 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

A – 2

Kajian Fungsi Metrik Preserving

Binti Mualifatul Rosydah
Politeknik Perkapalan Negeri Surabaya
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
Jalan Teknik Kimia Kampus ITS Sukolilo Surabaya 60111

Abstrak

Dalam penelitian ini akan dikaji sifat-sifat yang dimiliki oleh fungsi f yang didefinisikan dengan domain dan kodomain bilangan real tidak negatif, agar jika dikomposisikan dengan fungsi d yang merupakan suatu metrik, menghasilkan fungsi baru dengan domain dan kodomain sama dengan metrik d serta merupakan suatu metrik. Fungsi f seperti ini disebut fungsi metrik *preserving* terhadap metrik d.
Kata kunci **:** *metrik, fungsi metrik preserving.*

PENDAHULUAN

Komposisi dua buah fungsi akan didefinisikan jika domain fungsi pertama sama dengan kodomain fungsi yang kedua. Pada penelitian ini diberikan dua buah fungsi dengan fungsi yang pertama adalah fungsi f yang merupakan pemetaan dengan domain dan kodomain bilangan real yang tidak negatif dan fungsi yang kedua adalah suatu metrik d yang merupakan pemetaan dari $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ ke $\mathbf{R}$ yang mempunyai sifat tidak negatif, definit, simetri, serta memenuhi pertidaksamaan segitiga. Apabila fungsi f dikomposisikan dengan fungsi d, maka akan menghasilkan fungsi baru dengan domain dan kodomain sama dengan fungsi d. Akan tetapi secara umum, meskipun hasil komposisi fungsi f dengan fungsi d menghasilkan fungsi baru dengan domain dan kodomain sama dengan fungsi d, belum tentu juga merupakan suatu metrik. Dalam penelitian ini, komposisi fungsi f dengan fungsi d menghasilkan fungsi baru yang juga merupakan suatu metrik. Fungsi f seperti ini disebut *fungsi metrik preserving*. Suatu fungsi yang disebut *fungsi metrik preserving* memiliki sifat-sifat tertentu. Oleh karena itu dalam penelitian ini akan dikaji sifat-sifat yang dimiliki oleh suatu fungsi yang disebut *fungsi metrik preserving*.

PEMBAHASAN

Fungsi (R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal. 9)

Fungsi $f : A \to B$ adalah aturan yang memadankan setiap $x \in A$ secara tepat satu elemen yang disebut $f(x) \in B$, dimana A dan B adalah himpunan bilangan real.

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Fungsi Metrik Preserving

Misalkan f adalah suatu fungsi bernilai real yang didefinisikan dengan domain dan kodomain yang terletak pada interval $[0, \infty)$. Fungsi f disebut fungsi metrik *preserving* terhadap suatu metrik d dalam ruang metrik ($\mathbf{X}$, d), jika komposisi fungsi fungsi f dengan fungsi d menghasilkan fungsi baru yang juga merupakan suatu metrik.

Fungsi Amenable (Paul Corazza, hal. 2)

Jika suatu fungsi bernilai real f didefinisikan pada himpunan $S \subseteq \mathbf{R}$ adalah *fungsi metrik preserving*, maka himpunan S harus terletak pada interval $[0, \infty)$, range fungsi f juga harus terletak pada interval $[0, \infty)$, dan $f^{-1}(0) = \{0\}$. Fungsi seperti ini disebut *fungsi amenable.*

Fungsi Subadditif (Paul Corazza,hal. 2)

Misalkan f adalah suatu fungsi bernilai real pada interval $[0, \infty)$. Fungsi f disebut *fungsi subadditif,* jika diambil $a, b \in [0, \infty)$, maka fungsi f memenuhi pertidaksamaan $f(a) + f(b) \geq f(a + b)$.

Fungsi Nondecreasing (R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal. 172)

Misalkan f adalah suatu fungsi bernilai real pada interval $[0, \infty)$. Fungsi f disebut *fungsi nondecreasing* pada interval $[0, \infty)$, jika untuk sebarang titik x_1 dan x_2 pada interval $[0, \infty)$, dimana $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Fungsi Differensiable (R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal. 184)

Misalkan $I \subseteq \mathbf{R}$ adalah suatu interval, $f : I \to \mathbf{R}$ dan $c \in I$. Bilangan real L disebut turunan fungsi f pada c, jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$, sehingga jika $x \in I$ dan $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$ maka

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon \tag{1}$$

Dalam hal ini dikatakan bahwa fungsi f *differensiabel* pada c, dan dapat ditulis $f'(c)$ untuk L.

