 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

A – 4

Beberapa Sifat Modul Tersuplemen lemah (*Weakly Supplemented Module)*

Didi Febrian[1] , Sri Wahyuni[2]
[1]Mahasiswa S2 Jurusan Matematika Fakultas MIPA UGM, Dosen Univ. Dian Nusantara Medan
email : febrian.didi@mail.ugm.ac.id
[2]Dosen PS S2 Matematika Jurusan Matematika Fakultas MIPA UGM,
email : swahyuni@ugm.ac.id

Diberikan *R-Modul* M. Himpunan bagian N di M disebut *submodul* dari M jika terhadap operasi yang sama dengan modul M, N merupakan *R-Modul*. Dapat ditunjukkan bahwa jika N, K submodul dari M, maka $N + K = \{n + k \mid n \in N \text{ dan } k \in K\}$ dan $N \cap K$ juga merupakan submodul dari M.

Submodul K dikatakan *small* di M, dinotasikan $K \ll M$, jika L adalah submodul di M dan $K + L = M$ maka $L = M$. Modul M disebut *hollow* jika setiap submodul sejati di M merupakan submodul *small*. Untuk submodul N, K submodul dari M, dapat didefinikan pengertian *supplement* berikut ini: submodul K disebut *supplement* dari N di M jika K merupakan submodul minimal yang memenuhi $N + K = M$. Hal ini ekivalen dengan mengatakan submodul K *supplement* dari N jika dan hanya jika $N + K = M$ dan $N \cap K \ll K$. Modul M disebut modul tersuplemen *(supplemented module)* jika setiap submodul dari M memiliki *supplement* di M. Submodul K disebut suplemen lemah dari N jika $N + K = M$ dan $N \cap K \ll M$. Modul M disebut modul tersuplemen lemah *(weakly supplemented module)* jika setiap submodul dari M memiliki suplemen lemah (suplemen lemah).

Pada paper ini akan dibahas hubungan modul tersuplemen (*supplemented module*) dan modul tersuplemen lemah (*weakly supplemented module*). Kemudian akan dibahas beberapa sifat yang terkait dengan modul tersuplemen lemah.

Kata Kunci : modul, *small*, *hollow*, *supplement*.

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Diberikan suatu *R-Modul* M. Himpunan bagian U di M disebut submodul dari *R-Modul M*, jika terhadap operasi yang sama dengan *R-Modul M*, U juga *R-Modul*. Pada suatu modul M selalu dapat ditemukan suatu submodul, paling tidak $\{0\}$ dan M. Diberikan U, V submodul di M. Dapat di tunjukkan bahwa $U + V = \{u + v \mid u \in U \text{ dan } v \in V$ dan $U \cap V$ juga submodul di M. Dari fakta tersebut, diperoleh beberapa definisi tentang hubungan antara submodul-submodul pada suatu modul dan akibat yang timbul karena hubungan tersebut pada modul, salah satu hubungan yang diperoleh adalah konsep submodul suplemen.

Penelitian tentang submodul suplemen dan beberapa generalisasinya secara intensif dilakukan pada tahun 1970-an terutama oleh H. Zöschinger. Kemudian pada tahun

1990-an sampai tahun 2000-an penelitian tentang topik ini dilakukan secara meluas. Hasil-hasil penelitian tersebut dipublikasikan pada monograf, (lihat [5] dan [2])

Salah satu klas dari modul tersuplemen adalah modul tersuplemen lemah. Pada Makalah ini akan dibahas beberapa sifat yang ada pada modul tersuplemen lemah. Makalah ini merupakan suatu studi literature dari buku "*Lifting Modules*" John Clark et al. 2006 [2], Thesis "*Totally weak supplemented modules*", Serpil TOP, 2007 [4] dan Thesis "*Cofinitely amply weakly supplemented modules*", Filiz MENEMEN, 2005 [3].

1.2. Tujuan

Tujuan dari kajian ini adalah mempelajari hubungan antar submodul-submodul pada suatu modul dan akibat dari hubungan tersebut pada modulnya, khususnya tentang suplemen lemah dan modul tersuplemen lemah dan bebarapa sifat yang terdapat pada suatu modul tersuplemen lemah.

