 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

A – 11

Sistem Linear Max-Plus Interval Waktu Invariant

M. Andy Rudhito
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Sanata Dharma
Paingan Maguwoharjo Yogyakarta
email: arudhito@yahoo.co.id

Abstrak
Telah dibahas sistem linear max-plus waktu invariant (SLMI), di mana waktu aktifitasnya berupa bilangan real. Dalam sistem linear max-plus interval waktu invariant (SLMII), ada ketidakpastian dalam waktu aktifitasnya, sehingga waktu aktifitas ini dimodelkan sebagai interval bilangan real. Artikel ini membahas tentang generalisasi SLMI menjadi SLMII dan analisis input-output SLMII. Dapat ditunjukkan bahwa SLMII berupa suatu sistem persamaan linear max-plus interval dan analisa input-output SLMII terkait masalah input paling lambat dapat dibahas melalui penyelesaian suatu sistem persamaan linear max-plus interval. Diberikan juga ilustrasi penerapannya dalam sistem produksi sederhana.
Kata-kata kunci: Sistem Linear, Max-Plus, Interval, Waktu Invariant, Input-Output.

1. Pendahuluan

Dalam masalah pemodelan dan analisa suatu jaringan, kadang-kadang waktu aktifitasnya tidak diketahui dengan pasti. Hal ini misalkan karena jaringan masih pada tahap perancangan, data-data mengenai waktu aktifitas belum diketahui secara pasti. Ketidakpastian waktu aktifitas jaringan ini dapat dimodelkan dalam suatu interval, yang selanjutnya di sebut waktu aktifitas interval.

Aljabar max-plus (himpunan semua bilangan real **R** dilengkapi dengan operasi max dan plus) telah dapat digunakan dengan baik untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah-masalah jaringan, seperti masalah: penjadwalan (proyek) dan sistem antrian, lebih detailnya dapat dilihat pada Bacelli, *et al*. (2001), Rudhito, A. (2003). Dalam Schutter (1996) dan Rudhito, A. (2003) telah dibahas pemodelan dinamika sistem produksi sederhana dengan pendekatan aljabar max-plus. Secara umum model ini berupa sistem linear max-plus waktu invariant.

Konsep aljabar max-plus interval yang merupakan perluasan konsep aljabar max-plus, di mana elemen-elemen yang dibicarakan berupa interval telah dibahas dalam Rudhito, dkk (2008). Pembahasan mengenai matriks atas aljabar max-plus telah dibahas dalam Rudhito, dkk (2011a). Dalam Rudhito, dkk (2011b) telah dibahas eksistensi penyelesaian sistem persamaan linear max-plus interval.

Sejalan dengan cara pemodelan dan pembahasan input-output sistem linear max-plus waktu invariant seperti dalam Schutter (1996) dan Rudhito, A. (2003), dan dengan

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

memperhatikan hasil-hasil pada aljabar max-plus interval, makalah ini akan membahas pemodelan dan analisa input-output sistem linear max-plus waktu invarian dengan waktu aktifitas interval, dengan menggunakan aljabar max-plus interval.

2. Aljabar Max-Plus

Dalam bagian ini dibahas konsep dasar aljabar max-plus dan sistem persamaan linear input-output max-plus $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Pembahasan selengkapnya dapat dilihat pada Bacelli, *et al*. (2001), Rudhito, A. (2003).

Diberikan $\mathbf{R}_\varepsilon := \mathbf{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\mathbf{R}$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon : = -\infty$. Pada $\mathbf{R}_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut: $\forall\ a, b \in \mathbf{R}_\varepsilon$, $a \oplus b :=$ max(a, b) dan $a \otimes b : = a + b$. Kemudian $(\mathbf{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut *aljabar max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan $\mathbf{R}_{\max}$. Relasi "$\preceq_{\mathrm{m}}$"pada $\mathbf{R}_{\max}$ didefinisikan dengan $x \preceq_{\mathrm{m}} y \Leftrightarrow x \oplus y = y$.