Dengan kata lain, turunan fungsi f pada c diberikan dengan limit sebagai berikut

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad (2)$$

asalkan limitnya ada.

Fungsi Konvex (R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal. 221)

Misalkan $I \subseteq \mathbf{R}$ adalah suatu interval. Suatu fungsi $f : I \to \mathbf{R}$ dikatakan *konvex* pada interval I jika untuk sebarang λ yang memenuhi $0 \leq \lambda \leq 1$ dan sebarang titik $x_1, x_2 \in I$, maka $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ (3)

Fungsi f disebut *strictly convex*, jika tanda $\leq$ diganti dengan $<$, sehingga didapatkan

$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ (4)

Komposisi fungsi (R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal. 14)

Misal didefinisikan dua buah fungsi bernilai real, yaitu fungsi f dan fungsi g. Dua buah fungsi tersebut merupakan pemetaan dengan sifat bahwa domain fungsi f sama dengan kodomain fungsi g. Komposisi fungsi $f \circ g$ dapat didefinisikan dari sifat diatas, sehingga menghasilkan fungsi baru dengan domain sama dengan domain fungsi g dan kodomain sama dengan kodomain fungsi f.

Metrik (R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal. 365)

Himpunan tidak kosong **X**, suatu fungsi d yang merupakan pemetaan dari $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ ke himpunan bilangan **R** dinamakan suatu metrik jika memenuhi sifat-sifat di bawah ini:

1. $\forall x, y \in \mathbf{X}$, berlaku $d(x, y) \geq 0$
2. $\forall x, y \in \mathbf{X}$, berlaku $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $\forall x, y \in \mathbf{X}$, berlaku $d(x, y) = d(y, x)$
4. $\forall x, y, z \in \mathbf{X}$, berlaku $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ruang **X** yang dilengkapi dengan suatu metrik d disebut ruang metrik dan ditulis $(\mathbf{X}, d)$.

Triangle Triplet (Paul Corazza, hal. 5)

Triangle triplet adalah tripel bilangan real *non negatif* (a, b, c) dimana $a \leq b + c$, $b \leq a + c$, dan $c \leq a + b$; ekivalen atau sama dengan $|a - b| \leq c \leq a + b$.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Dengan kata lain *triangle triplet* adalah tripel bilangan real *non negatif* yang berbentuk $(d(x, y), d(y, z), d(x, z))$ untuk sebarang ruang metrik $(\mathbf{X}, d)$ dan untuk sebarang $x, y, z \in \mathbf{X}$.

SIFAT FUNGSI METRIK PRESERVING

Sifat-sifat yang dimiliki oleh fungsi *f* yang disebut *fungsi metrik preserving* diturunkan dalam proposisi berikut ini:

Proposisi 1 *Jika f fungsi metrik preserving maka f subadditif.*

Bukti :

Ambil sebarang $a, b \in [0, \infty)$ dan d metrik usual di $\mathbf{R}$.

Akan ditunjukkan bahwa fungsi *f subadditif*.

$$\begin{aligned} f(a)+f(b) &= (f\circ d)(0,a)+(f\circ d)(a,a+b) \\ &\geq (f\circ d)(0,a+b) \\ &= f(a+b) \end{aligned}$$

$$f(a)+f(b)\geq f(a+b) \tag{5}$$

Jadi terbukti bahwa jika fungsi *f* adalah metrik *preserving* maka fungsi *f subadditif*. ■

Akibat 1 *Diberikan suatu fungsi f yang merupakan pemetaan dengan domain dan kodomain bilangan real tidak negatif.*

(*A*) *f strictly convex pada suatu interval dalam daerah asal dan* $f(0)=0$, *atau*

(*B*) *f differensiabel pada* (u, ∞) *untuk semua* $u \geq 0$ *dan* $\lim_{x\to\infty} f'(x) = +\infty$, *dimana x berada pada domain fungsi d.*

Maka f bukan metrik preserving.

