ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

A – 14

Homomorfisma Pada Semimodul Atas Aljabar Max-Plus

Oleh :
Musthofa
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Abstrak

Konsep homorfisma telah banyak dibahas pada beberapa struktur aljabar yaitu pada ruang vektor atas lapangan dan modul atas ring komutatif. Jika T : V $\rightarrow$ V merupakan suatu homomorfisma baik pada modul atau ruang vektor, maka kernel T didefinisikan sebagai ker T = { x/ T(x) = 0 }. Namun, pada semimodule, definisi ini tidak dapat digunakan. Hal ini disebabkan pada semimodule operasi penjumlahan tidak memilki invers. Pada makalah ini, akan dibahas homomorfisma pada semimodule atas aljabar max-plus dan bagaimana mendefinisikan kernelnya.
Kata kunci: Semimodul, Aljabar max-plus, Homomorfisma, Kernel.

PENDAHULUAN

Aljabar maxplus adalah himpunan P $\cup$ {-∞}, dengan P himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum, dinotasikan dengan $\oplus$ dan operasi penjumlahan, yang dinotasikan dengan $\otimes$. Selanjutnya (P $\cup$ {-∞}, $\oplus$, $\otimes$) dinotasikan dengan $P_{\max}$ dan {-∞} dinotasikan dengan ε. Elemen ε merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi $\otimes$.

Sebagai suatu struktur aljabar, aljabar max-plus merupakan semiring idempoten. Lebih lanjut, karena terhadap operasi penjumlahan ($\oplus$) mempunyai invers, maka aljabar max-plus merupakan semifield, yaitu :

1. (P $\cup$ {-∞}, $\oplus$) merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral {-∞}
2. (P $\cup$ {-∞}, $\otimes$) merupakan grup komutatif dengan elemen identitas 0
3. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ bersifat distributif
4. Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, yaitu

$\forall\, a \in P_{\max}$, $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$

Analog pada ruang vektor atau modul, yaitu jika *F* suatu lapangan, maka selalu dapat dibentuk suatu ruang vektor atas lapangan *F*, sehingga jika *S* suatu semifield, maka selalu dapat dibentuk semimodul atas semifield *S*. Beberapa kajian pada berbagai struktur aljabar adalah pemetaan linear (homomorfisma). Karena pada suatu semimodul invers terhadap operasi pertama (operasi maximum pada aljabar max plus) tidak mempunyai invers, maka terdapat perbedaan yang cukup mendalam pada pendefinisian kernel suatu homomorfisma pada semimodul. Oleh karena itu pada makalah ini akan dibahas homomorfisma pada semimodul termasuk bagaimana mendefinisikan kernel sehingga tetap konsisten dengan definisi kernel pada modul atau ruang vektor.

PEMBAHASAN

Berikut ini terlebih dahulu akan dibahas dua struktur aljabar yaitu semiring dan semifield .

1. Semiring dan Semifield

Definisi 1.1 *Suatu semiring* (S, $\oplus$, $\otimes$) *adalah himpunan tak kosong S disertai dengan dua operasi biner* $\oplus$ *dan* $\otimes$ *yang memenuhi aksioma berikut* :

1. (S, $\oplus$) *merupakan monoid komutatif dengan elemen netral* ε, *yaitu* $\forall\, x,y,z \in S$ *memenuhi*

   $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

   $x \oplus y = y \oplus x$

   $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$

2. (S, $\otimes$) *merupakan monoid dengan elemen satuan e, yaitu* $\forall\, x,y,z \in S$ *memenuhi*

   $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

   $x \otimes e = e \otimes x = x$

3. *Elemen netral* ε *merupakan elemen penyerap terhadap operasi* $\otimes$, *yaitu* $\forall\, x \in S$, $\varepsilon \otimes x = x \otimes \varepsilon = \varepsilon$.

4. *Operasi* $\otimes$ *bersifat distributif terhadap operasi* $\oplus$, *yaitu* $\forall\, x,y,z \in S$ *berlaku*

   $(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$

   $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

Contoh 1.2. Diberikan $P_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} P \cup \{-\infty\}$ dengan P adalah himpunan semua bilangan real.

Didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada P_ε sebagai berikut:

$\forall\, x,y \in P_\varepsilon$, $x \oplus y = \max(x, y)$ dan $x \otimes y = x + y$

Jadi, $7 \oplus 11 = \max (7,11) = 11$ dan $7 \otimes 11 = 7 + 11 = 18$.

(P_ε , $\oplus$, $\otimes$) merupakan semiring dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$, karena pada (P_ε , $\oplus$, $\otimes$) berlaku sifat-sifat berikut:

1. (P_ε , $\oplus$) merupakan monoid komutatif dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$(x \oplus y) \oplus z = \max(\max(x,y),z) = \max(x,y,z) = \max(x,\max(y,z))) = x \oplus (y \oplus z)$,

$x \oplus y = \max(x, y) = \max(y, x) = y \oplus x$,

$x \oplus \varepsilon = \max(x, -\infty) = \max(-\infty, x) = \varepsilon \oplus x = x$.