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ pada $\mathbf{R}_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n} : = \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbf{R}_{\max}$, untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n\}$. Untuk $\alpha \in \mathbf{R}_{\max}$, dan $A, B \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ didefinisikan $\alpha \otimes A$, dengan $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij}$ dan $A \oplus B$, dengan $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. Untuk $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times p}$, $B \in \mathbf{R}_{\max}^{p\times n}$ didefinisikan $A \otimes B$, dengan $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} A_{ik} \otimes B_{kj}$. Didefinisikan matriks $E \in \mathbf{R}_{\max}^{n\times n}$, $(E)_{ij} : = \begin{cases} 0 \ , \ \text{jika } i = j \\ \varepsilon \ , \ \text{jika } i \neq j \end{cases}$ dan matriks $\varepsilon \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$, $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i dan j.

Relasi "$\preceq_{\mathrm{m}}$"pada $\mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ didefinisikan dengan $A \preceq_{\mathrm{m}} B \Leftrightarrow A \oplus B = B$. Didefinisikan $\mathbf{R}_{\max}^{n} := \{\mathbf{x} = [\, x_1, x_2, \ldots , x_n]^{\mathrm{T}} \mid x_{\mathrm{i}} \in \mathbf{R}_{\max}, i = 1, 2, \ldots , n\}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{R}_{\max}^{n}$ disebur vektor atas $\mathbf{R}_{\max}$.

Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ dan $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}_{\max}^{m}$. Vektor $\mathbf{x}' \in \mathbf{R}_{\max}^{m}$ disebut *subpenyelesaian* sistem persamaan linear $A \otimes \mathbf{x} = \boldsymbol{b}$ jika memenuhi $A \otimes \mathbf{x}' \preceq_{\mathrm{m}} \boldsymbol{b}$. Suatu subpenyelesaian $\hat{\boldsymbol{x}}$ dari sistem $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ disebut *subpenyelesaian terbesar* sistem $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ jika $\boldsymbol{x}' \preceq_{\mathrm{m}} \hat{\boldsymbol{x}}$ untuk setiap subpenyelesaian $\boldsymbol{x}'$ dari sistem $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Diberikan $A \in \mathbf{R}_{\max}^{m\times n}$ dengan unsur-unsur setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan ε dan $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$. Subpenyelesaian terbesar $A \otimes \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ada dan diberikan oleh $\hat{\boldsymbol{x}} = -(A^{\mathrm{T}} \otimes (-\boldsymbol{b}))$.

3. Aljabar Max-Plus Interval

Bagian ini membahas konsep dasar aljabar max-plus interval dan teknik pengoperasian matriks atas aljabar max-plus interval. Pembahasan lebih lengkap dapat dilihat pada Rudhito, dkk (2011a).

Interval (tertutup) x dalam $\mathbf{R}_{\max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\mathbf{R}_{\max}$ yang berbentuk $\mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] = \{x \in \mathbf{R}_{\max} \mid \underline{\mathrm{x}} \preceq_{\mathrm{m}} x \preceq_{\mathrm{m}} \overline{\mathrm{x}}\}$. Interval x dalam $\mathbf{R}_{\max}$ di atas disebut *interval max-plus*, yang selanjutnya akan cukup disebut interval. Suatu bilangan $x \in \mathbf{R}_{\max}$ dapat dinyatakan sebagai interval $[x, x]$. Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon} := \{ \mathrm{x} = [\underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}}] \mid \underline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{x}} \in \mathbf{R}, \varepsilon \prec_{\mathrm{m}} \underline{\mathrm{x}} \preceq_{\mathrm{m}} \overline{\mathrm{x}} \} \cup \{\varepsilon\}$, dengan $\varepsilon := [\varepsilon, \varepsilon]$. Pada $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon}$ didefinisikan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ dengan: $\mathrm{x} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{x}} \oplus \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} \oplus \overline{\mathrm{y}}]$ dan $\mathrm{x} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{y} = [\underline{\mathrm{x}} \otimes \underline{\mathrm{y}}, \overline{\mathrm{x}} \otimes \overline{\mathrm{y}}]$, $\forall$ x, y $\in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\varepsilon})$. Kemudian $(\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\varepsilon}, \overline{\oplus}, \overline{\otimes})$ disebut dengan *aljabar max-plus interval* yang dilambangkan dengan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$.

Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n} := \{\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{ij}) \mid \mathrm{A}_{ij} \in \mathbf{I}(\mathbf{R}_{\max})$, untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n\}$. Matriks anggota $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ disebut *matriks interval max-plus*. Selanjutnya matriks interval max-plus cukup disebut dengan matriks interval. Untuk $\alpha \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$, A, B $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$, didefinisikan $\alpha \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A}$, dengan $(\alpha \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A})_{ij} = \alpha \,\overline{\otimes}\, \mathrm{A}_{ij}$ dan $\mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{B}$, dengan $(\mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{B})_{ij} = \mathrm{A}_{ij} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{B}_{ij}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. Untuk A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times p}$, B $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{p \times n}$, didefinisikan $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B}$ dengan $(\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B})_{ij} = \overline{\bigoplus_{k=1}^{p}} \mathrm{A}_{ik} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{B}_{kj}$ untuk $i = 1, 2, ..., m$ dan $j = 1, 2, ..., n$. Operasi $\overline{\oplus}$ konsisten terhadap urutan $\preceq_{\mathrm{Im}}$, yaitu jika $\mathrm{A} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathrm{B}$, maka $\mathrm{A} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{C} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathrm{B} \,\overline{\oplus}\, \mathrm{C}$. Operasi $\overline{\otimes}$ juga konsisten terhadap urutan $\preceq_{\mathrm{Im}}$, yaitu jika $\mathrm{A} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathrm{B}$, maka $\mathrm{A} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{C} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathrm{B} \,\overline{\otimes}\, \mathrm{C}$.

Untuk A $\in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m \times n}$ didefinisikan matriks $\underline{\mathrm{A}} = (\underline{\mathrm{A}}_{ij}) \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ dan $\overline{\mathrm{A}} = (\overline{\mathrm{A}}_{ij}) \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n}$ yang berturut-turut disebut *matriks batas bawah* dan *matriks batas atas* dari matriks interval A. Didefinisikan *interval matriks dari* A, yaitu $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}] = \{A \in \mathbf{R}_{\max}^{m \times n} \mid$

$\underline{A} \preceq_m A \preceq_m \overline{A}$ }. Dapat ditunjukkan untuk setiap matriks interval A selalu dapat ditentukan *interval matriks* [$\underline{A}$, $\overline{A}$] dan sebaliknya. Matriks interval A ∈ $\mathbf{I(R)}_{\max}^{m\times n}$ dapat dipandang sebagai interval matriks [$\underline{A}$, $\overline{A}$]. Interval matriks [$\underline{A}$, $\overline{A}$]disebut *interval matriks yang bersesuaian dengan matriks interval* A dan dilambangkan dengan A ≈ [$\underline{A}$, $\overline{A}$].

Didefinisikan $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n} := \{\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T |\ x_i \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}, i = 1, \ldots, n\}$. Unsur-unsur dalam $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n}$ disebut *vektor interval atas* $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}$. Diberikan A ∈ $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ dan **b** ∈ $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$. Suatu vektor interval $\mathbf{x}^* \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$ disebut *penyelesaian interval* sistem interval A $\overline{\otimes}$ **x** = **b** jika berlaku A $\overline{\otimes}$ $\mathbf{x}^*$ = **b**. Diberikan A ∈ $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ dan **b** ∈ $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$. Suatu vektor interval $\mathbf{x}' \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$ disebut *subpenyelesaian interval* sistem A $\overline{\otimes}$ **x** = **b** jika berlaku A $\overline{\otimes}$ $\mathbf{x}' \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{b}$. Diberikan A ∈ $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ dan **b** ∈ $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$. Suatu vektor interval $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$ disebut *subpenyelesaian terbesar interval* sistem interval A $\overline{\otimes}$ **x** = **b** jika $\mathbf{x}' \preceq_{\mathrm{Im}} \hat{\mathbf{x}}$ untuk setiap subpenyelesaian interval $\mathbf{x}'$ dari sistem A $\overline{\otimes}$ **x** = **b**.

