rank atas ring adalah yang palling umum, yang masih bisa berlaku dalam lapangan. Misalkan A $\in M_{m\times n}(R)$. Rank matriks A, dinotasikan rank(A), didefinisikan sebagai maks $\{t \mid \mathrm{Ann}_R(I_t(A)) = \{0\}\}$ Jika F adalah lapangan dan $A \epsilon M_{m\times n}(F)$, maka berlaku $Ann_F\big(I_t(A)\big) = \{0\}$ jika dan hanya jika $I_t(A) \neq \{0\}$. Dari sini diperoleh bahwa $rk(A)$ adalah t maksimal sehingga matriks A memiliki submatriks berukuran *t x t* yang determinannya tak nol. Dengan kata lain, $rk(A) = rank_F(A)$. Dengan demikian dapat diambil kesimpulan bahwa definisi rank matriks atas $A \epsilon M_{m\times n}(R)$ ring tetap dipenuhi untuk sebarang matriks atas lapangan $A \epsilon M_{m\times n}(F)$.

5. Daftar Pustaka

Anton, H. *Aljabar Linear Elementer*, 1987, Penerbit Erlangga, Jakarta.

Brown, W. C., *Matrices Over Commutative Rings*, 1992, Marcel Dekker Inc, New York.