Bukti :

(A) Ambil sebarang c bilangan positif dimana fungsi *f strictly convex* pada interval $[0, c]$.

Fungsi *f strictly convex* pada interval $[0, c]$ artinya untuk sebarang λ yang memenuhi $0 \leq \lambda \leq 1$ dan sebarang titik $x_1, x_2 \in [0, c]$ memenuhi

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \tag{6}$$

Ambil $\lambda = \frac{1}{2}$, $x_1 = 0$, dan $x_2 = c$ kemudian disubstitusikan ke dalam Pertidaksamaan (6) didapatkan

$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$

$$f\left(\frac{c}{2}\right) < \frac{1}{2}[0 + f(c)]$$

$$f\left(\frac{c}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(c)]$$

$$2f\left(\frac{c}{2}\right) < f(c)$$

$$f\left(\frac{c}{2}\right) + f\left(\frac{c}{2}\right) < f(c) \tag{7}$$

menurut definisi, fungsi f tidak *subadditif*.

Karena fungsi f tidak *subadditif,* maka menurut Proposisi 1 fungsi f bukan merupakan fungsi metrik *preserving.*

Jadi terbukti bahwa jika fungsi f *strictly convex* pada suatu interval dalam daerah asal dan $f(0) = 0$,maka fungsi f bukan merupakan fungsi metrik *preserving*. ■

Contoh :

Misalkan suatu fungsi bernilai real f diberikan oleh $f(x) = x^4$ dengan domain yang terletak pada interval $[0, \infty)$.

Jika diambil $x = 0$, maka didapatkan $f(0) = 0$.

Akan ditunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^4$ merupakan fungsi *strictly convex* pada interval $[0, 4]$, kemudian ditunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^4$ bukan merupakan fungsi metrik *preserving*.

Penyelesaian :

Fungsi f dikatakan *strictly convex* pada interval $[0, 4]$ jika untuk sebarang λ yang memenuhi $0 \leq \lambda \leq 1$ dan sebarang titik $x_1, x_2 \in [0, 4]$ fungsi f memenuhi Pertidaksamaan (6).

Misalkan diambil $\lambda = \frac{1}{2}$, $x_1 = 0$, dan $x_2 = 4$ kemudian disubstitusikan ke dalam Pertidaksamaan (6)sehingga didapatkan

$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$

$$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)(0) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(4)\right) < \frac{1}{2}f(0) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)f(4)$$

diketahui $f(0) = 0$, sehingga didapatkan

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

$f(2) < \frac{1}{2}[f(4)]$

$2f(2) < f(4)$ karena $2f(2) = f(2) + f(2)$, sehingga didapatkan

$f(2) + f(2) < f(4)$

$(2)^4 + (2)^4 < (4)^4$

$16 + 16 < 256$

Menurut definisi fungsi *subadditif*, fungsi *f* tidak *subadditif*

Karena fungsi *f* memenuhi Pertidaksamaan (6) untuk sebarang λ yang memenuhi $0 \leq \lambda \leq 1$ dan sebarang titik x_1, $x_2 \in [0, 4]$, jadi menurut definisi fungsi *f* merupakan fungsi *strictly convex* pada interval [0, 4].

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^4$ yang *strictly convex* pada interval [0, 4] dan $f(0) = 0$ bukan merupakan fungsi metrik *preserving*.

Dari Proposisi 1 telah dibuktikan bahwa jika fungsi *f* adalah metrik *preserving* maka fungsi *f subadditif*. Karena *f* tidak *subadditif,* maka *f* bukan merupakan fungsi metrik *preserving.*

Jadi terbukti bahwa fungsi $f(x) = x^4$ yang *strictly convex* pada interval [0, 4] dan $f(0) = 0$ bukan merupakan fungsi metrik *preserving*. □

(B) Andaikan bahwa fungsi *f differensiable* pada interval (u,∞) dan $\lim_{x\to\infty} f'(x) = +\infty$, tetapi fungsi *f* merupakan fungsi metrik *preserving*.