1.3. Manfaat

Manfaat dari kajian ini adalah menambah literatur dalam teori modul, khususnya yang berkenaan tentang modul tersuplemen lemah

2. MODUL TERSUPLEMEN LEMAH

2.1. Modul dan Submodul

Sebelum dibahas tentang modul tersuplemen lemah, akan diberikan beberapa definisi dan teorema yang berkenaan dengan modul dan submodul.

Definisi 2. 1. 1. Diberikan grup Abelian $(M, +)$ dan ring $(R, +, \cdot)$ dengan elemen satuan. Didefinisikan sebuah operasi $(*)$ antara elemen di R dan elemen di M sedemikian hingga untuk setiap $r \in R$ dan untuk setiap $m \in M$ berlaku $r * m \in M$. Grup Abelian M disebut *R-Modul* terhadap operasi $(*)$, dinotasikan *R-Modul M* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut: untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan untuk setiap $m_1, m_2 \in M$ berlaku

a) $r_1 * (m_1 + m_2) = r_1 * m_1 + r_1 * m_2$

b) $(r_1 + r_2) * m_1 = r_1 * m_1 + r_2 * m_1$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

c) $(r_1 * r_2) * m_1 = r_1 * (r_2 * m_1)$

d) $1 * m_1 = m_1$

Berikut ini diberikan definisi suatu struktur dari suatu modul yang disebut submodul.

Definisi 2. 1. 2. Diberikan $N \subset M$. Himpunan N disebut submodul dari *R-Modul* M, dinotasikan $N \leq M$ jika terhadap operasi yang sama dengan $R - Modul\ M$, N juga *R-Modul*

Berikut ini akan diberikan syarat perlu dan cukup agar suatu himpunan bagian merupakan submodul

Teorema 2. 1. 2. Diketahui *R-Modul M*. Himpunan bagian *N* dari *M* disebut submodul dari *M* jika dan hanya jika memenuhi dua syarat berikut

1. Untuk setiap $n_1, n_2 \in N, n_1 - n_2 \in N$
2. Untuk setiap $r \in R$ dan setiap $n \in N, rn \in N$

Diberikan submodul *N* dari suatu modul *M*. Dapat dibentuk suatu modul baru $M/N = \{m + N |\ m \in M\} = \{\overline{m} |\ m \in M\}$ yang disebut modul faktor dengan definisi

1. Untuk setiap $\overline{m_1}, \overline{m_2} \in M/N, \overline{m_1} + \overline{m_2} = \overline{m_{1+}m_2}$.
2. Untuk setiap $r \in R$ dan setiap $\overline{m} \in M/N, r\overline{m} = \overline{rm}$

Berikut ini diberikan sebuah teorema mengenai modul faktor

Teorema 2. 1. 1 . (Teorema Korespondensi) Diberikan $R - Modul\ M$ dan $H, K, N \leq M$. Jika $N \leq H, N \leq K$ dan berlaku $H/N = K/N$ maka $H = K$.

Jika diberikan dua submodul dari suatu modul, maka dapat dibentuk submodul baru dari kedua submodul tersebut. Teorema berikut ini menjamin hal tersebut

Teorema 2. 1. 2. Diberikan $R - Modul\ M$. Jika $K, N \leq M$, maka kedua sifat berikut berlaku

1) $K \cap N$ merupakan submodul dari M.
2) $K + N$ merupakan submodul dari M.

Diberikan dua modul M dan N dengan ring yang sama (misalkan R). Dibentuk suatu homomorfisma modul $f: M \rightarrow N$ dengan definisi

1. Untuk setiap $m_1, m_2 \in M, f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$.
2. Untuk setiap $r \in R$ dan setiap $m \in M, f(rm) = rf(m)$.
3. *Kernel* f, dinotasikan $Ker(f) = \{m \in M \mid f(m) = 0_N\}$.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

4. *Image* f , dinotasikan $Im(f) = \{f(m) \in N \mid m \in M\}$.

Jika f adalah pemetaan bijektif maka f disebut isomorfisma modul. Jika terdapat sebuah isomorfisma modul dari M ke N, maka modul M isomorfik dengan modul N, dan dinotasikan $M \cong N$. Berikut ini diberikan tiga teorema utama homorfisma modul

Teorema 2. 1. 3. Teorema Utama Homomorfisma Modul 1

Diberikan $R - Modul\ M, N$. Jika $f: M \to N$ homomorfisma modul maka

$$M/Ker(f) \cong Im(f).\ \text{(lihat [1],113)}$$

Jika f epimorfisma (homomorfisma surjektif) maka $M/Ker(f) \cong N$.

