A – 13

Aplikasi Rumus Binomial Newton Pada Pemangkatan Bilangan Bulat Dua Digit

Munadi
Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Pancasakti Tegal
Jl. Halmahera KM 1 Tegal

Abstrak

Jika binomial ($a + b$) dengan a dan b variabel real yang tidak nol dipangkatkan n dengan n bilangan asli, maka akan diperoleh bentuk $(a + b)^n$ yang dijabarkan dalam Rumus Binomial Newton sebagai berikut :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \, a^{n-k} b^k$$

Sungguh sangat menarik apabila ternyata ditemukan fakta bahwa angka-angka penyusun hasil pemangkatan (dengan pangkat bilangan asli) pada bilangan bulat dua digit mengikuti pola Rumus Binomial Newton.

Di dalam makalah ini dibahas keterkaitan Rumus Binomial Newton dengan pemangkatan bilangan bulat dua digit.

Kata kunci : *Binomial Newton*, *pemangkatan*, *bilangan bulat dua digit*.

1. PENDAHULUAN

Teori Binomial telah dikenal sejak jaman India Kuno dan Cina Kuno. Ahli Matematika pada jaman India Kuno yang tercatat telah membahas teori ini adalah Pingala (300-200 SM). Selanjutnya teori ini terus digunakan dan berkembang. Pada tahun 1000 M, Al-Karaji seorang matematikawan Arab pertama kali memperkenalkan pembuktian dengan cara induksi yang digunakannya untuk teori binomial. Selain beliau, ahli Matematika yang lain pada masanya Al-Haytham adalah orang pertama kali yang menjabarkan binomial pangkat empat. Pada tahun 1665, Matematikawan dan Fisikawan Inggris Isaac Newton menemukan teori yang lengkap tentang binomial yang kemudian dipakai hingga sekarang. Itu sebabnya istilah binomial sering dikaitkan dengan nama beliau. Rumus Binomial Newton adalah sebagai berikut :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \, a^{n-k} b^k$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

dimana $\binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Bukti induktif

Induksi menghasilkan bukti pada teorema binomial. Apabila $n = 0$, kedua ruas sama dengan 1, karena $x^0 = 1$ untuk semua x dan . Diasumsikan bahwa Rumus Binomial Newton berlaku untuk setiap, maka akan dibuktikan untuk $n + 1$. Untuk $j, k \geq 0$, ambil $[f(x, y)]_{jk}$ menandakan koefisien $x^j y^k$ dalam polinomial $f(x, y)$. Dengan hipotesis induktif, $(x + y)^n$ adalah suatu polinomial di x dan y sedemikian hingga $[(x + y)^n]_{jk}$ adalah jika $j + k = n$, dan 0 untuk yang lain. Kesamaan

$$(x+y)^{n+1} = x(x+y)^n + y(x+y)^n,$$

menunjukkan bahwa $(x + y)^{n+1}$ juga suatu polinomial pada x dan y, dan

$$[(x+y)^{n+1}]_{j,k} = [(x+y)^n]_{j-1,k} + [(x+y)^n]_{j,k-1}.$$

Jika $j + k = n + 1$ maka $(j - 1) + k = n$ dan $j + (k - 1) = n$. Jadi ruas kanan adalah

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

mengikut Identitas Pascal. Di sisi lain, jika $j + k \neq n + 1$ maka $(j - 1) + k \neq n$ and $j + (k - 1) \neq n$, maka diperoleh $0 + 0 = 0$. Oleh karena itu

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k,$$

dan selesailah pembuktian dengan langkah induktif.

Pada awalnya Rumus Binomial Newton dikenal berguna untuk menjelaskan pengembangan aljabar pada perpangkatan suatu binomial. Pada perkembangannya, rumus tersebut dapat juga digunakan untuk menentukan sisa keterbagian dan juga untuk menentukan hasil pemangkatan bilangan dua digit.

Tujuan penulisan makalah ini adalah untuk menjelaskan aplikasi Rumus Binomial Newton pada pemangkatan bilangan bulat dua digit. Pemangkatan yang dimaksud adalah oleh bilangan asli n.