Ambil sebarang $x_0 > u$. Karena $f'(x)$ menuju $+\infty$, maka terdapat $r > 0$, dimana *r* adalah fungsi yang bergantung pada x_0 sehingga untuk semua $x > r$,

$$f'(x) > \frac{f(x_0)}{x_0} \tag{8}$$

Ambil $x_1 > r$. Dengan menggunakan Teorema Nilai Tengah (*Mean Value Theorem)* untuk mendapatkan $y \in (x_1, x_1 + x_0)$, maka didapatkan

$$f'(y) = \frac{f(x_1 + x_0) - f(x_1)}{x_1 + x_0 - x_1}$$

$$= \frac{f(x_1 + x_0) - f(x_1)}{x_0}.$$

Dengan mensubstitusikan $f'(y)$ ke dalam Persamaan (8), didapatkan

$$\frac{f(x_1 + x_0) - f(x_1)}{x_0} > \frac{f(x_0)}{x_0}$$

$$\frac{f(x_1+x_0)}{x_0}-\frac{f(x_1)}{x_0}>\frac{f(x_0)}{x_0}$$

$$\frac{f(x_1+x_0)}{x_0}>\frac{f(x_1)}{x_0}+\frac{f(x_0)}{x_0} \quad (9)$$

Karena x_0 bernilai positif, maka didapatkan pertidaksamaan

$$f(x_1+x_0)>f(x_1)+f(x_0) \quad (10)$$

Menurut definisi, fungsi f tidak *subadditif* .

Karena fungsi f tidak *subadditif,* maka menurut Proposisi 1 fungsi f bukan merupakan fungsi metrik *preserving*. Hal ini kontradiksi dengan asumsi awal.

Jadi terbukti bahwa jika fungsi f *differensiable* pada interval (u, ∞) untuk semua $u \geq 0$ dan $\lim_{x\to\infty} f'(x)=+\infty$ maka fungsi f bukan merupakan fungsi metrik *preserving*. ■

Contoh :

Misalkan suatu fungsi bernilai real f diberikan oleh $f(x) = x^2$ dengan domain yang terletak pada interval $[0, \infty)$.

Akan ditunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^2$ merupakan fungsi *differensiable* pada interval $[0, \infty)$ dan $\lim_{x\to\infty} f'(x)=+\infty$, kemudian ditunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^2$ bukan merupakan fungsi metrik *preserving*.

Penyelesaian :

Fungsi $f(x) = x^2$ adalah fungsi *differensiable* dengan $f'(x)=2x$ untuk semua $x \in [0, \infty)$**.**

Nilai $\lim_{x\to\infty} f'(x)=+\infty$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^2$ bukan merupakan fungsi metrik *preserving*.

Misalkan diambil $x, y \in [0, \infty)$.

Akan ditunjukkan bahwa $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Dengan definisi $f(x)$, didapatkan

$$f(x+y) = (x+y)^2$$
$$= x^2 + y^2 + 2xy.$$

$$f(x) + f(y) = x^2 + y^2 \quad (11)$$

Karena $x, y \in [0, \infty)$, maka $xy \geq 0$. Dengan mensubstitusikan $xy \geq 0$ ke dalam Persamaan (11), didapatkan

$f(x + y) \geq f(x) + f(y)$ (12)

Menurut definisi, fungsi f tidak *subadditif*

Dari Proposisi 1 telah dibuktikan bahwa jika fungsi f adalah metrik *preserving* maka fungsi f *subadditif*. Karena f tidak *subadditif,* maka f bukan merupakan fungsi metrik *preserving*.

Jadi terbukti bahwa fungsi $f(x) = x^2$ yang *differensiable* pada interval (u, ∞) untuk semua $u \geq 0$ dan $\lim_{x\to\infty} f'(x) = +\infty$ bukan merupakan fungsi metrik *preserving*. □

Proposisi 2 *Jika* f *adalah fungsi amenable, subadditif, dan nondecreasing, maka* f *adalah metrik preserving.*

Bukti :

Komposisi fungsi $f \circ d$ disebut metrik jika memenuhi :

(M1) $\forall x, y \in \mathbf{R}$ berlaku $(f \circ d)(x, y) \geq 0$.

(M2) $\forall x, y \in \mathbf{R}$ berlaku $(f \circ d)(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M3) $\forall x, y \in \mathbf{R}$ berlaku $(f \circ d)(x, y) = (f \circ d)(y, x)$.

