ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Bilangan Fibonacci dan Lucas dengan Subskrip Riil

Suzyanna
Universitas Airlangga Fakultas Sains Dan Teknologi Departemen Matematika
e-mail : suzyoetomo@gmail.com

Abstrak

Dalam makalah ini pengertian bilangan Fibonacci dan Lucas diberikan dengan subskrip riil. Secara umum, jika subskrip bukan integer, maka merupakan bilangan kompleks. Langkah berikutnya akan diberikan beberapa sifat dasar bilangan Fibonacci dan Lucas , membuktikan beberapa sifat dasar bilangan tersebut serta beberapa aplikasi.
Kata kunci: bilangan Fibonacci, bilangan Lucas, formula Euler

1. PENDAHULUAN

Leonardo Pisano Fibonacci lahir sekitar tahun 1170 dan meninggal sekitar tahun 1250 di Pisa, Italia. Dia menulis teks matematika, antara lain memperkenalkan Eropa dengan notasi Hindu-Arab untuk bilangan. Meskipun buku-bukunya harus ditulis dengan tangan, tetapi teks tentang natematika beredar luas.

Dalam beberapa literatur didefinisikan bahwa bilangan Fibonacci dan Lucas adalah dengan subskrip (index) riil.

Pada umumnya menurut Andre-Jeannin (1991),Horadam & Shannon(1988) dan J.Lahr(1981) definisi akan rumit jika subskrip bukan bilangan bulat. Dalam makalah ini didefinisikan bahwa F_x dan L_x adalah riil ketika index x adalah riil.

Pada bagian berikut akan diberikan ekspresi dari F_x dan L_x dan beberapa sifat dari mereka lebih tepatnya yaitu memberikan ekspresi dalam bentuk eksponensial.

Kami membatasi untuk mempertimbangkan nilai-nilai hanya nonnegatif dari subskrip, sehingga dalam semua pernyataan yang melibatkan bentuk F_{x-y} dan L_{x-y} dipahami bahwa $y \leq x$

2. PEMBAHASAN

2.1 Definisi Dasar

Perbandingan dari tiap dua bilangan Fibonacci adalah konvergen dari suatu perbandingan hasil bagi yang takhingga [1,1,1,....] = x

Untuk n yang besar : $\frac{F_{n+1}}{F_n} \approx [1,1,1 \ldots.] = x$ (1)

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Sebut saja bahwa F_n mendekati $C\,x^n$ untuk n besar, C adalah konstan positif dan x didefinisikan dengan (1). Jika kita substitusikan $C\,x^n$ untuk S_n yang didefinisikan sebagai $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}\ \ n \geq 2,$ (2)

maka di dapat : $C\,x^{n+1} = C\,x^n + C\,x^{n-1}\,, n \geq 1$ (3)

Dengan membagi kedua ruas persamaan (2) dengan $C\,x^{n-1}$, maka x memenuhi persamaan : $$x^2 = x + 1 \quad (4)$$

Hal tersebut dikatakan sebagai *persamaan karakteristik* dari relasi rekursi (3).

Kita dapat menuliskan persamaan (4) sebagai:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

atau disederhanakan menjadi:

$$x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Dua penyelesaian tersebut adalah $\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ dan $\beta = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{5}+1\right)$ (5)

Karena β adalah negatif, penyelesaian yang memenuhi (1) adalah:

$$\alpha = [1,1,1, \ldots.] = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right) \quad (6)$$

Karena $S_n = \alpha^n$ dan $S_n = \beta^n$ yang keduanya memenuhi relasi rekursi (2), dan telah dibuktikan bahwa tiap kombinasi linier dari dua penyelesaian juga memenuhi (2), sehingga $$S_n = A\,\alpha^n + B\,\beta^n \quad (7)$$

yang memenuhi (2). Dalam bentuk khusus dari barisan Fibonacci dapat dinyatakan sebagai: $$F_n = A\,\alpha^n + B\,\beta^n \quad (8)$$

dengan $F_1 = A\,\alpha^n + B\,\beta^n = 1$ dan $F_2 = A\,\alpha^2 + B\,\beta^2 = 1$ (9)

Karena keduanya α dan β memenuhi (4), maka $\alpha^2 - \alpha = \beta^2 - \beta = 1$

atau $\beta^2 = 1 + \beta$ dan $\alpha^2 = 1 + \alpha$

Tinjau F_n akan naik untuk n bertambah besar.

