ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

A – 7

Aplikasi Sistem Orthonormal Di Ruang Hilbert Pada Deret Fourier

Fitriana Yuli S.
FMIPA UNY

Abstrak

Ruang hilbert akan dibahas pada papper ini. Aplikasi system orthonormal akan dikaji dan akan diaplikasikan pada ruanhg Hilbert. Dapat diketahui bahwa himpunan $\{u_0, u_1, u_2, ...\}$ deret klasik fourier adalah bentuk 66ystem orthonormal lengkap di ruang Hilbert L_2 *(-π,π.)*. Sebagai akibatnya himpunan τ dari polynomial trygonometri adalah padat di $L_2(-\pi,\pi)$

Kata kunci: Sistem Orthonormal, Ruang Hilbert, Deret Fourier

A. Pendahuluan

Analisis Fourier klasik pada mulanya berkembang dalam upaya mempelajari deret dan integral Fourier. Deret trigonometri yang kita kenal sekarang sebagai *deret Fourier* pertama kali diperkenalkan oleh D. Bernoulli pada tahun 1750 - an, ketika ia mengkaji persamaan diferensial parsial untuk sebuah dawai bergetar. Bernoulli menemukan bahwa untuk $f(x) = \sin(k\pi x/l)$ maka fungsi $u(x,t) = \sin(k\pi x/l)\cos(k\pi t/l)$ merupakan solusi untuk setiap bilangan positip k. Deret fourier klasik *u(x,t)* akan diaplikasikan sebagai system orthonormal di ruang Hilbert.

B. Pembahasan

Inner Product Di Ruang Hilbert L_2 (-π,π) didefinisikan bahwa untuk sembarang

$$(u \mid v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)dx \qquad ,\forall x \in [-\pi,\pi]$$

Sistem Orthonormal di ruang Hilbert L_2 (-π,π) didefinisikan

Untuk sembarang X Ruang Hilbert atas R , dan $\{u_0,u_1,\ldots\}$ adalah system orthonormal yang dapat dihitung dalam X, yaitu

$$(u_k / u_m) = \delta_{km} \qquad \textit{untuk} \quad \textit{semua} \quad k,m$$

Barisan *u(x)* dalam deret fourier didefinisikan sebagai :

$u(x) := (2\pi)^{-1/2}$. $u_{2m-1}(x) := \pi^{-1/2}\cos nx$

$u_{2m}(x) := \pi^{-1/2}\sin nx$, untuk m=1,2,3, …

Preposisi 1.

Himpunan $\{u_0, u_1, u_2, ...\}$ membentuk suatu sistem orthonormal lengkap di ruang Hilbert L_2 $(-\pi,\pi.)$.

Pembuktian

Langkah 1

Akan ditunjukkan bahwa u_n merupakan sistem orthonormal yaitu memenuhi

$$(u_n \mid u_k) = \int_{-\pi}^{\pi i} u_n(x) u_k(x)dx = \delta_{nk}.$$

Dalam deret fourier diketahui $u_k := \pi^{-1/2}\sin kx$; $u_n := \pi^{-1/2}\cos nx$

Beberapa kemungkinan nilai ($U_n \mid U_k$) yaitu

A. Kemungkinan inner product ke-1 yaitu

$$(U_n \mid U_k) = \int_{-\pi}^{\pi i} \pi^{-1/2} Cos\ nx.\pi^{-1/2} Sin\ kxdx$$

Ada dua kemungkinan untuk nilai n dan k yaitu

1. Nilai n = k

$$(U_n \mid U_k) = \int_{-\pi}^{\pi i} \pi^{-1/2} Cos\ nx.\pi^{-1/2} Sin\ nxdx$$

$$= \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} 1/2\,[\sin\,(nx - nx) + \sin\,(nx + nx)]dx$$

$$= \pi^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} 1/2\,[\sin 0 + \sin\,2nx\,]dx$$