Teorema 2. 1. 4. Teorema Utama Homomorfisma Modul 2

Diberikan $R - Modul\ M$ dan $K, N \leq M$, dapat ditunjukkan

$$(N + K)/K \cong N/(N \cap K).\ \text{(lihat [1], 114)}$$

Teorema 2. 1. 5. Teorema Utama Homomorfisma Modul 3

Diberikan $R - Modul\ M$ dan $K, N \leq M$, Jika $K \leq N$ maka dapat ditunjukkan

$$M/N \cong (M/K)/(N/K).\ \text{(lihat [1], 114)}$$

Berikut ini akan diberikan sebuah hukum pada suatu modul.

Lemma 2. 1.1 : (Hukum Modular) Diberikan R −Modul M. Jika $K, L, N \leq M$ dan $K \leq N$ maka berlaku $N \cap (K + L) = K + (N \cap L)$. (lihat [5], 39)

2.2. Submodul *Small* dan modul tersuplemen

Diberikan $R - Modul\ M$. Telah ditunjukkan bahwa penjumlahan dan irisan dari dua submodul di M merupakan submodul di M. Dari fakta ini diperoleh beberapa definisi yang berkenaan dengan hubungan antar submodul.

Definisi 2. 2. 1. Diberikan $K \leq M$ submodul dari M. Submodul K dikatakan $small$ jika ada submodul L dari M sehingga $K + L = M$ maka $L = M$.

Dari Definisi 2. 2. 1. Dapat disimpulkan bahwa submodul K dikatakan $small$ jika ada submodul sejati L dari M, $L \neq M$ sehingga $K + L \neq M$.

Berikut ini diberikan contoh submodul *small*

Contoh 2. 2. 1. Diberikan $\mathbb{Z} - modul\ \mathbb{Z}_6$. Dapat ditunjukkan submodul-submodul sejati dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{0\}, \{0, 2, 4\}, \{0, 3\}$.

1. Submodul $\{0\}$ *small* karena ada $\{0, 2, 4\} \neq \mathbb{Z}_6$ dan $\{0,3\} \neq \mathbb{Z}_6$ sehingga $\{0\} + \{0, 2, 4\} \neq \mathbb{Z}_6$ dan $\{0\} + \{0, 3\} \neq \mathbb{Z}_6$. Jika $\{0\} + L = \mathbb{Z}_6$ maka $L = \mathbb{Z}_6$.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

2. Submodul $\{0, 2, 4\}$ bukan *small* karena ada $\{0,3\} \neq \mathbb{Z}_6$ sehingga $\{0, 2, 4\} + \{0, 3\} = \mathbb{Z}_6$.
3. Submodul $\{0, 3\}$ bukan *small* karena ada $\{0, 2,\ 4\} \neq \mathbb{Z}_6$ sehingga $\{0, 3\} + \{0,\ 2, 4\} = \mathbb{Z}_6$.

Selanjutnya submodul $\{0\}$ disebut *small trivial* dari suatu modul.

Dari Contoh 2. 1. 1, terlihat bahwa tidak semua submodul sejati dari suatu modul bersifat *small*, dengan kenyataan tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2. 2. 2. Diberikan $R - modul\ M$. Modul M disebut $hollow$ jika setiap submodul sejati dari M merupakan *small* dari M.

Contoh 2. 2. 2. Diberikan $\mathbb{Z} - modul\ \mathbb{Z}_4$. Dapat ditunjukkan submodul-submodul sejati dari $\mathbb{Z}_4$ yaitu $\{0\}, \{0, 2\}$ *small* di $\mathbb{Z}_4$. Jadi $\mathbb{Z}_4$ merupakan hollow.

Berikut ini diberikan beberapa sifat dari submodul *small*.

Lemma 2. 2. 1. Diberikan $R - Modul\ M$.