$x^2 - x - 1 = (x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$ sehingga :

$$\alpha + \beta = 1\,,\ \alpha\,\beta = -1 \ \text{ dan } \alpha - \beta = \sqrt{5} \quad (10)$$

Nilai β mendekati – 0.618, jadi $|\beta| < 1$

Berikut ini terdapat tiga bentuk identitas yang memenuhi bilangan Fibonacci dan Lucas yang dinyatakan dengan F_n dan L_n , $n \in N$ merupakan bentuk umum definisi F_n dan L_n untuk indeks n:

$$\sqrt{5}\,F_n = \alpha^n - \beta^n \tag{11}$$

$$F_{n+1} - \beta\,F_n = \alpha^n \tag{12}$$

$$L_n = 2\,\alpha^n - \sqrt{5}\,F_n \tag{13}$$

dengan $n \in N$, sedang (12) dan (13) telah dibuktikan oleh Rabinowitz dan Witula. Bahwa dalam kenyataannya proses prosedur merupakan definisi umum dari F_n dan L_n dengan indeks $n \in R$. Persamaan (11) sampai (13) telah dibuktikan oleh Suzyanna (2011).

Secara umum bentuk bilangan Fibonacci F_s pertama-tama diberikan untuk $s \in [0,1)$ berdasarkan (11) bahwa:

$$\sqrt{5}\,F_s = \alpha^s - e^{i\,\pi\,s}\,(-\beta)^s \tag{14}$$

Dan untuk langkah berikutnya untuk $s \in [1,2)$, untuk $s \in [2,3)$, ... dan terakhir untuk $s \in [-1,0)$, untuk $s \in [-2,-1)$,.... yang dapat dilihat pada relasi berikut yaitu bahwa:

$$F_{s+1} = \alpha^s + \beta\,F_s \tag{15}$$

Akibat 2.2

Tinjau bahwa $\alpha > 0$ dan $-\beta > 0$, dalam (14) hanya jika $e^{i\,\pi\,s}$ adalah fungsi kompleks. Selanjutnya dari (13) maka $L_s = 2\,\alpha^s - \sqrt{5}\,F_s$, dengan $s \in R$ (16)

yang didefinisikan sebagai bentuk umum bilangan Lucas.

Akibat 2.3

Dari (14) didapat: $\alpha^s = \sqrt{5}\,F_s + e^{i\,\pi\,s}\,(-\beta)^s$, sedang dari (15) didapat :

$$\begin{aligned} F_{s+1} &= \alpha^s + \beta\,F_s \\ &= \sqrt{5}\,F_s + e^{i\,\pi\,s}\,(-\beta)^s + \beta\,F_s \\ &= e^{i\,\pi\,s}\,(-\beta)^s + \left(\beta + \sqrt{5}\right) F_s \\ &= e^{i\,\pi\,s}\,(-\beta)^s + \alpha\,F_s \end{aligned} \tag{17}$$

3. SIFAT-SIFAT DASAR

Beberapa sifat dasar dari F_s dan L_s dengan $s \in R$ adalah berikut:

$$\sqrt{5}\,F_s = \alpha^s - e^{i\,\pi\,s}\,(-\beta)^s \tag{18}$$

$$L_s = \alpha^s + e^{i\,\pi\,s}\,(-\beta)^s \tag{19}$$

$$F_{s+2} = F_{s+1} + F_s \tag{20}$$

$$L_{s+2} = L_{s+1} + L_s \tag{21}$$

$$F_{-s} = -\,e^{-i\,\pi\,s}\,F_s \tag{22}$$

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$L_{-s} = e^{-i\pi s} L_s \tag{23}$$

$$F_{2s} = F_s L_s \tag{24}$$

$$L_s = F_{s+1} + F_{s-1} \tag{25}$$

$$e^{i\pi t} L_{s-t} = F_{t+1} L_s - F_t L_{s+1} \tag{26}$$

$$F_s F_t - F_{s-r} F_{t+r} = e^{i\pi(s-r)} F_r F_{t-s+r} \tag{27}$$

$$F_{s+t+1} = F_{s+1} F_{t+1} + F_s F_t \tag{28}$$

4. BUKTI BEBERAPA IDENTITAS SIFAT DASAR

(19) $L_s = 2\alpha^s - \sqrt{5} F_s = 2\alpha^s - \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\alpha^s - e^{i\pi s}(-\beta)^s\right]$