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} 1/2\,[0 + \sin 2nx\,]dx$$

Batas dibagi menjadi 2 yaitu dari $-\pi \le x \le 0$ *dan* $0 \le x \le \pi$ karena nilai integralnya sama maka hanya dihitung salah satu kemudian dikalikan 2

$$= 2\ x\ (\ \pi^{-1} \int_{0}^{\pi} 1/2\ \ (\sin 2nx)\ dx)$$

$$= 2\ x\ (\ \pi^{-1} 1/2[1/2\ \ (-\cos 2nx)\ ]_0^{\pi}\ )$$

$$= 2\ x\ (\ \pi^{-1} 1/2(1/2\ \ (-\cos 2n\pi - (-\cos 0)\ )$$

$$= 2\ x\ (\ \pi^{-1} 1/2(1/2\ \ (-1 - (-1)\ )$$

= 2 x 0

$= 0\ = \delta_{nk}$

2. Nilai $n \ne k$

$$(U_n \,|\, U_k) = \int_{-\pi}^{\pi i} \pi^{-1/2} Cos\ \ nx.\pi^{-1/2} Sin\ kxdx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} 1/2\,[\sin\,(nx - kx) + \sin\,(nx + kx)]dx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} 1/2\,[\sin\,(n-k)x + \sin\,(n+k)x]dx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} 1/2 \sin\,(n-k)x\ dx + \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} 1/2 \sin\,(n+k)x\ dx$$

$$= 2\ x\ \pi^{-1}.1/2.\,[1/(n-k) - \cos\,(n-k)x]^{\pi}{}_0\ + 2\ x\ \ \pi^{-1}.1/2.\,[1/(n+k) - \cos\,(n+k)x]^{\pi}{}_0$$

$$= 2\ x\ \pi^{-1}.1/2.\,[\frac{-\cos\,(n-k)\pi}{(n-k)} - (\frac{-\cos\,(n-k)0}{n-k})] + 2\ x\ \pi^{-1}.1/2.\,[\frac{-\cos\,(n+k)\pi}{(n+k)} - (\frac{-\cos\,(n+k)0}{n+k})]$$

$$= 2\ x\ (\ \pi^{-1} 1/2(1/2\ \ (-1 - (-1)\ )\ +\ \ 2\ x\ (\ \pi^{-1} 1/2(1/2\ \ (-1 - (-1)\ )$$

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$= 2 \text{ x } 0 + 2\text{x } 0$

$= 0 \ = \delta_{nk}$

Nilai $(U_n \,|\, U_k) = \int_{-\pi}^{\pi i} \pi^{-1/2} Cos\ \ nx.\pi^{-1/2} Sin\ kxdx = \begin{cases} 0 & ,n = k \\ 0 & ,n \neq k \end{cases}$

B . Kemungkinan inner product ke-2 yaitu

$$(U_n \,|\, U_k) = \int_{-\pi}^{\pi i} \pi^{-1/2} \cos\ \ nx.\pi^{-1/2} \cos kxdx$$

$$(U_n \,|\, U_k) = \int_{-\pi}^{\pi i} \pi^{-1/2} \cos\ \ nx.\pi^{-1/2} \cos kxdx$$

Kemungkinan nilai n dan k yaitu

1. Nilai n=k

$$= 2\ x\ \pi^{-1}.1/2\,[\pi] + \ \ 2\,x\ \pi^{-1}.1/2\,[\frac{\sin\ 2n\pi}{2n} - \frac{\sin\ 0}{2n}]$$

$$(U_n \,|\, U_k) = \int_{-\pi}^{\pi} \pi^{-1/2} \cos\ \ nx.\pi^{-1/2} \cos\ nxdx$$

$$= 2\ x\ \pi^{-1}.1/2\,[x]^{\pi}{}_0 + \ \ 2\,x\ \pi^{-1}.1/2\,[\frac{\sin\ 2nx}{2n}]_0^{\pi}$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \ 1/2\,[\cos\,(nx - nx) + \cos\,(nx + nx)]dx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \ 1/2\,[\cos\,0 + \cos\,2nx]dx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \ 1/2\ \ \cos\,0\ dx\ \ + \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \ \cos\,2nx\ dx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \ 1/2\,.\,1\,dx\ \ + \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \ \cos\,2nx\ dx$$

Batas dibagi menjadi 2 yaitu dari $-\pi \le x \le 0 \quad dan \quad 0 \le x \le \pi$ karena nilai integralnya sama maka hanya dihitung salah satu kemudian dikalikan 2

$= \ 1 + 0 \ = \delta_{nk}$

2. Nilai $n \neq k$

$$(U_n \,|\, U_k) = \int_{-\pi}^{\pi i} \pi^{-1/2} \cos\ \ nx.\pi^{-1/2} \cos kxdx$$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$(U_n \mid U_k) = \int_{-\pi}^{\pi i} \pi^{-1/2} \cos\ nx.\pi^{-1/2} \cos\ kxdx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} 1/2\,[\cos\,(nx - kx) + \cos\,(nx + kx)]dx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} 1/2\,[\cos\,(n - k)x + \cos\,(n + k)x]dx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} 1/2\ \cos\,(n - k)\ xdx\ + \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} 1/2 \cos\,(n + k)x\ dx$$