1. Jika $K \leq N \leq M$ dan $K \ll N$ maka $K \ll M$.
2. Diberikan $N \ll M$, maka setiap submodul dari N juga *small* di M.
3. Jika $K \ll M$ dan K didalam direct summand N dari M, maka K ≪ N.
4. $K \ll M$ dan $N \ll M$ jika dan hanya jika $K + N \ll M$.
5. Jika $K \leq N \leq M$ dan $N \ll M$ jika dan hanya jika $K \ll M$, $N/K \ll M/K$.
6. Penjumlahan berhingga submodul *small* di N_i dari M adalah submodul *small* dari M.
7. Diberikan $f: N \rightarrow M$ homomorfisma dari modul M ke N. Diberikan $K \leq N$. Jika $K \ll$ N, maka $f(K) \ll$ N.

Bukti :

1. Ambil sebarang $K + L = M$ untuk suatu $L \leq M$. Karena $N \leq M$ maka $= N \cap M$ $= N \cap (K + L)$. Karena $K \leq N$, dari Hukum Modular diperoleh $N = N \cap (K + L)$ $= K + (N \cap L)$. Karena $K \ll N$ maka $(N \cap L) = N$, akibatnya $N \leq L$ dan $K \leq L$. Perhatikan $M = K + L = L$. Maka $K \ll M$.
2. Ambil sebarang $K \leq N \leq M$ dan $K + L = M$ untuk sebarang $L \leq M$. Karena $K \leq N$ maka $N + L = M$ dan $N \ll M$ maka $L = M$. Akibatnya $K \ll M$.
3. Diberikan $K \leq N \leq M$, $K \ll M$ dan $M = N \oplus L$ untuk suatu $L \leq M$.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Diberikan $K + U = N$ untuk suatu $U \leq N$. Perhatikan $M = N \oplus L$ diperoleh $M = N + L = K + U + L$ dan $N \cap L = \{0\}$. Karena $K \ll M$ maka $U + L = M$ dan $U \cap L \leq N \cap L$ akibatnya $U \cap L = \{0\}$ sehingga $M = U \oplus L$.
Perhatikan $N = N \cap M = N \cap (U \oplus L)$. Dengan Hukum Modular diperoleh $N = U \oplus (N \cap L) = U$. Jadi $K \ll N$.

4. ($\Longrightarrow$) Diberikan $(K + N) + L = M$ untuk suatu $L \leq M$. Karena $K \ll M$ maka $(N + L) = M$. Dan karena $N \ll M$ maka $L = M$. Jadi terbukti $K + N \ll M$.
($\Longleftarrow$) Perhatikan bahwa $K \leq K + N$. Karena $K + N \ll M$, dari sifat 2 maka $K \ll M$ dan $N \leq K + N$. Karena $K + N \ll M$, dari sifat 2 maka $N \ll M$.
5. ($\Longrightarrow$) Diketahui $K \leq N \leq M$. Karena $N \ll M$ dari sifat 2 maka $K \ll M$.
Misalkan terdapat $N/K + L/K = M/K$ dengan $L/K \leq M/K$, dari Teorema Korespondensi diperoleh $N + L = M$. Perhatikan $N \ll M$, akibatnya $L = M$, diperoleh $L/K = M/K$. Jadi, terbukti $N/K \ll M/K$.
($\Longleftarrow$) Diketahui $K \leq N \leq M$. Diberikan $N + L = M$ untuk suatu $L \leq M$ diperoleh $(N + L)/K = N/K + (L + K)/K = M/K$. Diketahui $N/K \ll M/K$ diperoleh $(L + K)/K = M/K$. Akibatnya $L + K = M$. Perhatikan bahwa $\big((N + L) + K\big)/K = M/K$, diperoleh $N + L + K = M$. Karena $L + K = M$, diperoleh $N \ll M$.
6. Diketahui $N_i \leq M$ untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ dan $N_i \ll M$.
Misalkan $N = \sum_{i=1}^{n} N_i$, diperoleh $N \leq M$. Diberikan $N_1 + N_2 + \cdots + N_n + L = M$ untuk suatu $L \leq M$. Diketahui $N_1 \ll M$ diperoleh $N_2 + \cdots + N_n + L = M$, begitu juga $N_2 \ll M$ sehingga $N_3 + \cdots + N_n + L = M$. Begitu seterusnya sehingga diperoleh $L = M$. Jadi $N \ll M$.
7. Diberikan $f(K) + L = f(M)$ untuk beberapa $L \leq f(M)$. Perhatikan bahwa
$$f^{-1}(f(K) + L) = f^{-1}\big(f(M)\big) \leftrightarrow f^{-1}\big(f(K)\big) + f^{-1}(L) = M$$
Diperoleh $M = K + Ker(f) + f^{-1}(L) = K + f^{-1}(L)$. Diketahui $K \ll M$ akibatnya $f^{-1}(L) = M$. Selanjutnya $f\big(f^{-1}(L)\big) = f(M)$ sehingga $L \cap f(M) = f(M)$.
Jadi $L = f(M)$. Terbukti $f(K) \ll M$.■

Berikut ini akan diberikan definisi dari suatu submodul yang bersifat suplemen.

