ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

A – 9

Fungsi Generalisasi Supra Kontinu Pada Ruang Supra Topologi

Imam Supeno

Universita Negeri Malang
imam@mat.um.ac.id

Abstrak

Pada makalah ini dikenalkan fungsi generalisasi supra kontinu pada ruang supra topologi dan diselidiki sifat-sifatnya. Selanjutnya dikenalkan fungsi generalisasi supra buka dan fungsi generalisasi supra tutup, dan diselidiki keterkaitan di antara ketiganya.

Kata kunci: ruang supra topologi, fungsi generalisasi supra kontinu, fungsi generalisasi supra buka, fungsi generalisasi supra tutup

1. Pendahuluan

Ruang supra topologi dan sifat-sifatnya dikenalkan oleh Mashhour dkk, pada tahun 1983. Arockiarani dkk (2011), mengenalkan konsep himpunan generalisasi supra tutup (buka). Selanjutnya, Imam Supeno (2011) mengenalkan fungsi supra buka, fungsi supra tutup, dan supra homeomorfisma pada ruang supra topologi beserta sifat-sifatnya. Selanjutnya, pada makalah ini dikenalkan konsep baru tentang fungsi generalisasi supra kontinu, fungsi generalisasi supra tutup, dan fungsi generalisasi supra buka pada ruang supra topologi.

2. Pembahasan

Misalkan X sebarang himpunan tak kosong dan $P(X)$ adalah himpunan kuasa dari himpunan X. Keluarga himpunan $\tau \subset P(X)$ dikatakan topologi pada X jika memenuhi sifat-sifat berikut.

(a) $X, \varnothing \in \tau$.

(b) Jika $A_\alpha \in \tau, \forall \alpha \in \Lambda$, maka $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \in \tau$.

(c) Jika $A_i \in \tau, i = 1, 2, 3, \cdots, n$, maka $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Pasangan (X,τ) disebut ruang topologi. Anggota-anggota keluarga himpunan τ disebut himpunan buka di (X,τ) dan komplemen dari himpunan buka disebut himpunan tutup.

Definisi 1. (Mashhour, 1983) Keluarga himpunan $\mu \subset P(X)$ dikatakan supra topologi pada X jika memenuhi sifat-sifat berikut.

(d) $X, \varnothing \in \mu$.

(e) Jika $A_\alpha \in \mu, \forall \alpha \in \Lambda$, maka $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \in \mu$.

Pasangan (X,μ) disebut ruang supra topologi. Anggota-anggota keluarga himpunan μ disebut himpunan supra buka di (X,μ) dan komplemen dari himpunan supra buka disebut himpunan supra tutup.

Definisi 2. (Mashhour, 1983) Misalkan (X,τ) ruang topologi dan μ supra topologi pada X . Supra topologi μ dikatakan bersesuaian dengan topologi τ jika $\mu \subset \tau$.

Definisi 3. (Arockiarani, 2011) Misalkan (X,μ) ruang supra topologi.. Himpunan $A \subset X$ disebut himpunan generalisasi supra tutup bila $Cl^\mu(A) \subset O$ untuk setiap himpunan supra buka O yang $A \subset O$. Komplemen dari himpunan generalisasi supra tutup disebut himpunan generalisasi supra buka.

Akibat 1. Setiap himpunan supra tutup (buka) adalah generalisasi supra tutup (buka).

Bukti:

Misalkan $A \subset X$ adalah himpunan supra tutup di (X,τ), maka $Cl^\mu(A) = A$. Akibatnya $Cl^\mu(A) \subset O$ untuk setiap himpunan supra buka O yang $O \subset A$. Jika $B \subset X$ adalah himpunan supra buka di (X,τ), maka komplemennya, B^c supra tutup. Akibatnya B^c adalah himpunan generalisasi supra tutup. Jadi, $B = (B^c)^c$ adalah himpunan generalisasi supra buka.

Definisi 4. Misalkan (X,τ) dan (Y,σ) ruang topologi, μ dan ν berturut-turut adalah supra topologi yang bersesuaian dengan topologi τ dan σ. Fungsi $f : X \to Y$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

dikatakan fungsi generalisasi supra kontinu jika $f^{-1}(O)$ himpunan generalisasi supra tutup di (X,μ) untuk setiap himpunan tutup O di (Y,σ).