(M4) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ dan $d(x, y) = a$, $d(y, z) = b$ dan $d(x, z) = c$ berlaku

$(f \circ d)(x, z) \leq (f \circ d)(x, y) + (f \circ d)(y, z)$ atau $f(c) \leq f(a) + f(b)$

Karena d merupakan metrik, berarti d memenuhi pertidaksamaan segitiga

Selanjutnya dengan mensubstitusikan $d(x, y) = a$, $d(y, z) = b$ dan $d(x, z) = c$ ke dalam pertidaksamaan segitiga didapatkan $c \leq a + b$.

Dengan menggunakan definisi fungsi *subadditif* dan *nondecreasing,* didapatkan

$f(c) \leq f(a) + f(b)$ (13)

Pertidaksamaan (13) ini juga berarti

$(f \circ d)(x, z) \leq (f \circ d)(x, y) + (f \circ d)(y, z)$.

Jadi terbukti bahwa

$(f \circ d)(x, z) \leq (f \circ d)(x, y) + (f \circ d)(y, z)$ atau $f(c) \leq f(a) + f(b)$ berlaku untuk setiap $x, y, z \in \mathbf{R}$ dan $d(x, y) = a$, $d(y, z) = b$ dan $d(x, z) = c$.

Karena komposisi fungsi $f \circ d$ memenuhi (M1), (M2), (M3) dan (M4) berarti komposisi fungsi $f \circ d$ merupakan metrik.

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Jadi terbukti bahwa jika fungsi f *amenable, subadditif,* dan *nondecreasing*, maka f adalah metrik *preserving*. ■

Contoh:

1. Fungsi $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{untuk } x = 0 \\ 1, & \text{untuk } x \text{ yang lain.} \end{cases}$
2. Fungsi $f(x) = \ln(1 + x)$.
3. Fungsi $f(x) = x^r$ dimana $0 \leq r \leq 1$.

Proposisi 3 *Jika* $(\mathbf{X}, d)$ *adalah ruang metrik dan* $x, y, z \in \mathbf{X}$, *maka* $(d(x, y), d(y, z), d(x, z))$ *adalah triangle triplet.*

Bukti :

Misal $d(x, y) = a$, $d(y, z) = b$ dan $d(x, z) = c$.

Karena d merupakan suatu metrik, berarti d memenuhi pertidaksamaan segitiga.

Dengan mensubstitusikan $d(x, y) = a$, $d(y, z) = b$ dan $d(x, z) = c$ kedalam pertidaksamaan segitiga, didapatkan tiga bentuk yang berbeda yaitu :

1. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

$$a \leq c + b \tag{14}$$

2. $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$

$$b \leq a + c \tag{15}$$

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$$c \leq a + b \tag{16}$$

Menurut definisi, Pertidaksamaan (14), (15) dan (16) disebut *triangle triplet*.

Jadi terbukti bahwa jika $(\mathbf{X}, d)$ adalah ruang metrik dan $x, y, z \in \mathbf{X}$, maka $(d(x, y), d(y, z), d(x, z))$ adalah *triangle triplet*. ■

Proposisi 4 *Misalkan f adalah fungsi amenable, maka ekivalen dengan :*

(1) Fungsi f adalah metrik preserving

(2) Untuk setiap (a, b, c) triangle triplet, $(f(a), f(b), f(c))$ adalah triangle triplet

Bukti:

(1) $\Rightarrow$ (2) Diberikan (a, b, c) adalah *triangle triplet*, dan misalkan d metrik usual di $\mathbf{R}^2$**.** Dengan menggunakan geometri dasar menunjukkan bahwa terdapat $u, v, w \in \mathbf{R}^2$ sehingga $d(u, v) = a$, $d(v, w) = b$ dan $d(u, w) = c$.

Dengan mensubstitusikan $d(u, v) = a$, $d(v, w) = b$ dan $d(u, w) = c$ kedalam pertidaksamaan segitiga, didapatkan tiga bentuk yang berbeda yaitu :

1. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

$$a \leq c + b \tag{17}$$

2. $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$

$$b \leq a + c \tag{18}$$

3. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

$$c \leq a + b \tag{19}$$

Dengan menggunakan kenyataan fungsi f adalah fungsi metrik *preserving*, menurut Proposisi 2 berarti fungsi f mempunyai sifat *amenable, subadditif* dan *nondecreasing*. Dalam hal ini telah diketahui fungsi f adalah fungsi *amenable*. Untuk sifat *subadditif* dan *nondecreasing* akan ditunjukkan dengan menggunakan definisi yang disubstitusikan dalam Pertidaksamaan (17), (18) dan (19), sehingga didapatkan :

4 .$f(a) \leq f(c) + f(b)$ (20)

5. $f(b) \leq f(a) + f(c)$ (21)

6 $f(c) \leq f(a) + f(b)$ (22)

Menurut definisi, Pertidaksamaan (20), (21) dan (22) disebut *triangle triplet*.

Jadi terbukti bahwa jika fungsi f adalah fungsi metrik *preserving* maka untuk setiap (a, b, c) *triangle triplet,*$(f(a), f(b), f(c))$ adalah *triangle triplet*. ■

(2) $\Rightarrow$ (1) Diberikan $(\mathbf{X}, d)$ suatu ruang metrik, dengan d adalah metrik usual di **R.**

Akan dibuktikan komposisi fungsi $f \circ d$ merupakan suatu metrik.

Komposisi fungsi $f \circ d$ disebut metrik jika memenuhi :

(M1) $\forall x, y \in \mathbf{R}$ berlaku $(f \circ d)(x, y) \geq 0$.

(M2) $\forall x, y \in \mathbf{R}$ berlaku $(f \circ d)(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M3)$\forall x, y \in \mathbf{R}$ berlaku $(f \circ d)(x, y) = (f \circ d)(y, x)$.

(M4) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$ dan $d(x, y) = a$, $d(y, z) = b$ dan $d(x, z) = c$ berlaku $(f \circ d)(x, z) \leq (f \circ d)(x, y) + (f \circ d)(y, z)$ atau $f(c) \leq f(a) + f(b)$.

Dengan menggunakan kenyataan pada Proposisi 3 bahwa $(d(x, y), d(y, z), d(x, z))$ adalah *triangle triplet* untuk $x, y, z \in \mathbf{R}$**,** berarti (a, b, c) adalah *triangle triplet*.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 6 – 3

Pada (1) $\Rightarrow$ (2) telah dibuktikan bahwa untuk setiap (a, b, c) *triangle triplet,* ($f(a), f(b), f(c)$) adalah *triangle triplet*, artinya :

1. $f(a) \leq f(c) + f(b)$.
2. $f(b) \leq f(a) + f(c)$.
3. $f(c) \leq f(a) + f(b)$.

Jadi terbukti bahwa

$(f \circ d)(x, z) \leq (f \circ d)(x, y) + (f \circ d)(y, z)$ atau $f(c) \leq f(a) + f(b)$ berlaku untuk setiap $x, y, z \in \mathbf{R}$ dan $d(x, y) = a$, $d(y, z) = b$ dan $d(x, z) = c$.

Karena komposisi fungsi $f \circ d$ memenuhi (M1), (M2), (M3) dan (M4) maka komposisi fungsi $f \circ d$ merupakan suatu metrik.

Jadi terbukti bahwa jika untuk setiap (a, b, c) *triangle triplet,* ($f(a), f(b), f(c)$) adalah *triangle triplet* maka fungsi f adalah fungsi metrik *preserving*.

KESIMPULAN

1. Jika suatu fungsi yang diketahui merupakan fungsi metrik *preserving* maka fungsi tersebut mempunyai sifat *subadditif.*
2. Fungsi $f : [0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ disebut fungsi metrik *preserving* terhadap metrik d, jika fungsi f mempunyai sifat *amenable, subadditif* dan *nondecreasing.*
3. Fungsi f dikatakan bukan fungsi metrik *preserving* jika salah satu dari ketiga sifat (*amenable, subadditif* dan *nondecreasing*) tidak dimilikinya.
4. Sifat *triangle triplet* sama dengan sifat pertidaksamaan segitiga dalam suatu metrik. Selain itu, sifat *triangle triplet* juga merupakan perpaduan antara sifat *subadditif* dan *nondecreasing* dalam suatu fungsi metrik *preserving.*

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R.G., dan D.R., Sherbert, (1982), *Introduction to Real Analysis*, Second Edition, John Wiley and Sons, New York.

Corazza, P., (1999), Introduction to metric-preserving function, *Amer.Math. Monthly*, **4, vol. 104**, 309-323 http//homepages.kdsi.net/~pcorazza/mathPublications.html.)