2. $(P_\varepsilon , \oplus)$ merupakan monoid dengan elemen satuan $e = 0$.

   $(x \otimes y) \otimes z = (x + y) + z = x + (y + z) = x \otimes (y \otimes z)$,

   $x \otimes e = x + 0 = 0 + x = e \otimes x = x$.

3. Elemen netral $\varepsilon = -\infty$ merupakan elemen penyerap terhadap operasi $\otimes$.

   $x \otimes \varepsilon = x + (-\infty) = -\infty = -\infty + x = \varepsilon \otimes x$.

4. Distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$.

   $(x \oplus y) \otimes z = \max(x,y) + z = \max(x + z, y + z) = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$,

   $X \otimes (y \oplus z) = x + \max(y,z) = \max(x + y, x + z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$.

Selanjutnya untuk memudahkan penulisan, $(P_\varepsilon , \oplus, \otimes)$ ditulis sebagai P_{max} dan dinamakan dengan *aljabar max-plus*.

Definisi 1.3. *Semiring* $(S, \oplus, \otimes)$ *dikatakan semiring komutatif jika operasi* $\otimes$ *bersifat komutatif, yaitu* $\forall x,y \in S, x \otimes y = y \otimes x$.

Definisi 1.4 *Semiring* $(S, \oplus, \otimes)$ *dikatakan semiring idempoten atau dioid jika operasi* $\oplus$ *bersifat idempoten, yaitu* $\forall x \in S, x \oplus x = x$.

Contoh 1.5. Semiring P_{max} merupakan semiring komutatif dan semiring idempoten(dioid), yaitu $\forall x,y \in P_{max}$, $x \otimes y = x + y = y + x = y \otimes x$, dan $x \oplus x = \max(x,x) = x$.

Definisi 1.6. *Semiring komutatif* $(S, \oplus, \otimes)$ *dikatakan semifield jika setiap elemen tak netralnya mempunyai invers terhadap operasi* $\otimes$*, yaitu :*

$$\forall x \in S \backslash \{\varepsilon\}, \exists\, y \in S , x \otimes y = y \otimes x = e.$$

Contoh 1.7. Semiring komutatif P_{max} merupakan semifield, sebab untuk setiap $x \in P$ terdapat $-x \in P$, sehingga $x \otimes (-x) = x + (-x) = 0 = e$.

Teorema 1.8. *Jika operasi* $\oplus$ *pada semiring* $(S, \oplus, \otimes)$ *bersifat idempoten, maka elemen invers terhadap operasi* $\oplus$ *tidak ada.*

Bukti :

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Ambil sebarang $x \neq \varepsilon \in S$ dan andaikan ada $y \in S$ sehingga $x \oplus y = \varepsilon$. Karena $\oplus$ idempoten, maka

$$x = x \oplus \varepsilon = x \oplus (x \oplus y) = (x \oplus x) \oplus y = x \oplus y = \varepsilon .$$

Kontradiksi dengan $x \neq \varepsilon$. Jadi elemen invers terhadap operasi $\oplus$ tidak ada. □

2. Semimodul atas Semiring

Semimodul atas semiring didefinisikan seperti modul atas ring.

Definisi 2.1 *Semimodul kiri atas semiring (S, $\oplus$, $\otimes$) adalah himpunan monoid komutatif* (M,$\oplus$) *yang dilengkapi operasi eksternal yaitu pemetaan pergandaan skalar (kiri):*

$$\alpha : S \times M \to M$$
$$(s,x) \mapsto sx$$

Dan memenuhi aksioma-aksioma: ($\forall x,y \in M$) dan ($\forall r,s \in S$)

(i) $r (x \oplus y) = rx \oplus ry$

(ii) $(r \oplus s) x = rx \oplus sx$

(iii) $r (sx) = (rs)x$

(iv) $x \otimes \varepsilon = \varepsilon$, $x \otimes e = x$, *dengan* ε *adalah elemen netral terhadap operasi* $\oplus$ *dan* e *elemen netral terhadap operasi* $\otimes$.

Contoh 2.2 Diberikan $\mathbb{R}^n_{\max} = \{\bar{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T / x_i \in \mathbb{R}_{\max}, i = 1, 2, ..., n\}$. Selanjutnya untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n_{\max}$ dan $r \in \mathbb{R}_{\max}$ didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ sebagai berikut :

$\bar{x} \oplus \bar{y} = [x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \ldots, x_n \oplus y_n]^T$.

$r \otimes \bar{x} = [r \otimes x_1, r \otimes x_2, \ldots, r \otimes x_n]^T$.