Akibat 6. Setiap fungsi supra kontinu adalah fungsi generalisasi supra kontinu.

Bukti:

Ambil sebarang himpunan tutup O di (Y,σ). Karena fungsi $f:X\to Y$ supra kontinu, maka himpunan $f^{-1}(O)$ supra tutup di (X,μ) . Menurut Akibat 1, himpunan supra tutup adalah generalisasi supra tutup. Jadi, fungsi $f:X\to Y$ adalah generalisasi supra kontinu.

Teorema 1. Misalkan (X,τ) dan (Y,σ) ruang topologi, μ dan ν berturut-turut adalah supra topologi yang bersesuaian dengan topologi τ dan σ. Jika $f:X\to Y$ adalah fungsi, maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekivalen.

(1) Fungsi f adalah generalisasi supra kontinu.

(2) $f^{-1}(A)$ adalah himpunan generalisasi supra buka di (X,μ), untuk setiap himpunan A buka di (Y,σ).

(3) $f\left(Cl^{\mu}(A)\right)\subset Cl\left(f(A)\right)$ untuk setiap $A\subset X$.

(4) $Cl^{\mu}\left(f^{-1}(B)\right)\subset f^{-1}\left(Cl(B)\right)$ untuk setiap $B\subset Y$.

Bukti:

(1) $\Rightarrow$(2) Misalkan f adalah fungsi generalisasi supra kontinu dan misalkan $A\subset Y$ adalah himpunan sebarang buka di (Y,σ). Akibatnya komplemenya, A^c tutup di (Y,σ). Karena fungsi f generalisasi supra kontinu, maka himpunan $f^{-1}(A^c)$ generalisasi supra tutup di (X,μ). Karena $f^{-1}(A^c)=\left[f^{-1}(A)\right]^c$, maka himpunan $\left[f^{-1}(A)\right]^c$ generalisasi supra tutup di (X,μ). Jadi, himpunan $f^{-1}(A)$ adalah generalisasi supra buka di (X,μ).

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

(2) $\Rightarrow$(1) Misalkan $B \subset Y$ adalah himpunan tutup di (Y,σ), maka himpunan O^c buka. Berdasarkan hipotesis, maka himpunan $f^{-1}(B^c)$ adalah generalisasi supra buka di (X,μ), Karena $f^{-1}(B^c)=\left[f^{-1}(B)\right]^c$, maka himpunan $\left[f^{-1}(B)\right]^c$ adalah generalisasi supra buka. Akibatnya, himpunan $f^{-1}(B)$ adalah generalisasi supra tutup. Jadi, fungsi f adalah generalisasi supra kontinu.

(2) $\Rightarrow$(3) Misalkan $A \subset X$, maka himpunan $Cl(f(A))$ adalah tutup di (Y,σ). Karena fungsi f generalisasi supra kontinu, maka himpunan $f^{-1}(Cl(f(A)))$ generalisasi supra tutup di (X,μ). Karena $A \subset f^{-1}(Cl(f(A)))$, maka

$Cl^{\mu}(A) \subset Cl^{\mu}\left[f^{-1}(Cl(f(A)))\right]$. Karena $f^{-1}(Cl(f(A)))$ generalisasi supra tutup di (X,μ), maka $Cl^{\mu}\left[f^{-1}(Cl(f(A)))\right]= f^{-1}(Cl(f(A)))$. Akibatnya,

$Cl^{\mu}(A) \subset f^{-1}(Cl(f(A)))$. Jadi, $f(Cl^{\mu}(A)) \subset f\left(f^{-1}(Cl(f(A)))\right)=Cl(f(A))$.

(3) $\Rightarrow$(4) Misalkan $f(Cl^{\mu}(A)) \subset Cl(f(A))$ untuk setiap $A \subset X$. Ambil sebarang himpunan $B \subset Y$, maka $f^{-1}(B) \subset X$. Akibatnya $f\left(Cl^{\mu}(f^{-1}(B))\right) \subset Cl\left(f(f^{-1}(B))\right)$.

Karena $f(f^{-1}(B)) \subset B$, maka $Cl\left(f(f^{-1}(B))\right) \subset Cl(B)$. Akibatnya,

$f\left(Cl^{\mu}(f^{-1}(B))\right) \subset Cl(B)$. Jadi, $Cl^{\mu}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(Cl(B))$.