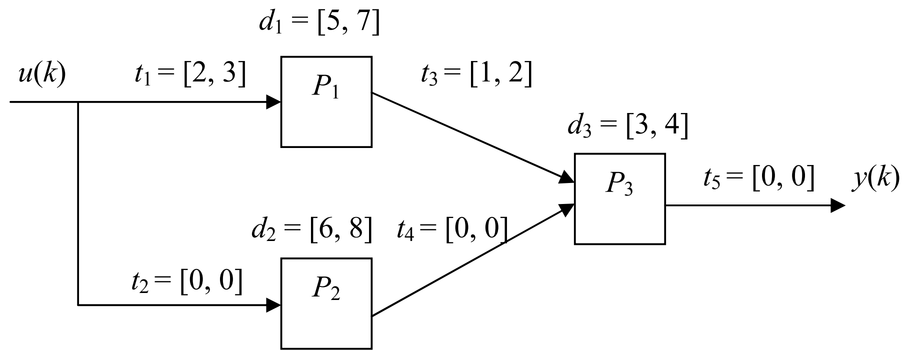
Teorema berikut memberikan eksistensi subpenyelesaian terbesar interval sistem interval A $\overline{\otimes}$ **x** = **b**.

Teorema 1

Jika A ∈ $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m\times n}$ dengan unsur-unsur setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan ε dan **b** ∈ $\mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$, di mana A ≈ [$\underline{A}$, $\overline{A}$] dan **b** ≈ [$\underline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{b}}$], maka vektor interval $\hat{\mathbf{x}}$ ≈ [$\underline{\hat{\mathbf{x}}}$, $\overline{\hat{\mathbf{x}}}$], dengan $\underline{\hat{\mathbf{x}}}_i = \min\{-(\underline{A}^T \otimes (-\underline{\mathbf{b}}))_i\ ,\ -(\overline{A}^T \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))_i\}$ dan $\overline{\hat{\mathbf{x}}} = -(\overline{A}^T \otimes (-\overline{\mathbf{b}}))$ merupakan subpenyelesaian terbesar sistem A $\overline{\otimes}$ **x** = **b**.

4. Pemodelan Sistem Produksi Sederhana dengan Waktu Aktifitas Interval

Diperhatikan suatu sistem produksi sederhana (Schutter, 1996) yang disajikan dalam Gambar 1 berikut:



Gambar 1

Sistem ini terdiri dari 3 unit pemrosesan P_1, P_2, P_3 . Bahan baku dimasukkan ke P_1 dan P_2, diproses dan dikirimkan ke P_3. Interval waktu pemrosesan untuk P_1, P_2 dan P_3 berturut-turut adalah d_1 = [5, 6] d_2 = [6, 8] dan d_3 = [3, 4] satuan waktu. Diasumsikan bahwa bahan baku memerlukan t_1 = [2, 3] satuan waktu untuk dapat masuk dari input ke P_1 dan memerlukan t_3 = [1, 2] satuan waktu dari produk yang telah diselesaikan di P_1 untuk sampai di P_3, sedangkan waktu transportasi yang lain diabaikan. Pada input sistem dan antara unit pemrosesan terdapat penyangga (*buffer*), yang berturut-turut disebut buffer input dan buffer internal, dengan kapasitas yang cukup besar untuk menjamin tidak ada penyangga yang meluap (*overflow*). Suatu unit pemrosesan hanya dapat mulai bekerja untuk suatu produk baru jika ia telah menyelesaikan pemrosesan produk sebelumnya. Diasumsikan bahwa setiap unit pemrosesan mulai bekerja segera setelah bahan tersedia. Misalkan

u(k+1) : *interval waktu saat bahan baku dimasukkan ke sistem untuk pemrosesan ke-*(k+1),