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Definisi 2. 2 2. Diberikan $K,\ L \leq M$ submodul dari M. Submodul K dikatakan suplemen (*supplement*) dari L di M jika K adalah submodul minimal yang memenuhi persamaan $K + L = M$.

Selanjutnya Jika setiap submodul dari M memiliki suplemen di M, maka M disebut modul tersuplemen.

Lemma 2. 2. 2 berikut memberikan syarat perlu dan cukup agar suatu submodul bersifat suplemen

Lemma 2. 2. 2. Submodul K adalah suplemen dari L di M jika dan hanya jika $K + L = M$ dan $K \cap L \ll K$. (lihat [2], 233)

2. 3. Modul tersuplemen lemah

Pada bagian ini akan dibahas tentang modul tersuplemen lemah beserta sifat-sifat yang ada padanya. Berikut akan diberikan definisi dari suplemen lemah dan modul tersuplemen lemah.

Definisi 2. 3. 1: Diberikan $R - Modul\ M$ dan $N, L \leq M$. Submodul N dikatakan suplemen lemah (*weak supplement*)dari L di M jika $N + L = M$ dan $N \cap L \ll M$.

Definisi 2. 3. 2 : Diberikan $R - Modul\ M$ dan $N \leq M$. Submodul N disebut suplemen lemah(*weak supplement*) di M jika ada $L \leq M$ sedemikian sehingga N adalah suplemen lemah dari L di M.

Definisi 2. 3. 3 : Modul M disebut modul tersuplemen lemah (*weakly supplemented module*) jika setiap submodul dari M memiliki suplemen lemah di M.

Berikut akan diberikan contoh sederhana dari suatu modul tersuplemen lemah.

Contoh 2. 3. 1. Diberikan $\mathbb{Z} - modul\ \mathbb{Z}_6$. Dapat ditunjukkan submodul-submodul dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{0\}, \{0, 2, 4\}, \{0, 3\}$ dan $\mathbb{Z}_6$.

1. Untuk submodul $\{0\}$ terdapat $\mathbb{Z}_6$ sehingga $\{0\} + \mathbb{Z}_6$ =$\mathbb{Z}_6$ dan $\{0\} \cap \mathbb{Z}_6 = \{0\} \ll \mathbb{Z}_6$. Dengan demikian $\mathbb{Z}_6$ adalah suplemen lemah dari $\{0\}$ di $\mathbb{Z}_6$.
   Sebalik untuk $\mathbb{Z}_6$ terdapat $\{0\}$ sehingga $\mathbb{Z}_6 + \{0\} = \mathbb{Z}_6$ dan $\mathbb{Z}_6 \cap \{0\} = \{0\} \ll \mathbb{Z}_6$.
2. Untuk submodul $\{0,2, 4\}$ terdapat submodul $\{0,3\}$ sehingga $\{0,2,4\} + \{0,3\} = \mathbb{Z}_6$ dan $\{0,2,4\} \cap \{0,3\} = \{0\} \ll \mathbb{Z}_6$, dan sebaliknya untuk submodul $\{0,3\}$ terdapat $\{0,2,4\}$.

Karena setiap submodul dari $\mathbb{Z}_6$ memiliki suplemen lemah, maka $\mathbb{Z}_6$ merupakan modul tersuplemen lemah.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Dari contoh 2.3.1 telah diperoleh bahwa $\mathbb{Z}_6$ adalah modul tersuplemen lemah dan dengan mudah, dapat juga ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_6$ juga merupakan modul tersuplemen. Teorema berikut menunjukkan hubungan antara modul tersuplemen dan modul tersuplemen lemah

Teorema 2. 3. 1. Diberikan $R-Modul\ M$. Jika M merupakan modul tersuplemen maka M juga merupakan modul tersuplemen lemah.