(4) $\Rightarrow$(1) Misalkan himpunan O tutup di (Y,σ), maka berdasarkan hipotesis, maka $Cl^{\mu}(f^{-1}(O)) \subset f^{-1}(Cl(O))$. Karena himpunan O tutup di (Y,σ), maka $Cl(O)=O$. Akibatnya, $Cl^{\mu}(f^{-1}(O)) \subset f^{-1}(O)$. Jadi, himpunan $f^{-1}(O)$ adalah generalisasi supra tutup di (X,μ). Jadi terbukti bahwa fungsi f adalah generalisasi supra kontinu.

Definisi 5. Misalkan (X,τ) dan (Y,σ) ruang topologi, μ dan ν berturut-turut adalah supra topologi yang bersesuaian dengan topologi τ dan σ. Fungsi $f: X \to Y$

dikatakan generalisasi supra tutup jika $f(O)$ generalisasi supra tutup di (Y,σ) untuk setiap himpunan tutup O di (X,τ).

Teorema 2. Misalkan (X,τ) dan (Y,σ) ruang topologi, μ dan ν berturut-turut adalah supra topologi yang bersesuaian dengan topologi τ dan σ. Fungsi $f:X\to Y$ adalah generalisasi supra tutup jika dan hanya jika $Cl_g^{\nu}(f(A))\subset f(Cl(A))$ untuk setiap himpunan $A\subset X$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Misalkan $A\subset X$. Karena $A\subset Cl(A)$, maka $f(A)\subset f(Cl(A))$. Karena $Cl(A)$ tutup di (X,μ) dan f adalah fungsi generalisasi supra tutup , maka himpunan $f(Cl(A))$ adalah generalisasi supra tutup di (Y,σ). Sedangkan $Cl_g^{\nu}(f(A))$ merupakan himpunan generalisasi supra tutup terkecil yang memuat $f(A)$, akibatnya $Cl_g^{\nu}(f(A))\subset f(Cl(A))$.

$(\Leftarrow)$ Misalkan A adalah himpunan tutup di (X,τ), maka $Cl(A)=A$. Berdasarkan hipotesis $Cl_g^{\nu}(f(A))\subset f(Cl(A))$, maka $Cl_g^{\nu}(f(A))\subset f(A)$. Jadi, himpunan $f(A)$ adalah generalisasi supra tutup di (Y,ν).

Definisi 6. Misalkan (X,τ) dan (Y,σ) ruang topologi, μ dan ν berturut-turut adalah supra topologi yang bersesuaian dengan topologi τ dan σ. Fungsi $f:X\to Y$ dikatakan generalisasi supra buka jika $f(O)$ generalisasi supra buka di (Y,σ) untuk setiap himpunan buka O di (X,τ).

Teorema 3. Misalkan (X,τ) dan (Y,σ) ruang topologi, μ dan ν berturut-turut adalah supra topologi yang bersesuaian dengan topologi τ dan σ. Fungsi $f:X\to Y$ adalah generalisasi supra buka jika dan hanya jika $f(Int(A))\subset Int_g^{\nu}(f(A))$, untuk setiap himpunan $A\subset X$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Misalkan fungsi $f:X\to Y$ adalah generalisasi supra buka. Karena $Int(A)\subset A$, maka $f(Int(A))\subset f(A)$. Karena $Int(A)$ buka di (X,τ) dan f adalah fungsi generalisasi supra buka , maka himpunan $f\left(Int\left(A\right)\right)$ adalah generalisasi supra buka di $\left(Y,\sigma\right)$. $Cl_g^{\nu}\left(f\left(A\right)\right)$ Karena Int_g^{ν} merupakan himpunan generalisasi supra buka terbesar yang termuat di $f\left(A\right)$, maka $f\left(Int\left(A\right)\right)\subset Int_g^{\nu}\left(f\left(A\right)\right)$.

$\left(\Leftarrow\right)$ Jika A adalah himpunan buka di $\left(X,\tau\right)$, maka $f\left(Int\left(A\right)\right)\subset Int_g^{\nu}\left(f\left(A\right)\right)$. Karena $Int\left(A\right)=A$, maka $f\left(A\right)\subset Int_g^{\nu}\left(f\left(A\right)\right)$ Jadi, himpunan $f\left(A\right)$ adalah generalisasi supra buka di $\left(Y,\nu\right)$.

