A – 6

Modul *Strongly* $\oplus$–*Supplemented*

Dzikrullah Akbar[1], Sri Wahyuni[2]

[1]Mahasiswa S2 Matematika Jurusan Matematika FMIPA UGM
Email : dzikoebar@yahoo.com
[2]Dosen PS S2 Matematika Jurusan Matematika FMIPA UGM
Email : swahyuni@ugm.ac.id

ABSTRAK

Dari M sebarang grup abelian dan R sebarang ring dengan elemen satuan bersama dengan operasi pergandaan skalar antara elemen di R dan elemen di M dapat dibentuk suatu modul M atas ring R terhadap operasi pergandaan skalar tersebut sebagai generalisasi dari struktur ruang vektor atas suatu lapangan. Sebagaimana subruang dalam ruang vektor, dikenal pula struktur submodul dari sebuah modul. Dapat ditunjukkan bahwa jika A dan B sebarang submodul dari modul M, maka $A \cap B$ dan $A + B$ juga merupakan submodul dari M.

Diberikan A dan B sebarang submodul dari modul M. Jika $A + B = M$ berakibat $B = M$, maka submodul A dikatakan *small* di M. Selanjutnya, jika B submodul minimal yang memenuhi $A + B = M$, maka B disebut *supplement* dari A di M. Dapat ditunjukan bahwa hal ini ekuivalen dengan mengatakan submodul B menjadi *supplement* dari A di M jika $A + B = M$ dan $A \cap B$ *small* di B. Modul M dikatakan tersuplemen (*supplemented*) jika setiap submodulnya memiliki *supplement*.

Pada sebarang modul M dikenal submodul yang menjadi *direct summand* dari M. Modul M dikatakan $\oplus$–*supplemented* jika setiap submodulnya memiliki *supplement* yang merupakan *direct summand* dari M. Jika M modul $\oplus$–*supplemented*, maka dapat dipenuhi keadaan bahwa submodul B menjadi *supplement* dari A di M sehingga $A \oplus B = M$. Hal ini yang akan menjadi landasan pemikiran dalam pendefinisian modul *strongly* $\oplus$–*supplemented*.

Dalam artikel ini akan dibahas tentang pengertian dan beberapa sifat terkait modul *strongly* $\oplus$–*supplemented*. Akan diberikan pula syarat perlu agar sebarang modul *supplemented* dapat menjadi modul *strongly* $\oplus$–*supplemented*.

Kata kunci : submodul *supplement*, modul *suplemented*, modul $\oplus$–*supplemented*, modul *strongly* $\oplus$–*supplemented*.

1. PENDAHULUAN

Suatu grup abelian yang dilengkapi dengan operasi pergandaan skalar dari lapangan disebut sebagai struktur ruang vektor atas lapangan. Diperhatikan bahwa lapangan merupakan kondisi khusus dari suatu ring dengan elemen satuan. Berdasar keadaan tersebut, dapat dilakukan proses generalisasi pada struktur ruang vektor, yaitu skalar yang disyaratkan merupakan elemen lapangan diganti menjadi elemen suatu ring dengan elemen satuan. Jika aksioma-aksioma pada ruang vektor masih dipenuhi, maka grup abelian tersebut dapat didefinisikan sebagai modul atas ring. Dengan demikian ruang vektor dapat dipandang sebagai modul atas ring.

Ada beberapa sifat dalam ruang vektor yang masih berlaku dan ada juga yang tidak selalu berlaku dalam modul. Pada ruang vektor dikenal himpunan bagian yang disebut

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

subruang. Demikian juga pada modul, dengan syarat tertentu sebuah himpunan bagian dari modul dapat menjadi submodul. Dapat ditunjukkan bahwa irisan dan jumlahan submodul juga merupakan submodul. Jika dilakukan pembahasan mendalam, dapat dijumpai beberapa keadaan dan pengertian terkait irisan dan jumlahan submodul.

Satu diantara penelitian tentang irisan dan jumlahan submodul adalah tentang konsep submodul *supplement* dalam sebuah modul. Penelitian tersebut dilakukan secara intensif pada tahun 1970-an oleh H. Zöschinger. Kemudian penelitian tersebut terus berlanjut hingga pada tahun 1991 terpublikasikan dalam buku *"Foundations of Module and Ring Theory"* yang disusun oleh Robert Wisbauer dan pada tahun 2006 hasil penelitian yang lebih luas tentang topik ini dipublikasikan oleh John Clark dkk. dalam buku *"Lifting Modules"*.

Penelitian tentang submodul *supplement* akan lebih menarik jika dikaitkan dengan *direct summand* dari sebuah modul. Telah dilakukan beberapa penelitian tentang hal ini, antara lain pada tahun 1999 oleh D. Keskin dkk. yang berjudul *"On ⊕–Supplemented Modules"* dan pada tahun 2004 oleh C. Nebiyev dan A. Pancar yang berjudul *"Strongly ⊕–Supplemented Modules"*.

Artikel ini disusun dengan melakukan studi literatur terhadap beberapa literatur yang telah disebutkan. Adapun tujuan disusunnya artikel ini adalah untuk melakukan kajian lebih mendalam tentang beberapa sifat submodul beserta keterkaitannya dengan submodul lain dan tentunya juga dengan modulnya itu sendiri. Khususnya, keterkaitan antara submodul *supplement* dengan *direct summand* dari sebuah modul. Selanjutnya, akan dapat didefinisikan modul ⊕–*supplemented* dan modul *strongly* ⊕–*supplemented*.

Dengan disusunnya artikel ini diharapkan dapat memberi kemanfaatan yang lebih banyak dan lebih luas terhadap perkembangan penelitian tentang teori modul. Lebih khusus tentang modul ⊕–*supplemented* dan modul *strongly* ⊕–*supplemented*.

2. MODUL DAN SUBMODUL

Pada bagian ini akan diberikan beberapa pengertian dan sifat-sifat dasar dari modul yang akan bermanfaat dalam inti pembahasan artikel ini.

Definisi 2.1 *Diberikan* $(M,+)$ *sebarang grup abelian dan* $(R,+,\cdot)$ *sebarang ring dengan elemen satuan. Himpunan* M *dilengkapi operasi biner* $(\cdot): M \times R \to M$ *disebut modul (kiri) atas ring* R *jika untuk sebarang* $r, s \in R$ *dan untuk sebarang* $m, n \in M$ *berlaku:*

a. $r \cdot (m+n) = r \cdot m + r \cdot n.$

b. $(r+s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m.$

c. $(r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m).$

d. $1_R \cdot m = m$, *dengan* $1_R \in R$ *elemen satuan ring* R.

Selanjutnya, jika M modul atas ring R, dinotasikan dengan R–modul M.

Teorema 2.2 *Diberikan sebarang* R*–modul* M. *Untuk sebarang* $r \in R$ *dan untuk sebarang* $m \in M$ *berlaku:*

a. $r \cdot 0_M = 0_M$, *dengan* $0_M \in M$ *elemen netral modul* M.

b. $0_R \cdot m = 0_M$, *dengan* $0_R \in R$ *elemen netral ring* R.

Sebarang R–modul M memiliki himpunan bagian yang disebut submodul. Adapun pengertian serta syarat perlu dan syarat cukupnya adalah sebagai berikut.

Definisi 2.3 *Diberikan sebarang* R*–modul* M. *Sebarang himpunan* $S \subseteq M$ *dengan* $S \neq \emptyset$ *disebut submodul dari modul* M *jika terhadap operasi yang sama dengan modul* M, *himpunan* S *juga merupakan sebuah* R*–modul dan dinotasikan dengan* $S \leq M$.

Jika S submodul sejati dari modul M dinotasikan dengan $S < M$.

Teorema 2.4 *Diberikan sebarang* R*–modul* M. *Himpunan* $S \leq M$ *jika dan hanya jika untuk sebarang* $s, t \in S$ *dan untuk sebarang* $r \in R$ *berlaku* $s - t \in S$ *dan* $r \cdot s \in S$.

Contoh 2.5 Diberikan sebarang R–modul M, maka $S = \{0_M\} \leq M$ dan disebut submodul trivial.

Teorema 2.6 *Diberikan sebarang* R*–modul* M. *Jika* $S, T \leq M$, *maka* $S \cap T \leq M$ *dan* $S + T = \{s + t | s \in S \text{ dan } t \in T\} \leq M$.

Lemma 2.7 (Hukum Modular) *Diberikan sebarang* R*–modul* M. *Jika* $K, N, H \leq M$ *dengan* $H \leq N$, *maka berlaku* $N \cap (H + K) = H + (N \cap K)$.

Bukti:

Diambil sebarang $n = h + k \in N \cap (H + K)$ dengan $n \in N$, $h \in H$, dan $k \in K$.

Berarti, $n = h + k \in N$ dan $n = h + k \in H + K$. Oleh karena $H \leq N$, maka $h \in N$.

Diperhatikan bahwa $n = h + k \in N$. Akibatnya, $k = n - h \in N$. Di lain pihak, $k \in K$.

Dengan demikian $k \in N \cap K$. Jadi, $n = h + k \in H + (N \cap K)$.

Dengan kata lain, $N \cap (H + K) \subseteq H + (N \cap K)$.

Sebaliknya, karena $H \subseteq N$, maka $H = N \cap H$.

Dengan demikian $H + (N \cap K) = (N \cap H) + (N \cap K)$.

Lebih lanjut, diambil sebarang $a = p + q \in (N \cap H) + (N \cap K)$ dengan $p \in N \cap H$ dan $q \in N \cap K$. Berarti $p \in N$, $p \in H$, $q \in N$, dan $q \in K$. Akibatnya, $a = p + q \in N$ dan $a = p + q \in H + K$. Jadi, $a = p + q \in N \cap (H + K)$.

Dengan kata lain, $H + (N \cap K) \subseteq N \cap (H + K)$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa $N \cap (H + K) = H + (N \cap K)$. ■

Dapat didefinisikan aturan pemetaan tertentu antara dua buah modul sebarang. Lebih khusus, pemetaan yang bersifat mengawetkan operasi.

Definisi 2.8 *Diberikan sebarang R–modul M dan N. Pemetaan $f: M \to N$ disebut homomorfisma modul jika $f(m + n) = f(m) + f(n)$ dan $f(r \cdot m) = r \cdot f(m)$, untuk sebarang $m, n \in M$ dan $r \in R$.*

Jika terdapat homomorfisma modul $f: M \to N$ yang bijektif, maka R–modul M dikatakan isomorfis dengan R–modul N dan dinotasikan dengan $M \cong N$. Lebih lanjut, dapat ditunjukkan bahwa himpunan $Ker(f) = \{m \in M | f(m) = 0_N\} \leq M$ dan $Im(f) = \{n \in N | (\exists m \in M) f(m) = n\} \leq N$.

Diberikan sebarang koleksi berhingga R–modul $M_1, \dots, M_n$, maka himpunan $M_1 \times \dots \times M_n = \{(m_1, \dots, m_n) | m_i \in M_i, 1 \leq i \leq n\}$ dilengkapi dengan operasi

$$(m_1, \dots, m_n) + (n_1, \dots, n_n) = (m_1 + n_1, \dots, m_n + n_n)$$

dan $$r \cdot (m_1, \dots, m_n) = (r \cdot m_1, \dots, r \cdot m_n),$$

untuk sebarang $(m_1, \dots, m_n), (n_1, \dots, n_n) \in M_1 \times \dots \times M_n$ dan $r \in R$, juga merupakan sebuah R–modul.

Definisi 2.9 *R–modul $M_1 \times \dots \times M_n$ disebut direct sum dari R–modul $M_1, \dots, M_n$ dan dinotasikan dengan $M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ atau $\oplus_{i=1}^{n} M_i$.*

Teorema 2.10 *Diberikan sebarang R–modul M dan $M_1, \dots, M_n \leq M$. Jika berlaku $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$ dan $M_i \cap \{M_1 + \cdots + M_{i-1} + M_{i+1} + \cdots + M_n\} = \{0_M\}$, untuk setiap $1 \leq i \leq n$, maka diperoleh $M \cong \oplus_{i=1}^{n} M_i$.*

Definisi 2.11 *Diberikan sebarang R–modul M dan $M_1 \leq M$. Submodul M_1 disebut direct summand dari modul M jika terdapat $M_2 \leq M$ sehingga $M_1 \oplus M_2 \cong M$.*

Contoh 2.12 Diberikan $\mathbb{Z}$–modul $\mathbb{Z}_6$, maka $\{0\}, \{0, 3\}, \{0, 2, 4\}, \mathbb{Z}_6 \leq \mathbb{Z}_6$. Diperhatikan bahwa $\{0, 3\} + \{0, 2, 4\} = \mathbb{Z}_6$ dan $\{0, 3\} \cap \{0, 2, 4\} = \{0\}$. Dengan demikian submodul $\{0, 3\}$ merupakan *direct summand* dari modul $\mathbb{Z}_6$.

Selanjutnya, dari koleksi sebarang modul dapat dibentuk sebuah barisan. Dengan memanfaatkan homomorfisma modul, dapat didefinisikan yang disebut barisan eksak.

Definisi 2.13 *Diberikan sebarang himpunan indeks I, keluarga R–modul $\{M_i\}_{i\in I}$, dan homomorfisma modul $f_i: M_{i-1} \to M_i$. Barisan R–modul dan homomorfisma modul f_i*

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

dikatakan eksak di M_i jika $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$.

Lebih lanjut, barisan tersebut dikatakan eksak jika eksak di setiap M_i.

Teorema 2.14 *Diberikan sebarang R–modul M dan $M_1, M_2 \leq M$. Jika $f: M_1 \to M$ dan $g: M \to M_2$ homomorfisma modul, diperoleh:*

a. Barisan $\{0_M\} \to M_1 \xrightarrow{f} M$ eksak jika dan hanya jika f injektif.

b. Barisan $M \xrightarrow{g} M_2 \to \{0_M\}$ eksak jika dan hanya jika g surjektif.

c. Barisan $\{0_M\} \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to \{0_M\}$ eksak jika dan hanya jika f injektif, g surjektif, dan $Im(f) = Ker(g)$.

Selanjutnya, jika barisan pada Teorema 2.14 (c) eksak, maka disebut eksak pendek dan dikatakan *split* jika $Im(f) = Ker(g)$ merupakan *direct summand* dari modul M.

Teorema 2.15 *Diberikan sebarang R–modul M dan $M_1, M_2 \leq M$. Jika*

$$\{0_M\} \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to \{0_M\}$$

barisan eksak pendek, maka tiga pernyataan berikut ekuivalen:

a. Terdapat homomorfisma modul $\alpha: M \to M_1$ sehingga $(\alpha \circ f) = 1_{M_1}$.

b. Terdapat homomorfisma modul $\beta: M_2 \to M$ sehingga $(g \circ \beta) = 1_{M_2}$.

c. Barisan tersebut split dan

$$M \cong Im(f) \oplus Ker(\alpha) \cong Ker(g) \oplus Im(\beta) \cong M_1 \oplus M_2.$$

Sebagaimana dalam ruang vektor, dalam teori modul juga dikenal modul bebas. Dengan dasar pemikiran modul yang menjadi menjadi *direct summand* dari modul bebas, dapat dikonstruksikan modul yang disebut dengan modul proyektif.

Definisi 2.16 *Diberikan sebarang R–modul M dan P serta $N \leq M$. Jika untuk sebarang homomorfisma surjektif $M \xrightarrow{f} N \to \{0_M\}$ dan homomorfisma $g: P \to N$ terdapat homomorfisma $h: P \to M$ sehingga $g = f \circ h$, maka P disebut modul proyektif.*

3. MODUL $\oplus$–*SUPPLEMENTED*

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Telah dibahas bahwa jumlahan dari dua submodul sebarang juga merupakan sebuah submodul. Lebih lanjut, jika M sebarang R–modul dan $K \leq M$, maka jelas bahwa $K + M = M$. Di lain pihak, pada keadaan tertentu dapat dipilih $L < M$ sehingga $K + L = M$. Namun jika tidak demikian, dapat didefinisikan suatu keadaan baru.

Definisi 3.1 *Diberikan sebarang R–modul M dan $K \leq M$. Submodul K dikatakan small di dalam modul M jika untuk sebarang $L \leq M$ dengan sifat $K + L = M$, maka $L = M$.* Jika K *small* di M dinotasikan dengan $K \ll M$.

Contoh 3.2 Submodul $\{0_M\} \ll M$, untuk sebarang R–modul M.

Lemma 3.3 *Diberikan sebarang R–modul M.*

a. Jika $K \leq L \leq M$ dan $K \ll L$, maka $K \ll M$.

b. Jika $L \ll M$, maka setiap submodul dari L juga small di M.

c. Jika $K \leq L \leq M$ dengan $K \ll M$ dan L direct summand dari M, maka $K \ll L$.

d. $K, L \ll M$ jika dan hanya jika $K + L \ll M$.

Bukti:

a. Diambil sebarang $V \leq M$ dengan $M = K + V$.
   Karena $K \leq L \leq M$, maka $L = L \cap M = L \cap (K + V) = K + (L \cap V)$.
   Oleh karena $K \ll L$, diperoleh $L = L \cap V$. Akibatnya, $K \leq L \leq V$.
   Dengan demikian $M = K + V = V$. Jadi, $K \ll M$.

b. Diambil sebarang $K \leq L$ dengan $M = K + V$, untuk sebarang $V \leq M$.
   Karena $K \leq L$ dan $L \ll M$, maka $M = L + V$ dan diperoleh $V = M$.
   Dengan kata lain, dapat ditunjukkan bahwa $K \ll M$.

c. Diketahui $K \leq L \leq M$, $K \ll M$, dan $M = L \oplus P$ untuk suatu $P \leq M$.
   Diambil sebarang $V \leq L$ dengan $L = K + V$.
   Diperhatikan $M = L + P = (K + V) + P = K + (V + P)$ dan $L \cap P = \{0_M\}$.
   Karena $K \ll M$, maka $V + P = M$ dan karena $V \leq L$, maka $V \cap P \leq L \cap P$.
   Hal ini berarti $V \cap P = \{0_M\}$, sehingga diperoleh $M = V \oplus P$.
   Lebih lanjut, diperoleh $L = L \cap M = L \cap (V \oplus P) = V \oplus (L \cap P) = V$.
   Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $K \ll L$.

d. ($\Longrightarrow$) Diambil sebarang $V \leq M$ dengan $M = (K + L) + V = K + (L + V)$.
   Karena $K \ll M$, maka $L + V = M$ dan karena $L \ll M$ maka $V = M$.
   Hal ini berarti, $K + L \ll M$.

($\Leftarrow$) Diperhatikan bahwa $K \leq K + L$ dan $L \leq K + L$.

Karena $K + L \ll M$, maka diperoleh $K \ll M$ dan $L \ll M$. ■

Pada Contoh 2.12 telah diberikan bahwa $\{0, 3\} + \{0, 2, 4\} = \mathbb{Z}_6$. Akan tetapi, berlaku pula bahwa $\{0, 3\} + \mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_6$. Dengan demikian, $\{0, 2, 4\}$ merupakan submodul minimal dari $\mathbb{Z}_6$ yang memenuhi $\{0, 3\} + V = \mathbb{Z}_6$, untuk sebarang $V \leq \mathbb{Z}_6$. Berdasar hal tersebut, dapat dilakukan generalisasi pada sebarang R–modul M.

Definisi 3.4 *Diberikan sebarang R–modul M dan $U, V \leq M$. Submodul V disebut supplement dari submodul U di dalam modul M jika V merupakan submodul minimal yang memenuhi $U + V = M$.*

Lemma 3.5 *Diberikan sebarang R–modul M. Submodul V merupakan supplement dari submodul U di M jika dan hanya jika $M = U + V$ dan $U \cap V \ll V$.*

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui V *supplement* dari U di M.

Berarti V submodul minimal yang memenuhi $M = U + V$.

Diambil sebarang $X < V$ dengan $(U \cap V) + X = V$. Diperhatikan bahwa

$$M = U + V = U + \big((U \cap V) + X\big) = \big(U + (U \cap V)\big) + X = U + X.$$

Oleh karena V submodul minimal, maka diperoleh $X = V$. Akibatnya, $U \cap V \ll V$.

($\Leftarrow$) Diketahui $M = U + V$ dan $U \cap V \ll V$.

Akan ditunjukkan V *supplement* dari U di M.

Diambil sebarang $Y < V$ dengan $U + Y = M$. Diperhatikan bahwa

$$V = M \cap V = (U + Y) \cap V = (U \cap V) + Y.$$

Oleh karena $U \cap V \ll V$, maka diperoleh $Y = V$.

Dengan demikian, V merupakan submodul minimal yang memenuhi $M = U + V$.

Hal ini berarti, V merupakan *supplement* dari U di M. ■

Lemma 3.6 *Diberikan sebarang R–modul M, $U, V \leq M$ dengan V supplement dari U di M, dan $K, T \leq V$ sebarang. T supplement dari K di V jika dan hanya jika T supplement dari $U + K$ di M.*

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui T *supplement* dari K di V.

Berarti, T submodul minimal yang memenuhi $V = K + T$.

Diambil sebarang $L \leq T$ dengan $(U + K) + L = U + (K + L) = M$.

Oleh karena V *supplement* dari U di M, maka V submodul minimal yang memenuhi $M = U + V$. Akibatnya, $K + L = V$.

Selanjutnya, karena T submodul minimal yang memenuhi $V = K + T$, maka $L = T$.

Dengan demikian, T submodul minimal yang memenuhi $(U + K) + T = M$.

Dengan kata lain, T *supplement* dari $U + K$ di M.

$(\Leftarrow)$ Diketahui T *supplement* dari $U + K$ di M.

Berarti, T submodul minimal yang memenuhi $(U + K) + T = M$.

Diketahui $K, T \leq V$, maka $K + T \leq V$. Lebih lanjut, karena

$$(U + K) + T = U + (K + T) = M$$

dan V submodul minimal yang memenuhi $M = U + V$, maka $K + T = V$.

Oleh karena $K \cap T \leq (U + K) \cap T \ll T$, maka $K \cap T \ll T$.

Dengan kata lain, T *supplement* dari K di V. ■

Lemma 3.7 *Diberikan sebarang R–modul M dan $U, V \leq M$ dengan V supplement dari U di M. Jika $M = W + V$ untuk suatu $W \leq U$, maka V supplement dari W di M.*

Sistem bilangan rasional merupakan sebuah modul atas ring bilangan bulat. Untuk suatu bilangan prima p, himpunan $\mathbb{Q}_{(p)} = \left\{ {}^{a}/_{b} \in \mathbb{Q} \middle| p \text{ tidak habis membagi } b \right\} \leq \mathbb{Q}$. Akan tetapi submodul $\mathbb{Q}_{(p)}$ tidak memiliki *supplement* di $\mathbb{Q}$. Dengan demikian ada modul yang tidak semua submodulnya memiliki *supplement*.

Definisi 3.8 *Diberikan sebarang R–modul M. Modul M dikatakan supplemented jika setiap submodulnya memiliki supplement di dalam modul M.*

Contoh 3.9 Berdasar Contoh 2.12, diketahui $\{0\}, \{0,3\}, \{0,2,4\}, \mathbb{Z}_6 \leq \mathbb{Z}_6$. Modul $\mathbb{Z}_6$ merupakan modul *supplemented*, karena:

a. $\mathbb{Z}_6$ menjadi *supplement* dari submodul $\{0\}$ dan juga sebaliknya.

b. $\{0,3\}$ menjadi *supplement* dari submodul $\{0,2,4\}$ dan juga sebaliknya.

Pada Contoh 2.12 telah ditunjukkan bahwa $\{0,3\}$ merupakan *direct summand* dari $\mathbb{Z}_6$ dan Contoh 3.9 memberikan $\{0,3\}$ menjadi *supplement* dari $\{0,2,4\}$ di $\mathbb{Z}_6$. Berdasar pada keadaan tersebut, dapat dilakukan generalisasi pada sebarang R–modul.

Definisi 3.10 *Diberikan sebarang R–modul M. Modul M dikatakan $\oplus$–supplemented jika setiap submodulnya memiliki supplement yang merupakan direct summand dari M.*

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Definisi 3.11 *Diberikan sebarang* R*–modul* M. *Modul* M *dikatakan completely* $\oplus$*–supplemented jika setiap direct summand dari* M *adalah* $\oplus$*–supplemented.*

4. MODUL *STRONGLY* $\oplus$*–SUPPLEMENTED*

Jika pada sebarang M modul $\oplus$*–supplemented*, submodul V menjadi *supplement* dari U dan juga sebaliknya, maka diperoleh $M = U + V$, $U \cap V \ll V$, $U \cap V \ll U$, dan U, V merupakan *direct summand* dari M. Namun demikian, tidak disyaratkan bahwa $U \cap V = \{0_M\}$ sehingga $U \oplus V = M$. Berdasar pemikiran tersebut dapat didefinisikan suatu keadaan baru sebagai berikut.

Definisi 4.1 *Diberikan sebarang* R*–modul* M. *Jika modul* M *supplemented dan setiap submodul supplement di* M *merupakan direct summand dari* M, *maka modul* M *dikatakan strongly* $\oplus$*–supplemented.*

Sama halnya dengan mengatakan, jika M modul *strongly* $\oplus$*–supplemented* dan untuk sebarang $U, V \leq M$ saling ber-*supplement* berakibat $U \oplus V = M$.

Akibat 4.2 *Diberikan sebarang* R*–modul* M. *Jika* M *modul strongly* $\oplus$*–supplemented, maka* M *modul* $\oplus$*–supplemented.*

Contoh 4.3 $\mathbb{Z}$–modul $\mathbb{Z}_6$ merupakan modul *strongly* $\oplus$*–supplemented*.

Selanjutnya, akan diberikan syarat perlu agar sebarang modul *supplemented* menjadi modul *strongly* $\oplus$*–supplemented*, yaitu dengan memanfaatkan generalisasi modul proyektif.

Definisi 4.4 *Diberikan sebarang* R*–modul* M. *Modul* M *disebut modul* π*–proyektif jika terdapat homomorfisma* $f: M \to M$ *sehingga* $Im(f) \leq U$ *dan* $Im(1 - f) \leq V$, *untuk sebarang* $U, V \leq M$ *dengan* $M = U + V$.

Hal ini ekuivalen dengan menyatakan bahwa homomorfisma surjektif $f: U \oplus V \to M$, dengan $f(u, v) = u + v$ adalah *split.*

Lemma 4.5 *Diberikan sebarang* R*–modul* M. *Jika modul* M *supplemented dan* π*–proyektif, maka modul* M *strongly* $\oplus$*–supplemented.*

Bukti:

Diambil sebarang $U, V \leq M$ yang saling ber-*supplement* di M.

Hal ini berarti $M = U + V$, $U \cap V \ll U$, dan $U \cap V \ll V$.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Karena modul M π–proyektif, maka ekuivalen dengan mengatakan bahwa homomorfisma surjektif $f: U \oplus V \to M$, dengan $f(u, v) = u + v$ adalah *split*.

Diperhatikan bahwa $Ker(f) = \{(u, -u) | u \in U \cap V\} \leq (U \cap V, \{0_M\}) + (\{0_M\}, U \cap V$.

Lebih lanjut, karena $U \cap V, \{0_M\} \ll V$ dan $U \cap V, \{0_M\} \ll U$, maka diperoleh

$$Ker(f) = \{(u, -u) | u \in U \cap V\} \ll U \oplus V.$$

Akibatnya, diperoleh $U \cap V = \{0_M\}$. ∎

Selanjutnya, akan diberikan beberapa sifat dari modul *strongly* $\oplus$–*supplemented*.

Lemma 4.5 *Diberikan sebarang* R*–modul* M*. Jika* M *modul strongly* $\oplus$*–supplemented, maka setiap direct summand dari* M *adalah strongly* $\oplus$*–supplemented.*

Bukti:

Diambil sebarang U *direct summand* dari M. Berarti $M = U \oplus V$, untuk suatu $V \leq M$.

Diberikan K *supplement* dari L di U, maka diperoleh K *supplement* dari $L \oplus V$ di M.

Karena modul M *strongly* $\oplus$–*supplemented*, maka K *direct summand* dari M.

Dengan demikian terdapat $P \leq M$ sehingga $M = K \oplus P$.

Lebih lanjut, diperoleh $U = U \cap M = U \cap (K \oplus P) = K \oplus (U \cap P)$.

Hal ini berarti, K *direct summand* dari U dan U *strongly* $\oplus$–*supplemented*. ∎

Akibat 4.6 *Diberikan sebarang* R*–modul* M*. Jika* M *modul strongly* $\oplus$*–supplemented, maka* M *modul completely* $\oplus$*–supplemented.*

Ada beberapa jenis modul dengan elemen-elemennya memenuhi syarat tertentu jika diteliti merupakan modul *strongly* $\oplus$–*supplemented*.

Definisi 4.7 *Diberikan sebarang* R*–modul* M *dan* $V \leq M$*. Submodul* V *disebut lies above a direct summand dari* M *jika terdapat* $M_1, M_2 \leq M$ *sehingga* $M = M_1 \oplus M_2$ *dengan* $M_1 \leq V$ *dan* $V \cap M_2 \ll M_2$*.*

Selanjutnya, modul M disebut modul $(D1)$, jika setiap submodulnya *lies above a direct summand* dari M.

Teorema 4.8 *Diberikan sebarang* R*–modul* M*. Jika* M *merupakan modul* $(D1)$*, maka* M *modul strongly* $\oplus$*–supplemented.*

Bukti:

Diambil sebarang $V \leq M$. Karena M modul $(D1)$, maka terdapat $M_1, M_2 \leq M$ sehingga $M = M_1 \oplus M_2$ dengan $M_1 \leq V$ dan $V \cap M_2 \ll M_2$.

Karena $M_1 \leq V$ dan $M = M_1 + M_2$, maka $M = V + M_2$.

Diperhatikan bahwa $V \cap M_2 \ll M_2$, berarti M_2 menjadi *supplement* dari V di M.

Dengan demikian M merupakan modul *supplemented*.

Karena M_2 *supplement* dari V di M dan $M_1 \leq V$, maka M_2 *supplement* dari M_1 di M.

Karena M_1 *direct summand* dari M, maka M modul *strongly* ⊕–*supplemented*. ■

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasar pembahasan pada bagian-bagian sebelumnya, maka dapat disimpulkan beberapa hal, antara lain:

1. Jika modul M π–proyektif, maka tiga pernyataan berikut ekuivalen:
   a. M modul *supplemented*.
   b. M modul ⊕–*supplemented*.
   c. M modul *strongly* ⊕–*supplemented*.
2. Setiap modul $(D1)$ merupakan modul *strongly* ⊕–*supplemented*.

Untuk semua kajian ilmiah bidang matematika, akan menjadi lebih mudah dan lebih menarik jika dapat memahami dengan baik terlebih dahulu latar belakang dan motivasi yang mendasari dilakukannya sebuah penelitian. Khususnya, jika dilakukan penelitian lebih mendalam tentang modul *strongly* ⊕–*supplemented*, sangat diperlukan dasar-dasar yang kuat dalam teori modul. Selain itu, masih ada beberapa hal menarik yang bisa dikaji tentang modul *strongly* ⊕–*supplemented*. Antara lain, dapat dikaitkan dengan sifat-sifat modul bebas, modul *simple*, ataupun modul *semiperfect*.

6. DAFTAR PUSTAKA

Adkins, William A. dan Steven H. Weintraub, 1992, *"Algebra An Approach via Module Theory"*, Springer–Verlag, New York.

Clark, John, Christian Lomp, Narayanaswami Vanaja, dan Robert Wisbauer, 2006, *"Lifting Modules"*, Birkhäuser Verlag, Basel.

Keskin, D., A. Harmanci, dan P.F. Smith, 1999, *"On ⊕–Supplemented Modules"*, Acta Mathematica, Hungar, 83 (1–2), 161–169.

Nebiyev, C. dan A. Pancar, 2004, *"Strongly ⊕–Supplemented Modules"*, International Jurnal of Computational Cognition, Vol.2, Number 3, 57–61.

Wisbauer, Robert, 1991, *"Foundations of Module and Ring Theory"*, Gordon and Breach, Philadelphia.