$x_i(k)$: *interval waktu saat unit pemrosesan ke-i mulai bekerja untuk pemrosesan ke-k*,

y(k) : *interval waktu saat produk ke-k yang diselesaikan meninggalkan sistem*.

Waktu saat P_1 mulai bekerja untuk pemrosesan ke-(k+1) dapat ditentukan sebagai berikut. Jika bahan mentah dimasukkan ke sistem untuk pemrosesan ke-(k+1), maka bahan mentah ini tersedia pada input unit pemrosesan P_1 pada interval waktu t = u(k+1) $\overline{\otimes}$ [2, 3]. Akan tetapi P_1 hanya dapat mulai bekerja pada sejumlah bahan baku baru segera setelah menyelesaikan pemrosesan sebelumnya, yaitu sejumlah bahan baku untuk pemrosesan ke-k. Karena interval waktu pemrosesan pada P_1 adalah d_1 = [5, 7]

satuan waktu, maka produk setengah-jadi ke-k akan meninggalkan P_1 pada saat interval $t = x_1(k) \,\overline{\otimes}\, [5, 7]$. Dengan menggunakan operasi aljabar max-plus interval diperoleh:

$$x_1(k+1) = [5, 7] \,\overline{\otimes}\, x_1(k) \,\overline{\oplus}\, [2, 3] \,\overline{\otimes}\, u(k+1) \text{ untuk } k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Dengan alasan yang sama untuk P_2, P_3 dan waktu saat produk ke-k yang diselesaikan meninggalkan sistem, diperoleh:

$$x_2(k+1) = [6, 8] \,\overline{\otimes}\, x_2(k) \,\overline{\oplus}\, u(k+1)$$

$$x_3(k+1) = [11,16] \,\overline{\otimes}\, x_1(k) \,\overline{\oplus}\, [12,16] \,\overline{\otimes}\, x_2(k) \,\overline{\oplus}\, [3, 4] \,\overline{\otimes}\, x_3(k) \,\overline{\oplus}\, [8,11] \,\overline{\otimes}\, u(k+1)$$

$$y(k) = [3, 4] \,\overline{\otimes}\, x_3(k) \text{, untuk } k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Jika dituliskan dalam persamaan matriks dalam aljabar max-plus, persamaan-persamaan di atas menjadi

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} [5,7] & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & [6,8] & \varepsilon \\ [11,16] & [12,16] & [3,4] \end{bmatrix} \overline{\otimes}\, \mathbf{x}(k) \,\overline{\oplus} \begin{bmatrix} [2,3] \\ [0,0] \\ [8,11] \end{bmatrix} \otimes u(k+1)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & [3,4] \end{bmatrix} \overline{\otimes}\, \mathbf{x}(k)$$

untuk $k = 1, 2, 3, \ldots$ dan $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k)]^{T}$.

Hasil di atas dapat juga dituliskan dengan

$$\mathbf{x}(k+1) = A \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x}(k) \,\overline{\oplus}\, B \otimes u(k+1)$$

$$y(k) = C \,\overline{\otimes}\, \mathbf{x}(k)$$

untuk $k = 1, 2, 3, \ldots$, dengan $\mathbf{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), x_3(k)]^{T} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{3}_{\max}$, keadaan awal

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 , \quad A = \begin{bmatrix} [5,7] & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & [6,8] & \varepsilon \\ [11,16] & [12,16] & [3,4] \end{bmatrix} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{3\times 3}_{\max}, \quad B = \begin{bmatrix} [2,3] \\ [0,0] \\ [8,11] \end{bmatrix} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{3}_{\max}$$

dan $C = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & [3,4] \end{bmatrix} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})^{1\times 3}_{\max}$.