Jadi $\mathbb{R}^n_{\max}$ dapat dipandang sebagai $\mathbb{R}^{n\times 1}_{\max}$. Akan ditunjukkan $\mathbb{R}^n_{\max}$ merupakan semimodul atas semiring $\mathbb{R}_{\max}$.

(i) $r \ (\bar{x} \oplus \bar{y}) = r \otimes [x_1 \oplus y_1, x_2 \oplus y_2, \ldots, x_n \oplus y_n]^T$

$= [r \otimes (x_1 \oplus y_1), r \otimes (x_2 \oplus y_2), \ldots, r \otimes (x_n \oplus y_n)]^T$

$= [\ (r \otimes x_1) \oplus (r \otimes y_1),\ \ldots,\ (r \otimes x_n) \oplus (r \otimes y_n)]^{T}$

$= [\ r \otimes x_1,\ r \otimes x_2,\ \ldots,\ r \otimes x_n\ ]^{T} \oplus [\ r \otimes y_1,\ r \otimes y_2,\ \ldots,\ r \otimes y_n\ ]^{T}$

$= r\bar{x} \oplus r\bar{y}$

(ii) $(r \oplus s)\ \bar{x} = [(r \oplus s) \otimes x_1,\ (r \oplus s) \otimes x_2,\ \ldots,\ (r \oplus s) \otimes x_n\ ]^{T}$

$= [(r \otimes x_1) \oplus (s \otimes x_1)\ , \ldots,\ [(r \otimes x_n) \oplus (s \otimes x_n)\ ]^{T}$

$= [r \otimes x_1,\ r \otimes x_2,\ \ldots,\ r \otimes x_n]^{T} \oplus [\ s \otimes x_1,\ s \otimes x_2,\ \ldots,\ s \otimes x_n\ ]^{T}$

$= r\bar{x} \oplus s\bar{y}$

(iii) $r\ (\ s\bar{x}\ ) = r\ (\ s \otimes \bar{x})$

$= r\ [\ s \otimes x_1,\ s \otimes x_2,\ \ldots,\ s \otimes x_n\ ]^{T}$

$= [\ r \otimes s \otimes x_1,\ r \otimes s \otimes x_2,\ \ldots,\ r \otimes s \otimes x_n\ ]^{T}$

$= rs\ [\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\ ]^{T}$

$= (rs)\ \bar{x}$

(iv) $\bar{x} \otimes \varepsilon = [\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\ ]^{T} \otimes [\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon, \ldots,\ \varepsilon\ ]^{T}$

$= [\ x_1 \otimes \varepsilon\ ,\ x_2 \otimes \varepsilon\ ,\ \ldots,\ x_n \otimes \varepsilon]^{T}$

$= [\ \varepsilon\ ,\ \varepsilon\ ,\ \ldots,\ \varepsilon\ ]^{T}$

$= \varepsilon\ .$

$\bar{x} \otimes e = [\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\ ]^{T} \otimes [\ e,\ e,\ \ldots,\ e\ ]^{T}$

$= [\ x_1 \otimes e,\ x_2 \otimes e,\ \ldots,\ x_n \otimes e\ ]^{T}$

$= [\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\ ]^{T}$

$= \bar{x}$

Jadi $\mathbb{R}^{n}_{\max}$ merupakan semimodul atas semiring $\mathbb{R}_{\max}$.□

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^{m \times n}_{\max}$ juga merupakan semimodul atas semiring $\mathbb{R}^{n}_{\max}$.

3. Homomorfisma pada Semimodul atas Aljabar Max-plus.

Berikut ini disajikan definisi homomorfisma pada semimodul.

Definisi 3.1 *Jika* $(M, \oplus, \otimes)$ *suatu semimodul atas semiring S, maka pemetaan* $\alpha : M \to M$ *dinamakan homomorfisma jika :* $\forall x,y \in M$, $\alpha(x \oplus y) = \alpha(x) \oplus \alpha(y)$ dan $\forall x \in M, s \in S$, $\alpha(s \otimes x) = s \otimes \alpha(x)$.

Contoh 3.2 .