Batas dibagi menjadi 2 yaitu dari $-\pi \le x \le 0$ *dan* $0 \le x \le \pi$ karena nilai integralnya sama maka hanya dihitung salah satu kemudian dikalikan 2

$$= 2\ x\ \pi^{-1}.1/2\,[\frac{\sin(n-k)x}{n-k}]^{\pi}{}_{0} + \quad 2\,x\ \pi^{-1}.1/2\,[\frac{\sin\,(n+k)x}{n+k}]_0^{\pi}$$

$= \ 2 \text{ x } 0 + 2 \text{ x } 0$

$= \ 0 \quad = \delta_{nk}$

Nilai $(U_n \mid U_k) = \int_{-\pi}^{\pi i} \pi^{-1/2} \cos\ nx.\pi^{-1/2} \cos kxdx = \begin{cases} 1 & ,n = k \\ 0 & ,n \neq k \end{cases}$

C. Kemungkinan inner product ke-3 yaitu $(U_n \mid U_k) = \int_{-\pi}^{\pi i} \pi^{-1/2} \sin\ nx.\pi^{-1/2} \sin\ kxdx$

Kemungkinan nilai n dan k

1. Nilai n=k

$$(U_n \mid U_k) = \int_{-\pi}^{\pi i} \pi^{-1/2} \sin\ nx.\pi^{-1/2} \sin\ nxdx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} 1/2\,[\cos\,(nx - nx) - \cos\,(nx + nx)]dx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} 1/2\,[\cos 0 - \cos 2nx]dx$$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} 1/2 \ \cos 0 \ dx \ - \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \ \cos 2nx \ dx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} 1/2 \, .1 \, dx \ - \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \ \cos 2nx \ dx$$

Batas dibagi menjadi 2 yaitu dari $-\pi \le x \le 0$ dan $0 \le x \le \pi$ karena nilai integralnya sama maka hanya dihitung salah satu kemudian dikalikan 2

$$= 2 \, x \, \pi^{-1}.1/2 [x]^{\pi}{}_{0} - \ 2x \, \pi^{-1}.1/2 [\frac{\sin 2nx}{2n}]_{0}^{\pi}$$

$$= 2 \ x \ \pi^{-1}.1/2 \, [\pi] - \ 2 \, x \ \pi^{-1}.1/2 \, [\frac{\sin 2n\pi}{2n} - \frac{\sin 0}{2n}]$$

$= \ 1 - 0 = 1 \ = \delta_{nk}$

2. Nilai $n \ne k$

$$(U_n \mid U_k) = \int_{-\pi}^{\pi i} \pi^{-1/2} \sin \ nx.\pi^{-1/2} \sin \ kxdx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \ 1/2 \, [\cos \, (nx - kx) - \cos \, (nx + kx)]dx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \ 1/2 \, [\cos \, (n-k)x - \cos \, (n+k)x]dx$$

$$= \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \ 1/2 \ \cos \, (n-k) \ xdx \ - \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} 1/2 \cos \, (n+k)x \ dx$$

Batas dibagi menjadi 2 yaitu dari $-\pi \le x \le 0$ dan $0 \le x \le \pi$ karena nilai integralnya sama maka hanya dihitung salah satu kemudian dikalikan 2

$$= 2 \ x \ \pi^{-1}.1/2 \, [\frac{\sin(n-k)x}{n-k}]^{\pi}{}_{0} - \ 2 \, x \ \pi^{-1}.1/2 \, [\frac{\sin \, (n+k)x}{n+k}]_{0}^{\pi}$$

= 2 x 0 - 2 x 0 = 0 $= \delta_{nk}$

Nilai $(U_n \mid U_k) = \int_{-\pi}^{\pi i} \pi^{-1/2} \sin \ nx.\pi^{-1/2} \sin \ kxdx = \begin{cases} 1 & ,n = k \\ 0 & ,n \ne k \end{cases}$

Terbukti $(U_n \mid U_k) = \delta_{nk}$ yaitu

- Terbukti bahwa u_n merupakan Sistem Orthonormal

Langkah 2

Dengan menggunakan Corollary 4 yaitu bahwa $r = span\{u_0, u_1, ...\}$, barisan polynomial trygonometri adalah padat di $L_2(-\pi,\pi)$.