5. Sistem Linear Max-Plus Interval Waktu Invariant

Matriks dalam persamaan sistemnya merupakan matriks konstan, yaitu tidak tergantung pada parameter k, sehingga sistemnya merupakan sistem waktu-invariant. Sistem seperti dalam contoh di atas merupakan suatu contoh sistem linear max-plus interval waktu-invariant (SLMII) seperti yang diberikan dalam definisi berikut.

Definisi 1 (SLMII)

Sistem Linear Max-Plus Interval Waktu-Invariant adalah Sistem Kejadian Diskrit yang dapat dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathrm{A} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbf{x}(k) \mathbin{\overline{\oplus}} \mathrm{B} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbf{u}(k+1)$$

(1)

$$\mathbf{y}(k) = \mathrm{C} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbf{x}(k)$$

untuk k = 1, 2, 3, ... , dengan kondisi awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathrm{A} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n\times n}$, $\mathrm{B} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n}$ dan $\mathrm{C} \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{1\times n}$. Vektor interval $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{n}$ menyatakan interval *keadaan* (*state*), $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{m}$ adalah *vektor interval input* dan $\boldsymbol{y}(k) \in \mathbf{I}(\mathbf{R})_{\max}^{1}$ adalah *vektor interval output* sistem saat waktu ke-*k*.

SLMII seperti dalam definisi di atas secara singkat akan dituliskan dengan SLMII(A, B, C, $\mathbf{x}_0$). Jika kondisi awal dan suatu barisan input diberikan untuk suatu SLMII(A, B, C, $\mathbf{x}_0$), maka secara rekursif dapat ditentukan suatu barisan vektor keadaan sistem dan barisan output sistem. Secara umum sifat input-output SLMII(A, B, C, $\mathbf{x}_0$) diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2 (Input-Output SLMII (A, B, C, $\mathbf{x}_0$))

Diberikan bilangan bulat positip *p*. Jika vektor interval output $\boldsymbol{y}$ = [y(1), y(2), ... , y(p)]$^{\mathrm{T}}$ dan vektor interval input $\mathbf{u}$ = [u(1), u(2), ... , u(p)]$^{\mathrm{T}}$ pada SLMI(A, B, C, $\mathbf{x}_0$), maka

$$\mathbf{y} = \mathrm{K} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbf{x}_0 \mathbin{\overline{\oplus}} \mathrm{H} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbf{u}$$

dengan

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} \mathrm{C} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{A} \\ \mathrm{C} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{A}^{\overline{\otimes}2} \\ \vdots \\ \mathrm{C} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{A}^{\overline{\otimes}p} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathrm{H} = \begin{bmatrix} \mathrm{C} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{B} & \varepsilon & \cdots & \varepsilon \\ \mathrm{C} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{A} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{B} & \mathrm{C} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{B} & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{C} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{A}^{\overline{\otimes}p-1} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{B} & \mathrm{C} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{A}^{\overline{\otimes}p-2} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{B} & \cdots & \mathrm{C} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathrm{B} \end{bmatrix}.$$

Bukti: Pembuktian analog dengan kasus waktu aktifitas yang berupa bilangan real, dengan mengingat bahwa operasi penjumlahan dan perkalian matriks interval konsisten terhadap urutan yang telah didefinisikan di atas. Bukti untuk kasus waktu aktifitas yang berupa bilangan real dapat dilihat dalam Rudhito(2003: hal 56 -58).

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Dalam sistem produksi, Teorema 2 berarti bahwa jika diketahui kondisi awal sistem dan barisan waktu saat bahan mentah dimasukkan ke sistem, maka dapat ditentukan barisan interval waktu saat produk selesai diproses dan meninggalkan sistem.