$= 2\alpha^s - \left[\alpha^s - e^{i\pi s}(-\beta)^s\right]$

$= \alpha^s + e^{i\pi s}(-\beta)^s$

(20) $F_{s+2} = \alpha^{s+1} + \beta F_{s+1} = \alpha^{s+1} + \beta(\alpha^s + \beta) F_s$

$= \alpha^s(\alpha + \beta) + \beta^2 F_s = \alpha^s + (\beta + 1) F_s$

$= \alpha^s + \beta F_s + F_s = F_{s+1} + F_s$

(21) $L_{s+1} + L_s = 2\alpha^{s+1} - \sqrt{5} F_{s+1} + 2\alpha^s - \sqrt{5} F_s$

$= 2\alpha^s(\alpha + 1) - \sqrt{5}(F_{s+1} + F_s)$

$= 2\alpha^s . \alpha^2 - \sqrt{5} F_{s+2} = 2\alpha^{s+2} - \sqrt{5} F_{s+2}$

$= L_{s+2}$

(22) $F_{-s} = -e^{-i\pi s} F_s$

$\sqrt{5} F_s = \alpha^s - e^{i\pi s}(-\beta)^s$ seningga

$\sqrt{5} F_{-s} = \alpha^{-s} - e^{i\pi(-s)}(-\beta)^{-s}$

$= (-\beta)^s - e^{i\pi(-s)} . \alpha^s$

$= (-\beta)^s - e^{i\pi(-s)}\left[\sqrt{5} F_s + e^{i\pi s}(-\beta)^s\right]$

$= (-\beta)^s - e^{-i\pi s}\sqrt{5} F_s - (-\beta)^s$

$= -e^{-i\pi s}\sqrt{5} F_s$ sehingga :

$F_{-s} = -e^{-i\pi s} F_s$

(23) dari (19) didapat $L_s = \alpha^s + e^{i\pi s}(-\beta)^s$, sehingga

$L_{-s} = \alpha^{-s} + e^{-i\pi s}\left(-\beta\right)^{-s}$

$e^{-i\pi s} L_s = e^{-i\pi s}\left[\alpha^s + e^{i\pi s}(-\beta)^s\right]$

$= e^{-i\pi s}\alpha^s + (-\beta)^s$

$$= e^{-i\pi s}\left(-\beta\right)^{-s} + \alpha^{-s}$$
$$= L_{-s}$$

(24) $F_s\, L_s \overset{(18-19)}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^s - e^{i\pi s}(-\beta)^s\right]\left[\alpha^s + e^{i\pi s}(-\beta)^s\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^{2s} + \alpha^s . e^{i\pi s}(-\beta)^s - \alpha^s . e^{i\pi s}(-\beta)^s - e^{2i\pi s}(-\beta)^{2s}\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^{2s} - e^{2i\pi s}(-\beta)^{2s}\right]$$
$$F_s\, L_s = F_{2\,s}$$

(25) Dari (14) dan (15) diperoleh :

$$L_s = 2\,\alpha^s - \sqrt{5}\,F_s = 2\,\alpha^s + (\beta - \alpha)\,F_s$$
$$= (\alpha^s + \beta\,F_s) + (\alpha^s - \alpha\,F_s)$$
$$= F_{s+1} + \alpha\,(\alpha^{s-1} - F_s)$$
$$= F_{s+1} - \alpha\,\beta\,F_{s-1}$$
$$= F_{s+1} + F_{s-1}$$

(26) Di satu sisi ditunjukkan bahwa:

$$e^{i\pi t}\,\alpha^s\left(-\beta\right)^t + e^{i\pi s}\,\alpha^t\left(-\beta\right)^s =$$
$$e^{i\pi t}\,\alpha^t\,(-\beta)^t \,.\left(\alpha^{s-t} + e^{i\pi(s-t)}(-\beta)^{s-t}\right) \overset{(19)}{=} e^{i\pi t}\,L_{s-t}.$$