Jelas bahwa deret fourier merupakan polynomial trygonometri maka u_n padat di $L_2(-\pi,\pi)$.

Langkah 3

Dengan menggunakan Teorema 3.A yaitu barisan yang merupakan Sistem Orthonormal di ruang Hilbert X atas K apabila padat di X maka Lengkap di X dan berlaku sebaliknya.

- Terbukti bahwa himpunan $\{u_0, u_1, u_2, ...\}$ deret klasik fourier adalah bentuk sistem orthonormal lengkap di ruang Hilbert L_2 $(-\pi,\pi.)$.

Corollary 2.

$\forall u \in L_2(-\pi,\pi)$ deret fourier klasik konvergen di $L2$ $(-\pi,\pi)$ yaitu

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (u(x) - 2^{-1}a_0 - \sum_{k=1}^{m} a_k \cos kx + b_k \sin kx)^2\, dx = 0$$

Bukti

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (u(x) - 2^{-1}a_0 - \sum_{k=1}^{m} a_k \cos kx + b_k \sin kx)^2\, dx =$$

u(x) disubstitusi oleh $u(x) = -2^{-1}a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ diperoleh

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} ((2^{-1}a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\, kx + b_k sin\, kx) - 2^{-1}a_0 - \sum_{k=1}^{m} a_k \cos kx + b_k \sin kx)^2\, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}((2^{-1}a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k cos\ kx + b_k sin\ kx) - 2^{-1}a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx)^2 dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(0)^2 dx$$

=0

Terbukti $\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}(u(x) - 2^{-1}a_0 - \sum_{k=1}^{m} a_k \cos kx + b_k \sin kx)^2 dx = 0$

Lemma 3

Untuk setiap fungsi $f \in C[-\pi,\pi]$ dengan

$f(-\pi) = f(\pi), \forall \varepsilon \geq 0, \exists$ *fungsi* $p \in \tau$ *sehingga* $\| f - p \|_{c[-\pi,\pi]} < \varepsilon$

BUKTI

Langkah 1

Misal f fungsi genap yaitu $f(-x) = f(x)$. Fungsi ini dipenuhi oleh $\phi(x) := \cos x$ yang merupakan fungsi yang menurun tajam pada interval [0,π], $y \to f(\phi^{-1}(y))$ kontinyu pada interval [-1,1], berdasar teorema Aproksimasi Weirstrass yaitu untuk fungsi kontinyu terdapat polynomial $p(y) = c_0 + c_1 y + ... + c_n y^n$ sehingga

$\max_{-1\leq y\leq 1} | f(\phi^{-1}(y) - p(y)) | < \varepsilon$,

Oleh karena itu terdapat $p(y) = c_0 + c_1 y + ... + c_n y^n$ dan berlaku

$\max_{-1\leq y\leq 1} | f(\phi^{-1}(y) - p(y)) | < \varepsilon$, misal y =*cos x,*

$\max_{-1\leq y\leq 1} | f(\phi^{-1}(\cos x) - p(\cos x)) | < \varepsilon$, *q(x):=p(cosx)* maka diperoleh

$\max_{0\leq x\leq \pi} | f(x) - q(x) | < \varepsilon$,

Terbukti untuk f fungsi genap terdapat polynomial q sehingga berlaku

$\max_{-\pi<x<\pi} | f(x)-q(x) | < \varepsilon$

Langkah 2

Misal *f* fungsi ganjil yaitu $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in [-\pi, \pi]$, nilai $f(0) = f(\pi) = 0$. Dipilh $\delta > 0$ dan dibentuk

$$g(x) := \begin{cases} f(\dfrac{\pi(x-\delta)}{\pi - 2\delta}) \ jika \quad 0 < \delta \le x \le \pi - \delta \\ \\ 0 \qquad\qquad jika \quad 0 \le x \le \delta \ atau \ \pi - \delta \le x \le \pi \end{cases}$$

Diketahui *g(x):=-g(-x)* jika $-\pi \le x \le 0$. Saat *f* kontinyu seragam di interval $[-\pi, \pi]$ berdasar teorema Waitress diperoleh $\max_{-\pi \le x \le \pi} | f(x) - g(x) | < \varepsilon / 2$ untuk nilai δ >0 yang cukup kecil .