Berikut dibahas *masalah input paling lambat* pada SLMII(A, B, C, $\mathbf{x}_0$). Masalah input paling lambat pada SLMII(A, B, C, $\mathbf{x}_0$) adalah sebagai berikut:

Diberikan suatu bilangan bulat positip p. Diketahui vektor interval output $\mathbf{y} = [\mathrm{y}(1), ..., \mathrm{y}(p)]^{\mathrm{T}}$. *Misalkan vektor interval* $\mathbf{u} = [\mathrm{u}(1), ..., \mathrm{u}(p)]^{\mathrm{T}}$ *adalah vektor interval input. Permasalahannya adalah menentukan vektor interval input* $\mathbf{u}$ *terbesar (vektor interval waktu paling lambat) sehingga memenuhi* $\mathrm{K} \otimes \mathbf{x}_0 \overline{\oplus} \mathrm{H} \overline{\otimes} \mathbf{u} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{y}$, *dengan* K *dan* H *seperti dalam Teorema 2.*

Dalam sistem produksi, masalah ini mempunyai interpretasi sebagai berikut. Misalkan diketahui vektor interval $\mathbf{y}$ adalah vektor interval waktu paling lambat agar produk harus meninggalkan sistem. Permasalahannya adalah menentukan vektor interval $\mathbf{u}$ yaitu vektor interval waktu paling lambat saat bahan baku harus dimasukkan ke dalam sistem. Penyelesaian masalah ini diberikan dalam Teorema 3 berikut.

Teorema 3

Diberikan SLMII(A, B, C, $\mathbf{x}_0$) dengan $\mathrm{C} \otimes \mathrm{B} \neq \varepsilon$ (matriks interval yang semua elemennya ε). Jika $\mathrm{K} \otimes \mathbf{x}_0 \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{y}$, maka penyelesaian masalah input paling lambat pada SLMII(A, B, C, x_0) diberikan oleh $\hat{\mathbf{u}} \approx [\underline{\hat{\mathbf{u}}}, \overline{\hat{\mathbf{u}}}]$, dengan $\underline{\hat{\mathbf{u}}}_i = \min\{-(\underline{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}} \overline{\otimes} (-\underline{\mathbf{y}}))_i, -(\overline{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}} \overline{\otimes} (-\overline{\mathbf{y}}))_i\}$ dan $\overline{\hat{\mathbf{u}}} = -(\overline{\mathrm{H}}^{\mathrm{T}} \otimes (-\overline{\mathbf{y}}))$.

Bukti: Karena $\mathrm{K} \overline{\otimes} \mathbf{x}_0 \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{y}$, maka $\mathrm{K} \overline{\otimes} \mathbf{x}_0 \overline{\oplus} \mathrm{H} \overline{\otimes} \mathbf{u} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathrm{H} \overline{\otimes} \mathbf{u} = \mathbf{y}$. Akibatnya masalah interval input paling lambat pada SLMII(A, B, C, $\mathbf{x}_0$) menjadi masalah menentukan vektor interval input $\mathbf{u}$ terbesar yang memenuhi $\mathrm{H} \overline{\otimes} \mathbf{u} \preceq_{\mathrm{Im}} \mathbf{y}$. Masalah ini merupakan masalah menentukan subpenyelesaian terbesar sistem persamaan linear max-plus interval $\mathrm{H} \overline{\otimes} \mathbf{u} = \mathbf{y}$. Karena $\mathrm{C} \overline{\otimes} \mathrm{B} \neq \varepsilon$, maka komponen setiap kolom matriks interval H tidak semuanya sama dengan ε. Menurut Teorema 1 subpenyelesaian terbesar sistem persamaan linear max-plus interval H $\overline{\otimes}$ $\mathbf{u} = \mathbf{y}$ adalah $\hat{\mathbf{u}} \approx [\underline{\hat{\mathbf{u}}}, \overline{\hat{\mathbf{u}}}]$, dengan $\underline{\hat{\mathbf{u}}}_i$ = $\min\{-(\underline{H}^{T} \overline{\otimes} (-\underline{\mathbf{y}}))_i, -(\overline{H}^{T} \overline{\otimes} (-\overline{\mathbf{y}}))_i\}$ dan $\overline{\hat{\mathbf{u}}} = -(\overline{H}^{T} \otimes (-\overline{\mathbf{y}}))$. ■