Bukti : Diberikan modul tersuplemen M. Ambil sebarang $U \leq M$, akibatnya terdapat $V \leq M$ suplemen dari U di M sehingga $U + V = M$ dan $U \cap V \ll V$. Perhatikan $U \cap V \ll V$ akibatnya terdapat $A \leq V$ sehingga $(U \cap V) + A = V$ maka $A = V$. Dibentuk persamaan

$$(U \cap V) + A + U = V + U$$

Diketahui $A = V$ dan $U + V = M$ akibatnya

$$(U \cap V) + A + U = (U \cap V) + V + U = (U \cap V) + M = M$$

Sehingga diperoleh $(U \cap V) \ll M$. Jadi Untuk sebarang $U \leq M$ terdapat $V \leq M$ sehingga $U + V = M$ dan $(U \cap V) \ll M$ maka M merupakan modul tersuplemen lemah. ■

Berikut ini diberikan beberapa sifat terkait modul tersuplemen lemah. Hubungan antara modul tersuplemen lemah dan modul faktornya dapat diperhatikan pada sifat berikut

Sifat 2. 3. 1 : Diberikan $R-Modul\ M$. Jika M modul tersuplemen lemah maka setiap modul faktor dari M juga modul tersuplemen lemah.

Bukti : Ambil sebarang $K \leq N \leq M$, maka dapat dibentuk modul faktor M/K dan tentu saja $N/K \leq M/K$. Karena M modul tersuplemen lemah maka terdapat $L \leq M$ sehingga $N + L = M$ dan $N \cap L \ll M$. Perhatikan bahwa

$$M/K = (N + L)/K = N/K + (L + K)/K$$

Akan ditunjukkan $N/K \cap (L + K)/K \ll M/K$.

Karena $(N \cap L) \ll M$, dari Lemma 2. 1. 1 (7) maka $(N \cap L)/K \ll M/K$. Akibatnya

$$(N \cap L)/K = \big((N \cap L) + K\big)/K = \big(N \cap (L + K)\big)/K = N/K \cap (L + K)/K \ll M/K$$

Karena untuk sebarang $N/K \leq M/K$ terdapat $(L + K)/K \leq M/K$ sehingga $N/K + (L + K)/K = M/K$ dan $N/K \cap (L + K)/K \ll M/K$, maka M/K tersuplemen lemah. ■

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Sifat 2. 3. 2 berikut menunjukkan bahwa jika suatu modul adalah *small* cover dari modul tersuplemen lemah, maka modul tersebut juga modul tersuplemen lemah.

Sifat 2. 3. 2 : Diberikan R-Modul tersuplemen lemah M. Jika N *small* cover dari M maka N modul tersuplemen lemah.

Bukti : Dibentuk epimorfisma $f: N \to M$. Dari Teorema Utama Homomorfisma Modul 1 diperoleh $M \cong N/Ker(f)$. Misalkan $Ker(f) = K$. Diketahui N *small* cover dari M sehingga $K \ll N$. Ambil sebarang $L \leq N$ akibatnya $L/K = (L+K)/K \leq N/K$. Karena M tersuplemen lemah maka $(L+K)/K$ memiliki suplemen lemah $X/K \leq N/K$ sehingga

$$(L+K)/K + X/K = N/K \text{ dan } (L+K)/K \cap X/K = \big((L+K) \cap X\big)/K \ll N/K$$

Dari Lemma 2. 1. 1 (5) $\big((L+K) \cap X\big) \ll N$. Perhatikan $L \cap X \leq (L \cap X) + K$. Dari hukum modular diperoleh $(L \cap X) + K = X \cap (K + L) = X \cap L \ll N$.

Perhatikan bahwa

$$(L+K)/K + X/K = (L+K+X)/K = (L+X)/K = N/K$$

Diperoleh $L + X = N$. Karena $L + X = N$ dan $X \cap L \ll N$ maka X adalah suplemen lemah dari L di N. Jadi N adalah modul tersuplemen lemah.■

Berikut ini ditunjukkan sifat suplemen dan direct summand dari suatu modul tersuplemen lemah.

Sifat 2. 3. 3. Diberikan R-Modul tersuplemen lemah M. Setiap suplemen di M dan setiap direct summand dari M adalah tersuplemen lemah.