Saat $x \to \dfrac{g(x)}{\sin(x)} di[-\pi, \pi]$ kontinyu di $[-\pi, \pi]$ karena *g(x)* kontinyu sehingga ada $q \in \tau$ berlaku $\max_{-\pi \le x \le \pi} | \dfrac{g(x)}{\sin(x)} - q(x) | < \varepsilon / 2$, misalkan $r(x) := q(x) \sin x$ diperoleh

$$\max_{-\pi \le x \le \pi} | \frac{g(x)}{\sin(x)} - \frac{q(x)}{\sin(x)} | < \varepsilon / 2$$

$$\max_{-\pi \le x \le \pi} | \frac{1}{\sin x} | . | g(x) - q(x) | < \varepsilon / 2$$

$$\max_{-\pi \le x \le \pi} | g(x) - q(x) | < \max_{-\pi \le x \le \pi} | \sin x | \varepsilon / 2$$

$$\max_{-\pi \le x \le \pi} | g(x) - r(x) | < 1 \, x \, \varepsilon / 2$$

$$\max_{-\pi \le x \le \pi} | g(x) - r(x) | < \varepsilon / 2 \ \text{maka}$$

$$\max_{-\pi \le x \le \pi} | f(x) - r(x) | = \max_{-\pi \le \pi \le \pi} | f(x) - g(x) + g(x) - r(x) |$$

$$\le \max_{-\pi \le x \le \pi} | f(x) - g(x) | + \max_{-\pi \le x \le \pi} | g(x) - r(x) |$$

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

$$\leq \varepsilon$$

Terbukti untuk f fungsi ganjil terdapat $r(x)$ sehingga berlaku

$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} | f(x) - r(x) | < \varepsilon$

Langkah 3

Dalam kasus yang umum, digunakan dekomposisi fungsi yaitu

$f(x) = 2^{-1}(f(x) + f(-x)) + 2^{-1}(f(x) - f(-x))$ kemudian diterapkan langkah 1 untuk fungsi genap dan langkah 2 untuk fungsi ganjil dengan menerapkan Teorema nilai rata-rata Waitress dan ketaksamaan segitiga sehingga diperoleh

$f(x) - f(-x) = 0 \ \ untuk \ x = [0, \pi]$

Corollary 4

Himpunan τ dari polynomial trygonometri adalah padat di $L_2(-\pi, \pi)$

Bukti

Misal $u \in L_2(-\pi, \pi)$ dan misal diberikan $\varepsilon > 0$. Dengan preposisi 7 yaitu $X := C[a,b]$ dengan $-\infty < a < b < \infty$, himpunan Polynomial $p(x) = a_{0_1} + a_1 x + ... + a_n x^n$ dengan a_i bilangan real adalah padat di X sehingga untuk u elemen polynomial *p(x)* dapat diperoleh fungsi kontinyu $C[-\pi, \pi]$ yang padat di $L_2(-\pi, \pi)$ artinya terdapat fungsi kontinyu $f := [-\pi, \pi] \to R$ sehingga

$$\| u - f \| \equiv (\int_{-\pi}^{\pi} (u(x) - f(x))^2 \, dx \ )^{1/2} < \varepsilon$$

Dengan mengganti fungsi kontinyu f didekat titik $x = \pi$ dapat diasumsikan bahwa *f(-π)=fπi)* dengan lemma 3 maka terdapat fungsi $q \in r$ sehingga $\| f - q \| \leq \varepsilon$

Sehingga dapat diperoleh

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$\| u - q \| = \| u - f + f - q \|$$

$$\| u - q \| \leq \| u - f \| + \| f - q \|$$

$$\| u - q \| \leq \varepsilon + \varepsilon$$

$$\| u - q \| \leq 2\varepsilon$$

Terbukti τ padat di $L_2(-\pi, \pi)$

C. Penutup

Berdasarkan uraian di atas dapat diketahui bahwa himpunan $\{u_0, u_1, u_2, ...\}$ deret klasik fourier adalah bentuk sistem orthonormal lengkap di ruang Hilbert L_2 *(-π,π.)*. Sebagai akibatnya himpunan τ dari polynomial trygonometri adalah padat di $L_2(-\pi, \pi)$

DAFTAR PUSTAKA

Conway,John B.,1990," A Course in Functional Analysis ",2 ed, Springer-Verlag,New York

Hendra Gunawan, 2007," naskah pidato guru besar ITB", FMIPA ITB Bandung