Pemetaan $\alpha : R_{max} \to R_{max}$ dengan $\alpha(x) = 2 \otimes x \oplus 1$ merupakan homomorfisma, yaitu :

$$\begin{aligned}
\alpha(x \oplus y) &= 2 \otimes (x \oplus y) \oplus 1 \\
&= (2 \otimes x) \oplus (2 \otimes y) \oplus 1 \\
&= (2 \otimes x \oplus 1) \oplus (2 \otimes y \oplus 1) \\
&= \alpha(x) \oplus \alpha(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(s \otimes x) &= 2 \otimes (s \otimes x) \oplus 1 \\
&= (s \otimes 2 \otimes x) \oplus 1 \\
&= s \otimes (2 \otimes x \oplus 1) \\
&= s \otimes \alpha(x).
\end{aligned}$$

Selanjutnya, misalkan definisi kernel homomorfisma pada semimodul di atas adalah

$\text{Ker } \alpha = \{ x \in M \,/\, \alpha(x) = \varepsilon \}$, diperoleh :

$$\begin{aligned}
\alpha(x) = \varepsilon &\Leftrightarrow 2 \otimes x \oplus 1 = \varepsilon \\
&\Leftrightarrow \max(2 + x, 1) = \varepsilon
\end{aligned}$$

Tidak ada $x \in M$ yang memenuhi persamaan di atas.

Demikian juga misalkan $\beta : R^2_{max} \to R^2_{max}$ dengan

$$\beta(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \max(1 + x_1, x_2) \\ \max(x_1, 2 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Jika $\beta(x) = \varepsilon$, maka $\begin{bmatrix} \max(1 + x_1, x_2) \\ \max(x_1, 2 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$. Diperoleh $x_1 = \varepsilon$ dan $x_2 = \varepsilon$.

Jadi $\ker \beta = \{\varepsilon\}$, meskipun β tidak injektif.

Oleh karena itu diperlukan suatu definisi tentang kernel suatu homomorfisma pada semimodul. Jika $\alpha : M \to M$ merupakan homomorfisma pada modul M dan m_1 , $m_2 \in \ker \alpha$, maka $\alpha(m_1) = 0$ dan $\alpha(m_2) = 0$. Akibatnya $\alpha(m_1) = \alpha(m_2)$. Sebaliknya jika $\alpha(m_1) = \alpha(m_2)$, maka berakibat $\alpha(m_1) - \alpha(m_2) = 0$, atau $\alpha(m_1 - m_2) = 0$. Diperoleh $m_1 - m_2 \in \ker \alpha$.

Berdasarkan hasil di atas didefinisikan kernel homomorfisma pada semimodul sebagai berikut :

Definisi 3.3 *Jika M suatu semimodul atas semiring S dan $\alpha : M \to M$ merupakan homomorfisma, maka* $\ker \alpha = \{ (x,y) \in M \times M \,/\, \alpha(x) = \alpha(y) \}$

Berdasarkan definisi 3.3 di atas kernel homomorfisma $\alpha : R_{max} \to R_{max}$ pada contoh 3.2 adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\alpha(x) = \alpha(y) &\Rightarrow 2 \otimes x \oplus 1 = 2 \otimes y \oplus 1 \\
&\Rightarrow \max(2 + x, 1) = \max(2 + y, 1) \\
&\Rightarrow x = y \text{ atau } (x \leq -1 \ \& \ y \leq -1) \\
&\Rightarrow \ker \alpha = \{ (x,y) \in R_{max} \times R_{max} \,/\, x = y \text{ atau } x \leq -1 \ \& \ y \leq -1 \}
\end{aligned}$$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, konsep homomorfisma pada semimodul didefinisikan seperti homomorfisma pada modul dan ruang vektor. Akan tetapi definisi kernel pada modul atau ruang vektor jika diterapkan pada homomorfisma semimodul kurang bermakna sebab selalu akan diperoleh hasil trivial, yaitu kernelnya nol, atau kosong.

Oleh karena itu, untuk mendefinisikan kernel homomorfisma pada semimodul atas semiring S, digunakan pendekatan yang lain yang tetap konsisten jika diterapkan pada modul atau ruang vektor. Pada makalah ini kernel homomorfisma pada semimodul atas aljabar max-plus didefinisikan sebagai $\ker \alpha = \{(x_1, x_2) \in M \times M / \alpha(x_1) = \alpha(x_2)\}$. Jika diterapkan pada modul atau ruang vektor, maka definisi ini tetap konsisten, yaitu $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) \Rightarrow \alpha(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in \ker \alpha$.

Beberapa hal yang belum dibahas dalam makalah ini antara lain bagaimana dengan konsep direct sum pada semimodul secara umum. Sebagaimana telah diketahui, jika $\alpha : V \to V$ merupakan homomorfisma pada ruang vektor, maka V merupakan direct sum dari image α dan kernel α .

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W.A. and Weintrub, S.H.1992. *Algebra. An Approach via Module Theory.* Springer, New York.

Baccelli, F, Cohen, G, Olsder, G.J, Quadrat,J.P. 1992. *Synchronization and Linearity*.John Wiley and Sons, New York.

Blyth, T.S. 1977. *Module Theory. An Approach to Linear Algebra.* Oxford University Press, London.

Cohen, G. 1996. *Kernel, Images and Projections in Dioids*. *Wodes '96*. Edinburgh, Scotland

Roman, S. 2005. *Advanced Linear Algebra.* Springer, New York.