Bukti : Ambil sebarang $N \leq M$ suplemen dari M sedemikian sehingga $N + K = M$ dan $N \cap K \ll N$ untuk $K \leq M$. Diketahui M tersuplemen lemah, dari Sifat 2. 3. 1. $M/K = (N+K)/K$ tersuplemen lemah. Dari Teorema Utama Homomorfisma Modul 2

$$M/K = (N+K)/K \cong N/(N \cap K)$$

Perhatikan homomorfisma $f: N \to (N+K)/K$. Diperoleh $Ker(f) = (N \cap K) \ll N$, akibatnya N *small* cover dari M/K. Dari Sifat 2. 3. 2 diperoleh N adalah tersuplemen lemah. Dari definisi direct summand, diketahui bahwa setiap direct summand adalah suplemen di M. Jadi, setiap direct summand adalah tersuplemen lemah.■

Sifat 2. 3. 4. Diberikan $R - Modul\, M$. Diberikan $K, L \leq M$ sehingga L adalah tersuplemen lemah dan $L + K$ memiliki suplemen lemah di M, maka K memiliki suplemen lemah di M.

Bukti : Misalkan $N \leq M$ suplemen lemah dari $L + K$ sehingga $L + K + N = M$ dan $(L + K) \cap N \ll M$. Perhatikan $(K + N) \cap L \leq L$. Karena L tersuplemen lemah, ada $X \leq L$ sehingga $L = \big((K + N) \cap L\big) + X$ dan $\big((K + N) \cap L\big) \cap X \ll L$. Diperoleh

$$M = L + K + N = X + \big((K + N) \cap L\big) + K + N = X + K + N = K + (X + N)$$

$$K \cap (X + N) \leq \big((K + X) \cap N\big) + \big((K + N) \cap X\big) \leq \big((K + L) \cap N\big) + \big((K + N) \cap X\big) \ll M$$

Jadi $(N + X)$ adalah suplemen lemah dari K di M.■

Diberikan dua modul tersuplemen lemah. Sifat berikut akan menunjukkan sifat dari penjumlahan dua modul tersuplemen lemah tersebut.

Sifat 2. 3 . 5. Diberikan $M = M_1 + M_2$ dengan M_1 dan M_2 masing-masing adalah modul tersuplemen lemah, maka M juga modul tersuplemen lemah.

Bukti : Ambil sebarang $N \leq M$. Maka $M = M_1 + M_2 + \mathrm{N}$.

Perhatikan $M = M_1 + M_2 + \mathrm{N} + \{0\}$ dan $(M_1 + M_2 + \mathrm{N}) \cap \{0\} \ll M$, akibatnya $\{0\}$ adalah suplemen lemah dari $M_1 + M_2 + \mathrm{N}$ di M. Karena M_1 tersuplemen lemah, dari Sifat 2. 3 . 4 maka $M_2 + N$ juga memiliki suplemen lemah di M. Kemudian karena M_2 juga tersuplemen lemah, dari Sifat 2. 3. 4 maka N juga memiliki suplemen lemah di M. Jadi terbukti untuk sebarang $N \leq M$ memiliki suplemen lemah di M maka M modul tersuplemen lemah.■

3. Saran

Kajian tentang modul tersuplemen lemah pada makalah ini masih pada pembahasan sifat – sifat sederhana dari modul tersuplemen lemah, maka kajian lebih lanjut perlu dilakukan untuk melihat sifat – sifatnya lebih luas, kemudian dilanjutkan kajian tentang modul *cofinitely amply weakly supplemented* dan modul *tottaly weak supplemented*

4. Daftar Pustaka

[1.] Adkins, William A., Weintraub, Steven H., 1992. *Algebra An Approach via Module Theory* , (Springer-Verlag).

[2.] Clark, J., Lomp C.,Vanaja, N. and Wisbauer, R., 2006. *Lifting Modules*, (Birkhäuser Verlag, Basel).

[3.] Menemen, F., 2005. $Confinitely\ Amply\ Weakly\ Supplemented\ Modules$ (M.Sc. thesis, İzmir Institute of Technology, The Graduate School of Engineering and Sciences).

[4.] Top, S., 2007. $Totally\ Weak\ Supplemented\ Modules$ (M.Sc. thesis, İzmir Institute of Technology, The Graduate School of Engineering and Sciences).

[5.] Wisbauer, R. 1991. $Foundations\ of\ Module\ and\ Ring\ Theory,$ (Gordon and Breach)