Manfaat penulisan ini adalah untuk membuka wawasan kita tentang aplikasi lain dari Rumus Binomial Newton.

2. APLIKASI BINOMIAL NEWTON PADA PEMANGKATAN BILANGAN BULAT DUA DIGIT

Diberikan dua bilangan bulat nonnegatif a dan b yang membentuk sebuah bilangan dua digit $\underline{a}\ \underline{b}$ dengan a sebagai puluhan dan b sebagai satuan.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Diperoleh

$(\underline{a}\ \underline{b})^1 = (10a + b)^1 = 10a + b = \underline{a}\ \ \underline{b}$

$(\underline{a}\ \underline{b})^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = \underline{a^2}\ \ \underline{2ab}\ \ \underline{b^2}$

$(\underline{a}\ \underline{b})^3 = (10a + b)^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3 = \underline{a^3}\ \ \underline{3a^2b}\ \ \underline{3ab^2}\ \ \underline{b^3}$

$(\underline{a}\ \underline{b})^4 = (10a + b)^4 = 10000a^4 + 4000a^3b + 600a^2b^2 + 40ab^3 + b^4 = \underline{a^4}\ \underline{4a^3b}\ \underline{6a^2b^2}\ \ \underline{4ab^3}\ \underline{b^4}$

.

.

$= (10a + b)^n =$

$=$

Contoh kasus :

1. $12^2 = \underline{1^2}\ \ \underline{2.1.2}\ \ \underline{2^2} = \underline{1}\ \underline{4}\ \underline{4} = 144$
2. $57^3 = \underline{5^3}\ \ \underline{3.5^2.7}\ \ \underline{3.5.7^2}\ \ \underline{7^3} = \underline{125}\ \ \underline{525}\ \ \underline{735}\ \ \underline{343}\ = \underline{185}\ \underline{1}\ \underline{9}\ \underline{3} = 185193$
3. $11^4 = \underline{1^4}\ \ \underline{4.1^3.1}\ \ \underline{6.1^2.1^2}\ \ \underline{4.1.1^3}\ \ \underline{1^4} = \underline{1}\ \underline{4}\ \underline{6}\ \underline{4}\ \underline{1}\ = 14641$

dan lain-lain dimana <u>tanda garis bawah</u> menunjukkan tempat digit penyusun hasil pemangkatan.

Yang bisa menjadi bahan diskusi berikutnya adalah apakah aplikasi Binomial Newton di atas dapat diperluas untuk pemangkatan bilangan lebih dari dua digit? Rumus berikut mungkin bisa dijadikan acuan untuk menjawab pertanyaan tersebut.

Teorema multinomial

Teorema binomial dapat diumumkan untuk memasuki kuasa-kuasa jumlah lebih daripada dua suku. Versi umumnya adalah

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_m} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}.$$

di mana penjumlahan meliputi semua barisan bilangan-bilangan bulat nonnegatif k_1 sampai k_m sehingga jumlah semua k_i adalah n. (Untuk tiap suku dalam ekspansi, pangkat harus ditambahkan ke n). Koefisien diketahui adalah koefisien multinomial, dan dapat dinyatakan dengan rumusan

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \cdots k_m!}.$$

Simpulan dan Saran

1. Rumus Binomial Newton ternyata dapat diaplikasikan untuk menghitung pemangkatan pada bilangan bulat dua digit.
2. Terdapat tantangan bagi matematikawan apakah aplikasi tersebut di atas dapat diperluas untuk bilangan bulat lebih dari dua digit.

Daftar Pustaka

Burton, M. David. 1980. *Elementary Number Theory*. Boston : Allyn and Bacon, Inc.

Khoe Yao Tung. 2008. *Memahami Teori Bilangan dengan Mudah dan Menarik*. Jakarta : Penerbit PT Grasindo

Stillwell, John. 1989. *Mathematics and Its History*. New York : Springer Verlag.

http:/ / id.wikipedia.org