Contoh 1

Diperhatikan sistem produksi sederhana dalam subjudul 4 di atas. Misalkan kondisi awal sistem $\mathbf{x}(0)$ = [[0, 0], [1, 1], [ε, ε]]^{T}, yang berarti unit pemrosesan P_1 dan P_2 berturut-turut memulai aktifitasnya saat waktu 0 dan 1 sementara unit pemrosesan P_3 masih kosong dan harus menunggu datangnya input dari P_1 dan P_2 . Diinginkan penyelesaian produk sebelum y(1) = [25, 25], y(2) = [30, 30], y(3) = [40, 40] dan y(4) = [50, 50], dalam hal ini waktu dapat ditentukan dengan pasti. Selanjutnya akan ditentukan waktu pemasukkan bahan baku ke dalam sistem yang selambat mungkin. Perhatikan bahwa K $\overline{\otimes}$ $\mathbf{x}_0$ = [[16, 21], [22, 29], [28, 37], [34, 45]]^{T} $\preceq_{\mathrm{Im}}$ $\mathbf{y}$, sehingga Teorema 3 dapat digunakan. Subpenyelesaian terbesar sistem persamaan linear max-plus interval H $\otimes$ $\mathbf{u} = \mathbf{y}$

atau $\begin{bmatrix} [11,15] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [16,\ 23] & [11,15] & \varepsilon & \varepsilon \\ [21,30] & [16,23] & [11,15] & \varepsilon \\ [27,37] & [21,30] & [16,23] & [11,15] \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathrm{u}(1) \\ \mathrm{u}(2) \\ \mathrm{u}(3) \\ \mathrm{u}(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [25,25] \\ [30,30] \\ [40,40] \\ [50,50] \end{bmatrix}$

adalah $\hat{\mathbf{u}} \approx [\underline{\hat{\mathbf{u}}}, \overline{\hat{\mathbf{u}}}]$ = [[7, 7], [15, 15], [27, 27], [35, 35]]^{T}. Diperoleh waktu pemasukkan bahan baku ke dalam sistem dengan pasti. Jadi bahan baku harus dimasukkan ke sistem paling lambat pada saat waktu $\hat{u}(1) = 7$, $\hat{u}(2) = 15$, $\hat{u}(3) = 27$ dan $\hat{u}(4) = 35$.

Daftar Pustaka

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. and Quadrat, J.P. 2001. *Synchronization and Linearity*. New York: John Wiley & Sons.

Rudhito, Andy. 2003. *Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant*. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Rudhito, Andy. Wahyuni, Sri. Suparwanto, Ari dan Susilo, F. 2008. Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur. *Berkala Ilmiah MIPA Majalah Ilmiah Matematika & Ilmu Pengetahuan Alam.* Vol. 18 (2): pp. 153-164

Rudhito, Andy. Wahyuni, Sri. Suparwanto, Ari dan Susilo, F. 2011a. Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval. *Jurnal Natur Indonesia.* Vol. 13 No. 2. pp. 94-99.

Rudhito, Andy. Wahyuni, Sri. Suparwanto, Ari dan Susilo, F. 2011b. Systems of Fuzzy Number Max-Plus Linear Equations. Journal of the Indonesian Mathematical Society Vol. 17 No. 1

Schutter, B. De., 1996. *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*, PhD thesis Departement of Electrical Enginering Katholieke Universiteit Leuven, Leuven.