Di sisi yang lain dengan (15) dan (17), didapat bahwa:

$$e^{i\pi t}\,\alpha^s\left(-\beta\right)^t + e^{i\pi s}\,\alpha^t\left(-\beta\right)^s =$$
$$(F_{s+1} - \beta\,F_s)\;x\;(F_{t+1} - \alpha\,F_t) + (F_{t+1} - \beta\,F_t)\,(F_{s+1} - \alpha\,F_s)$$
$$= 2\,(F_{s+1}F_{t+1} - F_s\,F_t\,) - (\alpha + \beta)x\,(F_sF_{t+1} + F_{s+1}\,F_t)$$
$$= 2\,(F_{s+1}F_{t+1} - F_s\,F_t\,) - F_sF_{t+1} - F_{s+1}\,F_t$$
$$= F_{t+1}(2\,F_{s+1} - F_s) - F_t(2\,F_s + F_{s+1}\,)$$
$$\overset{(20)(25)}{=} F_{t+1}L_s - F_t\;L_{s+1}$$

Sehingga: $e^{i\pi t}\,L_{s-t} = F_{t+1}L_s - F_t\;L_{s+1}$

5. BEBERAPA APLIKASI

Andaikan didefinisikan:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^s := \begin{bmatrix}F_{s+1} & F_s\\ F_s & F_{s-1}\end{bmatrix} \text{ untuk tiap } s \in R \qquad (29)$$

Misalkan :

$$\begin{bmatrix} F_{s+1} & F_s \\ F_s & F_{s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{t+1} & F_t \\ F_t & F_{t-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{s+1}\,F_{t+1} + F_s\,F_t & F_{s+1}F_t + F_sF_{t-1} \\ F_s\,F_{t+1} + F_{s-1}\,F_t & F_s\,F_t + F_{s-1}\,F_{t-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{s+t+1} & F_{s+t} \\ F_{s+t} & F_{s+t-1} \end{bmatrix}$$

Berarti (29) adalah benar untuk bilangan rational s. Berikutnya cukup pernyataan untuk semua $s \in R$

Dengan cara serupa dapat pula didefinisikan:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^s := \begin{bmatrix} F_{s+1} & -F_s \\ -F_s & F_{s-1} \end{bmatrix}, s \in R \qquad (30)$$

6. SIMPULAN

Penulis dapat membuktikan beberapa identitas dasar dan menerapkan dalam matriks. Diharapkan untuk selanjutnya dapat menerapkan atau memberikan contoh ke dalam matriks dengan pangkat bulat dengan elemen-elemen dalam matriks adalah bilangan Lucas.

7. DAFTAR PUSTAKA

[1] Andre-Jeannin R.,1991,*Generelized Complex Fibonacci and Lucas Function,Fibonacci Quarterly 29.:,13-18.*

[2] Bijendra Singh,Pooja Bhadouria and Omprakash.,2011,*General Identities Involving Common Factors of Fibonacci and Lucas Numbers,*International Journal Algebra,Vol 5, No.13, 637-645.

[3] Filipponi Piero.,1993, *Real Fibonacci and Lucas Numbers with Real Subscripts,*Fondazione Ugo Bordoni I-00142, Rome,Italy.

[4] Horadam A.F and Shannon.,1988, *Fibonacci and Lucas Curves,* Fibonacci Quarterly 26.1, 3 – 13.

[5] Halsey E., 1965, *The Fibonacci Numbers F_u Where u Is Not Integer*, Fibonacci Quarterly 3.2, 147-52.

[6] Lahr.J.,1981,*Theorie Elektrischer Leitungen unter Anwendung und Erweiterung der Fibonacci Funktion,*Disertation ETH No.6958,Zurich.

[7] Parker F.D., 1968, " *A Fibonacci Function,* Fibonacci Quarterly 6.1 : 1-2.

[8] Phillips George M., 2005, *Mathematics Is Not a Spectator Sport,* Springer,

New York.

[9] Suzyanna., 2011, *Hubungan antara Formula Binet dan Bilangan Fibonacci*, Surabaya.

[10] Witula,R.,2011,*Fibonacci and Lucas Numbers for Real Indices and Some Applications*,Acta Physica Polonoca A, vol 120.