Teorema 3. Misalkan $\left(X,\tau\right)$ dan $\left(Y,\sigma\right)$ ruang topologi, μ dan ν berturut-turut adalah supra topologi yang bersesuaian dengan topologi τ dan σ. Jika $f:X\rightarrow Y$ adalah fungsi bijektif, maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen.

(1) f dan f^{-1} adalah fungsi generalisasi supra kontinu.

(2) f dan f^{-1} adalah fungsi generalisasi supra buka.

(3) f dan f^{-1} adalah fungsi generalisasi supra tutup.

Bukti:

(1) $\Rightarrow$ (2) Misalkan f dan f^{-1} adalah fungsi generalisasi supra kontinu. Misalkan A adalah himpunan buka di $\left(X,\tau\right)$. Karena f^{-1} fungsi generalisasi supra kontinu, maka $\left(f^{-1}\right)^{-1}\left(A\right)=f\left(A\right)$ adalah himpunan generalisasi supra buka. Jadi, fungsi f adalah generalisasi supra buka. Misalkan B adalah himpunan buka di $\left(Y,\sigma\right)$. Karena f fungsi generalisasi supra kontinu, maka $f^{-1}\left(B\right)$ adalah himpunan generalisasi supra buka di $\left(X,\tau\right)$. Jadi, fungsi f^{-1} adalah generalisasi supra buka.

(2) $\Rightarrow$ (3) Misalkan f dan f^{-1} adalah fungsi generalisasi supra buka. Misalkan A adalah himpunan tutup di $\left(Y,\sigma\right)$, maka A^c adalah himpunan buka. Karena f^{-1} fungsi generalisasi supra buka, maka $f^{-1}\left(A^c\right)=\left[f^{-1}\left(A\right)\right]^c$ adalah himpunan generalisasi supra buka di $\left(X,\tau\right)$. Akibatnya, himpunan $f^{-1}\left(A\right)$ adalah himpunan generalisasi supra tutup. Jadi, fungsi f^{-1} adalah generalisasi supra tutup. Misalkan B adalah himpunan tutup di $\left(X,\tau\right)$, maka himpunan B^c adalah buka. Karena f fungsi generalisasi supra

buka, maka $f\left(B^c\right)=\left[f\left(B\right)\right]^c$ adalah himpunan generalisasi supra buka di $\left(Y,\sigma\right)$. Akibatnya, himpunan $f\left(B\right)$ adalah generalisasi supra tutup. Jadi, fungsi f adalah generalisasi supra tutup.

(3) $\Rightarrow$ (1) Misalkan f dan f^{-1} adalah fungsi generalisasi supra tutup. Misalkan A adalah himpunan tutup di $\left(X,\tau\right)$. Karena f fungsi generalisasi supra tutup, maka $\left(f^{-1}\right)^{-1}\left(A\right)=f\left(A\right)$ adalah himpunan generalisasi supra tutup di $\left(Y,\sigma\right)$. Jadi, fungsi f^{-1}adalah generalisasi supra kontinu. Misalkan B adalah himpunan tutup di $\left(Y,\sigma\right)$. Karena f^{-1} fungsi generalisasi supra tutup, maka $f^{-1}\left(B\right)$ adalah himpunan generalisasi supra tutup di $\left(X,\tau\right)$. Jadi, fungsi f adalah generalisasi supra tutup.

3. Kesimpulan

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa fungsi generalisasi supra kontinu dan inversnya, fungsi generalisasi supra buka dan inversnya, dan fungsi generalisasi supra tutup dan inversnya adalah ekivalen jika fungsinya bijektif.

4. Daftar Pustaka

Mashhour, A. S. 1983. Indian Journal Pure and Applied Mathematics 14(4). *On Supratopological Spaces*. p: 502 – 510.

Arockiarani and Pricilla, M.T. 2011. International Journal Computer Science and Emerging Technologies 2(4). $\pi\Omega-$*Closed and* $\pi\Omega s-$*closed set in Supra Topoloical Space*. p: 534 – 538.

Supeno, I. 2011. *Fungsi Supra Buka, Fungsi Supra Tutup, dan Supra Homeomorfisma pada Ruang Supra Topologi*. Makalah disajikan pada Seminar Nasional Matematika di UNESA pada tanggal 22 Oktober 2011. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya.