 *ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3*

**A – 5**

# Sifat Akar Polinom Dan Penerapannya Pada Sistem Persamaan Non Linier

Oleh:
Drs. Arjudin, M.Si.
Dosen Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Mataram

**ABSTRAK**

Persamaan kuadrat berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dengan akar-akar $x_1$ dan $x_2$ mempunyai sifat jumlah akar $x_1 + x_2 = -b/a$ dan hasil kali akar $x_1 \cdot x_2 = c/a$. Sifat-sifat akar ini dapat diperumum ke polinom berpangkat lebih tinggi. Untuk persamaan kubik berbentuk $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ dengan akar-akar $x_1$, $x_2$ dan $x_3$, berlaku sifat-sifat: $x_1 + x_2 + x_3 = -b/a$, $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = c/a$, dan $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -d/a$. Demikian juga untuk persamaan pangkat empat berbentuk $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ dengan akar-akar $x_1$, $x_2$, $x_3$ dan $x_4$, berlaku sifat-sifat: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -b/a$, $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = c/a$, $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -d/a$, dan $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = e/a$. Dengan menggunakan sifat-sifat akar tersebut dapat diselesaikan beberapa bentuk sistem persamaan non linier.

*Kata-kata kunci*: akar, polinom, persamaan, non linier.

## A. PENDAHULUAN

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, Matematika juga senantiasa mengalami perkembangan. Di samping mengembangkan berbagai penerapan Matematika pada bidang ilmu lain dan penerapan praktis dalam kehidupan sehari-hari, para Matematikawan juga mengembangkan pemikiran-pemikiran tentang teori Matematika itu sendiri atau disebut pengembangan Matematika murni.

Dalam pembelajaran Matematika di SMA, siswa mempelajari tentang persamaan kuadrat. Materi persamaan kuadrat meliputi cara mencari penyelesaian, sifat-sifat akar, serta pennggunaannya dalam menyelesaikan permasalahan-permasalahan terkait baik masalah Matematika maupun masalah dalam kehidupan sehari-hari. Untuk persamaan berderajat lebih tinggi, juga dibahas cara penyelesaiannya dengan cara Pembagian Horner. Akan tetapi pembahasan tentang sifat-sifat akar hanya terbatas sampai pada persamaan kuadrat saja. Dengan demikian permasalahan-permasalahan terkait yang dapat dipecahkan juga hanya terbatas pada penggunaan sifat-sifat akar persmaan kuadrat, yaitu sifat jumlah dan hasil kali akar.

Berdasarkan latar belakang di atas dirumuskan permasalahan apakah sifat jumlah dan hasil kali akar yang berlaku pada persamaan kuadrat dapat diperumum ke persamaan polinom berderajat lebih tinggi. Pengembangan sifat-sifat akar ke persamaan polinom berderajat lebih tinggi sekaligus akan mengembangkan ke pemecahan permasalahan-permasalahan yang terkait dengan sifat-sifat akar tersebut.

Oleh karena itu, tulisan ini bertujuan menentukan sifat-sifat akar pada persamaan kubik $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ dan persamaan berderajat empat $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ serta persamaan polinom berderajat lebih tinggi, serta menggunakan sifat-sifat akar untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan.

Adapun manfaat dari tulisan ini diharapkan bagi guru dapat memperluas wawasan dalam pembelajaran Matematika khususnya tentang pembelajaran polinom berderajat tiga atau lebih tinggi. Sedangkan bagi penggemar matematika diharapkan dapat digunakan sebagai acuan untuk pengembangan Matematika lebih lanjut.

## B. PEMBAHASAN

### 1. Persamaan Kuadrat dan Sifat-sifat Akarnya

Persamaan kuadrat mempunyai bentuk umum $ax^2 + bx + c = 0$, dimana a, b, c bilangan riil dan $a \neq 0$. Untuk mencari akar-akar persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan tiga cara, yaitu pemfaktoran, melengkapkan kuadrat, dan rumus-abc $x_{1.2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Bentuk $D = b^2 - 4ac$ disebut diskriminan yang membedakan akar-akar persamaan kuadrat menjadi 3 kemungkinan, yaitu dua akar riil berbeda ($D > 0$), dua akar riil kembar ($D = 0$), dan dua akar kompleks saling konjugate ($D < 0$).

Misalkan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $x_1$ dan $x_2$. Dengan menggunakan rumus-abc dapat ditentukan sifat jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat tersebut, yaitu $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ dan $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$. Bentuk jumlah dan hasil kali ini dapat digunakan untuk menyatakan bentuk-bentuk yang lain, antara lain:

(1) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

(2) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$

(3) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1x_2)^2$

(4) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$

(5) $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \dfrac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2x_2^2} = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{x_1x_2}\right)^2 - \dfrac{2}{x_1x_2}$.

Dengan menyatakan bentuk-bentuk tersebut dalam jumlah dan hasil kali, bentuk-bentuk operasi yang memuat $x_1$ dan $x_2$ dapat dihitung nilainya tanpa harus mencari nilai masing-masing akarnya terlebih dahulu.

**2. Polinom Berderajat Lebih Tinggi**

Yang dimaksud polinom berderajat tinggi adalah polinom yang pangkat variabelnya lebih dari dua. Secara umum fungsi polinom berderajat n mempunyai bentuk $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x^1 + a_n$.

Seperti diketahui bahwa persamaan kuadrat dapat diselesaikan dengan rumus-abc. Untuk persamaan kubik $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, akar-akarnya dapat diperoleh dengan rumus:

$$x_1 = \frac{1}{6}\sqrt[3]{\alpha} + \frac{2}{3}\frac{p^2 - 3q}{\sqrt[3]{\alpha}} - \frac{1}{3}p,$$

dimana $\alpha = 36pq - 108r - 8p^3 + 12\sqrt{3}\sqrt{4q^3 - p^2q^2 - 18pqr + 27r^2 + 4p^3r}$,

dan $x_{2.3} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4\cdot n}}{2}$, dimana k dan n memenuhi persamaan $k - x_1 = p$, $n - kx_1 = q$ atau $-nx_1 = r$. (Arjudin, 2003: 1156)

Secara lebih umum, cara mencari penyelesaian persamaan polinom berderajat lebih tinggi dapat dilakukan dengan cara pemfaktoran.

Suatu pembagian polinom f(x) oleh polinom g(x) akam memberikan hubungan yang unik dalam kaitannya dengan hasil bagi H(x) dan sisa S(x), yaitu

$$f(x) = H(x)g(x) + S(x),$$

dengan derajat S(x) kurang dari g(x).

Pemfaktoran polinom dapat dilakukan dengan cara pembagian bersusun, seperti halnya bilangan dan dengan cara pembagian Horner. Cara pembagian Horner disebut juga cara pembagian sintetis. (Keedy, 1996: 483)

Untuk pembagian polinom secara bersusun, misalnya pembagian suku banyak $ax^3 + bx^2 + cx + d$ oleh $(x - k)$ dapat dilakukan sebagai berikut.

$$\begin{array}{r|l} & ax^2 + (ak+b)x + (ak^2+bk+c) \\ \hline x - k & ax^3 + bx^2 + cx + d \\ & \underline{ax^3 - akx^2} \quad - \\ & \quad (ak+b)x^2 + cx + d \end{array}$$

$$\underline{(ak+b)x^2 - (ak^2+bk)x} \;\; -$$

$$(ak^2 + bk + c)x + d$$

$$\underline{(ak^2 + bk + c)x - (ak^3 + bk^2 + ck)} \;\; -$$

$$ak^3 + bk^2 + ck + d$$

Dari pembagian bersusun di atas diperoleh bahwa pembagian $ax^3 + bx^2 + cx + d$ oleh $(x – k)$ memberikan hasil pembagian $H(x) = ax^2 + (ak + b)x + (ak^2 + bk + c)$ dan sisa $S = ak^3 + bk^2 + ck + d$.

Pembagian $ax^3 + bx^2 + cx + d$ oleh $(x – k)$ dengan cara Horner dilakukan sebagai berikut :

$$\begin{array}{l|llll}
 & a & b & c & d \\
 & & ak & ak^2 + bk & ak^3+bk^2+ck \\ \hline
 & a & ak+b & ak^2+bk+c & \boxed{ak^3 + bk^2 + ck + d}
\end{array} \quad +$$

*Keterangan* : $\nearrow$ : dikalikan k.

Pada skema di atas, baris teratas dituliskan koefisien-koefisiennya saja, yaitu a koefisien $x^3$, b koefisien $x^2$, c koefisien x, dan d konstanta. Pada baris paling bawah di bagian kiri merupakan hasil pembagiannya yang ditunjukkan oleh koefisien-koefisien dengan pangkat berkurang satu daripada fungsi yang dibagi, sedangkan bagian paling kanan menyatakan sisanya. Hasil yang diperoleh sama dengan cara bersusun yaitu hasil pembagiannya $H(x) = ax^2 + (ak + b)x + (ak^2 + bk + c)$ dan sisa $S = ak^3 + bk^2 + ck + d$.

Teorema Sisa 1 menyatakan bahwa jika f(x) dibagi oleh (x – k), maka sisa pembagiannya adalah f(k). (Soedyarto, 2008: 159).

Karena derajat dari $g(x) = x – k$ adalah 1, maka dapat diperoleh $f(x) = (x-k)g(x) + r$, dengan r konstanta. Jika $x = k$, diperoleh $f(k) = r$.

Bilangan k merupakan akar dari persamaan polinom $f(x) = 0$, jika $f(k) = 0$. Dalam hal ini berlaku bahwa bilangan k merupakan akar polinom f(x) apabila f(x) habis dibagi oleh (x - k).

 **ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3**

Untuk melakukan pembagian suku banyak f(x) dengan (mx – k) terlebih dahulu nyatakan mx – k = m(x – $\frac{k}{m}$). Selanjutnya lakukan pembagian f(x) dengan (x - $\frac{k}{m}$) seperti uraian di atas, misalnya diperoleh hasil baginya H(x) dan sisanya S. Sehingga diperoleh f(x) = (x - $\frac{k}{m}$)H(x) + S = (mx – k) $\frac{H(x)}{m}$ + S.

Apabila sisanya 0 akan diperoleh bentuk pemfaktoran.

Hal ini mengarah pada teorema sisa 2 yang menyatakan bahwa jika f(x) dibagi (ax – b), maka sisa pembagiannya adalah f($-\frac{b}{a}$).

### 3. Sifat –sifat Akar Persamaan Polinom Berderajat Tinggi

Perhatikan persamaan kubik f(x) = 0, dimana f(x) = $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ dengan $a_0 \neq 0$ dan misalkan $x_1$, $x_2$ dan $x_3$ adalah akar-akarnya.

Dapat dinyatakan f(x) = $a_0(x – x_1)(x – x_2)(x – x_3)$, sehingga

$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = a_0(x^3 – (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1\cdot x_2 + x_1\cdot x_3 + x_2\cdot x_3)x -$ $x_1\cdot x_2\cdot x_3$

Dengan menyamakan koefisien-koefisiennya diperoleh

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{a_2}{a_0}, \text{ dan}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{a_3}{a_0}.$$

Selanjutnya, perhatikan persamaan polinom pberderajat empat f(x) = 0, dimana f(x) = $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$, dengan a ≠ 0 dan misalkan $x_1$, $x_2$,$x_3$, dan $x_4$ adalah akar-akarnya.

Dengan cara serupa di atas, dapat dinyatakan f(x) = $a_0(x – x_1)(x – x_2)(x – x_3)(x – x_4)$, sehingga

$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = a_0(x^4 – (x_1 + x_2 + x_3+ x_4)x^3 + (x_1\cdot x_2 + x_1\cdot x_3 + x_1\cdot x_4 + x_2\cdot x_3 + x_2\cdot x_4 + x_3\cdot x_4)x^2 – (x_1\cdot x_2\cdot x_3 + x_1\cdot x_2\cdot x_4 + x_1\cdot x_3\cdot x_4 + x_2\cdot x_3\cdot x_4)x + x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$.

Dengan menyamakan koefisien-koefisiennya juga diperoleh

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = \frac{a_2}{a_0},$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -\frac{a_3}{a_0}, \text{ dan}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{a_4}{a_0}.$$

Kita perhatikan bahwa sifat jumlah dan hasil kali akar pada persamaan kuadrat dapat diperumum ke persamaan kubik menjadi sifat-sifat: jumlah akar, jumlah perkalian dua faktor, dan hasil kali akar. Demikian juga pada persamaan polinom berpangkat empat berlaku sifat-sifat akar: jumlah akar, jumlah perkalian dua faktor, jumlah perkalian tiga faktor, dan hasil kali akar.

Sifat-sifat akar polinom ini dapat diperumum ke polinom berderajat n. Terlebih dahulu diperkenalkan penggunaan notasi Σ sebagai berikut:

(1) $\Sigma x_1$ menyatakan jumlah akar, yaitu $\Sigma x_1 = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$,

(2) $\Sigma x_1x_2$ menyatakan jumlah dua faktor, yaitu $\Sigma x_1x_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + ... + x_1 \cdot x_n + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + ... + x_2 \cdot x_n + .... + x_{n-2} \cdot x_{n-1} + x_{n-2} \cdot x_n + x_{n-1} \cdot x_n$,

(3) $\Sigma x_1x_2x_3$ menyatakan jumlah tiga faktor,

yaitu $\Sigma x_1x_2x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 + ... + x_1 \cdot x_2 \cdot x_n + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 + .... + x_1 \cdot x_3 \cdot x_n + .... + x_{n-3} \cdot x_{n-2} \cdot x_{n-1} + x_{n-3} \cdot x_{n-2} \cdot x_n + x_{n-2} \cdot x_{n-1} \cdot x_n$.

dan seterusnya,

(4) $\Sigma x_1x_2x_3...x_{n-1}$ menyatakan penjumlahan n-1 faktor,

yaitu $\Sigma x_1x_2x_3...x_{n-1} = x_1x_2x_3...x_{n-1} + x_2x_3...x_{n-1}x_n$, dan

(5) $\Sigma x_1x_2x_3...x_n = x_1x_2x_3...x_n$ merupakan hasil kali akar dan ditulis $x_1x_2x_3...x_n$ saja.

Selanjutnya untuk persamaan polinom berderajat n berbentuk $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + .... + a_{n-1}x + a_n = 0$, dengan $a_0 \neq 0$, dapat dimisalkan akar-akar persamaan polinomnya $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.

Dapat dinyatakan $f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)....(x - x_n)$ , sehingga

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = a_0(x^n - (x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)x^{n-1} + (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + ... + x_1 \cdot x_n + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 ... + x_2 \cdot x_n + ... + x_{n-1} \cdot x_n)x^{n-2} + .... + (-1)^{n-1}(x_1 \cdot x_2 \cdot ... x_{n-1} + x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n)x + (-1)^n x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n$.

Dengan menyamakan koefisien-koefisiennya dapat diperoleh sifat-sifat akar polinom:

$$\sum x_1 = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$\sum x_1 x_2 = \frac{a_2}{a_0},$$

$$\sum x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_3}{a_0},$$

.......

$$\sum x_1 x_2 x_3 ... x_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{a_{n-1}}{a_0}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 .... x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

## 4. Penerapan Sifat Akar Polinom pada Sistem Persamaan Non Linier

Terlebih dahulu kita ingat rumus-rumus binomial dan multinomial sebagai berikut:

a. Perpangkatan 2 suku (binomial):

(1) $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

(2) $(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3$

(3) $(x_1 + x_2)^4 = x_1^4 + 4x_1^3 x_2 + 6x_1^2 x_2^2 + 4x_1 x_2^3 + x_2^4$

b. Perpangkatan 3 suku:

(4) $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

(5) $(x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2x_3^2) + 6x_1x_2 x_3$.

Selanjutnya akan diuraikan tentang fungsi polinom simetris yang merupakan landasan untuk pembahasan sifat-sifat akar polinom.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Definisi: (Fungsi Simetris)

Suatu fungsi dalam variabel a, b, c, …. dikatakan **simetris** dalam a, b, c, …. jika tidak akan mengalami perubahan oleh permutasi (pertukaran) a, b, c, …. (Depdiknas, 1999: 39).

Contohnya, a + b dan $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ adalah simetris dalam a dan b, tetapi a – b adalah tidak simetris.

Fungsi simetris dalam variabel p, q, dan r antara lain: p + q + r, pq + pr + qr, pqr. Sesuai dengan notasi Σ yang dimaksud di atas, dua fungsi pertama biasanya dinyatakan berturut-turut dengan Σp dan Σpq. Ketiga fungsi tersebut disebut **fungsi simetris sederhana** dalam p, q, dan r. (Prayitno, 2003: 90)

Adapun fungsi simetris sederhana dalam p, q, r, dan s adalah Σp = p + q + r + s, Σpq = pq + pr + ps + qr + qs +rs, Σpqr = pqr +pqs + qrs , dan pqrs.

Teorema: (Teorema Newton)

Setiap polinom simetri dalam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dapat dinyatakan sebagai polinom dalam fungsi simetri sederhana $a_1, a_2, \ldots, a_n$. (Depdiknas, 1999: 40)

Sebagai contoh:

(1) $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$,

dapat ditulis $a^2 + b^2 + c^2 = (\Sigma a)^2 - 2\Sigma ab$.

(2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a+b+c+d)^2 - 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$,

dapat ditulis $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (\Sigma a)^2 - 2\Sigma ab$.

(3) $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a+b+c)(ab+ac+bc) + 3abc$,

dapat ditulis $a^3 + b^3 + c^3 = (\Sigma a)^3 - 3(\Sigma a)(\Sigma ab) + 3abc$

Dari uraian tentang sifat akar polinom, terlihat keterkaitan bahwa fungsi simetris sederhana dari akar-akar polinom dapat ditentukan nilainya dengan menggunakan sifat-sifat akar polinom yang diuraikan di atas, dimana nilainya bergantung pada koefisien-koefisien persamaan polinomnya.

Selanjutnya berdasarkan Teorema Newton yang menyatakan bahwa setiap polinom simetris dapat dinyatakan dalam fungsi-fungsi simetri sederhana, maka sistem persamaan non linier yang simetris dapat diselesaikan dengan menggunakan sifat-sifat akar polinom.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Contoh 1: Tentukan solusi dari sistem persamaan :

$p + q + r = 1$,

$p^2 + q^2 + r^2 = 29$,

$pqr = -24$.

*Jawab* : Nilai p, q, r yang memenuhi sistem persamaan di atas merupakan akar-akar dari persamaan suku banyak $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, dengan koefisien yang bersesuaian. Kita tetapkan koefisien $a_0 = 1$ dan koefisien-koefisien yang lain adalah :

$$a_1 = \frac{a_1}{a_0} = -\Sigma p = -1,$$

dan dari hubungan $\Sigma p^2 = (\Sigma p)^2 - 2(\Sigma pq)$, diperoleh

$$a_2 = \Sigma pq = \frac{(\sum p)^2 - \sum p^2}{2} = \frac{1-29}{2} = -14,$$

serta $a_3 = -pqr = 24$.

Persamaan polinomnya adalah $x^3 – x^2 – 14x + 24 = 0$. Dengan menggunakan pembagian horner diperoleh pemfaktoran

$$\begin{aligned} x^3 – x^2 – 14x + 24 &= (x - 2)(x^2 + x – 12) \\ &= (x – 2)(x – 3)(x + 4). \end{aligned}$$

Akar-akar persamaan polinomnya adalah $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_4 = -4$.

Karena sistem persamaannya simetris maka himpunan penyelesaiannya = $\{(x, y, z) : x, y, z \in \{2, 3, -4\}, x \neq y \neq z\}$ atau secara singkat ditulis (2, 3, -4) saja.

Contoh 2: Selesaikan sistem persamaan non linier berikut:

$x + y + z = -2$,

$x^2 + y^2 + z^2 = 6$,

$x^3 + y^3 + z^3 = -8$.

*Jawab*: Nilai x, y, z yang memenuhi sistem persamaan di atas merupakan akar-akar dari persamaan suku banyak $a_0r^3 + a_1r^2 + a_2r + a_3 = 0$, dimana kita tetapkan koefisien $a_0 = 1$ dan koefisien-koefisien yang lain adalah :

$$a_1 = \frac{a_1}{a_0} = -\Sigma x = 2,$$

dan dari hubungan $\Sigma x^2 = (\Sigma x)^2-2(\Sigma xy)$ diperoleh

$a_2 = \Sigma xy = \dfrac{(\sum x)^2 - \sum x^2}{2} = \dfrac{4-6}{2} = -1.$

Selanjutnya, perhatikan bahwa

$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z)(xy + xz + yz) – 3xyz$

Maka $-3xyz = (\Sigma x)^3 – (\Sigma x^3) – 3(\Sigma x)(\Sigma xy)$

Sehingga $a_3 = -xyz = \dfrac{(\sum x)^3 - \sum x^3 - 3(\sum x)(\sum xy)}{3} = \dfrac{(-2)^3 - (-8) - 3\cdot(-2)\cdot(-1)}{3}$

$= -2.$

Persamaan polinomnya adalah $x^3 + 2x^2 – x - 2 = 0$. Dengan menggunakan pembagian horner diperoleh pemfaktoran

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - x - 2 &= (x - 1)(x^2 + 3x + 2) \\ &= (x - 1)(x + 1)(x + 2). \end{aligned}$$

Akar-akar persamaan polinomnya adalah $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_4 = 1$.

Jadi penyelesaian dari sistem persamaan di atas adalah (-2, -1, 1).

## C. SIMPULAN DAN SARAN

### 1. Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dapat dikemukakan simpulan sebagai berikut:

a. Persamaan polinom derajat n berbentuk $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + .... +a_{n-1}x + a_n = 0$, dengan akar-akar $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ mempunyai sifat-sifat akar:

$$\sum x_1 = -\frac{a_1}{a_0},\ \sum x_1x_2 = \frac{a_2}{a_0}, \qquad \sum x_1x_2x_3 = -\frac{a_3}{a_0}, .......$$

$$\sum x_1x_2x_3...x_{n-1} = (-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_0},\ \text{dan}\quad x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4....x_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}.$$

b. Secara khusus, untuk persamaan kubik $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ dengan akar-akar $x_1$, $x_2$ dan $x_3$ mempunyai sifat-sifat:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1\cdot x_2 + x_1\cdot x_3 + x_2\cdot x_3 = \frac{c}{a}, \text{ dan}$$

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Untuk persamaan polinom derajat empat berbentuk $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ dengan akar-akar $x_1$, $x_2$, $x_3$ dan $x_4$ mempunyai sifat-sifat:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -\frac{d}{a}, \text{ dan}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{e}{a}.$$

c. Sifat-sifat akar polinom dapat digunakan untuk menyelesaiakan sistem persamaan non linier simetris..

**2. Saran**

Dengan melihat kesimpulan di atas, disarankan kepada pengajar Matematika baik di sekolah maupun perguruan tinggi hendaknya dalam pembelajaran dapat memberikan wawasan yang lebih luas kepada siswa/mahasiswa, berkaitan dengan pembelajaran polinom. Apabila selama ini hanya dibahas sifat akar persamaan kuadrat, maka perlu ditambahkan wawasan pada persamaan kubik atau pangkat lebih tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

Arjudin. 2003. Penyelesaian Umum Persamaan Kubik dalam Pengajaran Matematika. *Jurnal Ilmu Pendidikan, No.55 Tahun XV, hal.1145-1157.*

Depdiknas. 1999. *Bahan Pembinaan Calon Peserta IMO 1999.* Jakarta: Direktorat Dikmenum.

Keedy, M.L. & Bittinger, M. L. 1986. *Algebra and Trigonometry, a Function Approach, Fourth Edition.* New York: Addyson-Wesley Publishing Company.

Prayitno, S. dkk. 2003. *Materi Pelatihan Pembinaan Guru Matematika SMU se-NTB untuk Olimpiade Matematika.* Mataram: Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Mataram

Purcell, Edwin J. & Vanberg, D. 1995. *Kalkulus dan Geometri Analitis, Jilid 1, Edisi Kelima (Terjemahan)*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Soedyarto, N. & Maryanto. 2008. *Matematika untuk SMA dan MA Kelas XI Program IPA.* Jakarta: Pusat Perbukuan Depdiknas.