Syarat Perlu Dan Cukup Subaljabar Merupakan Ideal di Dalam Aljabar BCI

Yeni Susanti[1], Sri Wahyuni [2]
[1, 2] **Jurusan Matematika FMIPA UGM**

Abstrak :

Di dalam tulisan ini dibahas syarat perlu dan syarat cukup agar subaljabar merupakan ideal di dalam aljabar BCI.

Dari suatu aljabar BCI X, dikonstruksikan $P(X)$ dan $SP(X)$ dan direct product dari $P(X)$ dan $SP(X)$. Lebih lanjut ditunjukkan bahwa jika X dapat dinyatakan sebagai direct product dari $P(X)$ dan $SP(X)$ serta setiap elemen tak nol dari X merupakan atom maka setiap subaljabar dari X merupakan ideal dan sebaliknya.

Kata kunci : Aljabar BCI X.

Definisi 1

Suatu aljabar (X, *, 0) *tipe* (2, 0) *disebut* ***aljabar BCI*** *jika memenuhi aksioma aksioma :*

1. $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$
2. $(x * (x * y)) * y = 0$
3. $x * x = 0$
4. $(x * y = 0 \ \& \ y * x = 0) \Rightarrow x = y$

untuk setiap $x, y, z \in X$.

Selanjutnya, untuk memudahkan penulisan, seluruh aljabar BCI (X, $*$, 0) dalam tulisan ini cukup disingkat dengan aljabar BCI X. Aljabar BCI X disebut aljabar BCK jika untuk setiap $x \in X$ berlaku $0 * x = 0$. Sebarang $Y \subseteq X$ disebut subaljabar jika $0 \in Y$ dan Y tertutup terhadap operasi $*$.

Sifat 2 [6]

Pada aljabar BCI X *berlaku :*

1. $(x * y) * z = (x * z) * y$
2. $x * 0 = x$

3. $0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$

4. $0 * (0 * (0 * x)) = 0 * x$

untuk setiap $x, y, z \in X$.

Pada aljabar BCI X dapat didefinisikan relasi $\leq$ dengan definisi sebagai berikut :

$$(\forall\ x, y \in X) (x \leq y \Leftrightarrow x * y = 0).$$

Sifat 3 [6]

Di dalam aljabar BCI X berlaku :

$$(\forall\ x, y, z \in X) (x \leq y \Rightarrow (x * z \leq y * z \ \&\ z * y \leq z * x)).$$

Definisi 4

Diberikan aljabar BCI $(X, *, 0)$.

a. *Himpunan tak kosong* $I \subseteq X$ *disebut* ***ideal*** *jika*

1. $0 \in I$
2. $(\forall\ x, y \in X) ((x * y \in I \ \&\ y \in I) \Rightarrow x \in I)$.

dan disebut ***ideal tertutup*** *jika untuk setiap* $x \in I$ *berlaku* $0 * x \in I$.

b. Elemen tak nol $a \in X$ disebut **atom** jika :

$$(\forall\ x \in X - \{0\}) (x \leq a \Rightarrow x = a).$$

dan disebut atom kuat jika

$$(\forall\ x \in X) (x \neq a \Rightarrow a * x = a).$$

Di dalam aljabar BCI, didefinisikan himpunan $D(X)$ sebagai berikut :

$$\boldsymbol{D(X) = \{ a \in X \mid a \text{ atom kuat} \} \cup \{ 0 \}}.$$

Teorema 5 ___

Diberikan sebarang aljabar BCK X. Himpunan $D(X)$ merupakan subaljabar dan sekaligus ideal di dalam X.

Teorema 6 [2]

Jika X merupakan aljabar BCK maka

$$D(X) = X \Leftrightarrow \text{ setiap subaljabar di dalam } X \text{ merupakan ideal.}$$

Dari suatu aljabar BCI X, dapat dikonstruksikan

$$P(X) = \{ x \in X \mid 0 * x = 0 \}$$

dan

$$SP(X) = \{ x \in X \mid 0 * (0 * x) = x \}.$$

Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa keduanya merupakan subaljabar dan $P(X) \cap SP(X) = \{0\}$.

Aljabar BCK bagian dari X disebut radikal positif. Aljabar X disebut aljabar BCI p-semisimpel jika radikal positif-nya trivial yaitu radikal positif-nya hanya memuat elemen 0.

Ideal tertututp yang termuat di dalam aljabar p-semisimpel disebut aljabar tertutup p-semisimpel.

Teorema 7 [5]

Diberikan aljabar p-semisimpel X. Jika didefinisikan operasi "+" sebagai berikut

$$(\forall\, x, y \in X)\ (x + y = x * (0 * y))$$

maka X terhadap operasi + merupakan grup abelian dengan 0 *sebagai elemen identitas.*

Teorema 8 [1]

Jika X merupakan aljabar p-semisimpel dan $I \subseteq X$ maka tiga pernyataan berikut ekuivalen.

1. *I ideal tertutup*
2. *I subaljabar*
3. *I subgrup*

Lemma 9 [2]

Diberikan aljabar BCI X. Jika SP(X) ideal maka untuk setiap $x, y \in X$ dan $u, v \in SP(X)$ berlaku :

$$x * u = y * v \Rightarrow (x = y \ \& \ u = v).$$

Lemma 10[2]

Diberikan aljabar BCI X. Jika SP(X) ideal maka berlaku

$$(\forall x \in X)\ (x = (x * (0 * (0 * x))) * (0 * x)).$$

Lemma 11 [2]

Jika X merupakan aljabar BCI dengan SP(X) ideal maka

$$(\forall\ u \in P(X)\ \&\ v \in SP(X))\ (v * u = v).$$

Lemma 12 [2]

Jika X merupakan aljabar BCI dengan SP(X) ideal maka

$$(\forall\ u \in P(X)\ \&\ v, v` \in SP(X))\ ((u * v) * (u * v`) = 0 * (v * v`)).$$

Lemma 13 [2]

Jika X merupakan aljabar BCI dengan SP(X) ideal maka

$$(\forall\ u \in P(X)\ \&\ v, v` \in SP(X))\ ((0 * v) * (u * v`) = 0 * (v * v`)).$$

Lemma 14 [2]

Jika X merupakan aljabar BCI dengan SP(X) ideal maka

$(\forall\ u \in P(X)\ \&\ v \in SP(X))\ ((u * v) * (0 * v) = u)$.

Definisi 15

Diberikan aljabar BCI X dan ideal I, J ⊆ X. Aljabar X disebut ***direct product*** *dari I dan J jika :*

1. $(\forall\ x \in X)\ (\exists !\ a \in I)\ (\exists !\ b \in J)\ (x = a * b)$
2. $(\forall\ a, b, c, d \in X)(\ a* b, c* d \in I* J \Rightarrow (a* b) * (c* d) = (a* c) * (b* d))$.

Selanjutnya, jika X merupakan *direct product* dari I dan J, X dapat ditulis dengan

$$X = I * J.$$

Berikut diberikan syarat perlu dan syarat cukup setiap subaljabar merupakan ideal.

Teorema 16 [2]

Diberikan aljabar BCI X. Dua pernyataan berikut ekuivalen.

1. *$X = P(X) * SP(X)$ dan setiap elemen tak nol di dalam $P(X)$ merupakan atom*
2. *Setiap subaljabar di dalam X merupakan ideal.*

Bukti :

1 ⇒ 2

Ambil sebarang subaljabar I di dalam X. Akan ditunjukkan I ideal. Ambil sebarang $x * y \in I$ dengan $y \in I$. Akan ditunjukkan $x \in I$; karena berlaku 1 maka $x = u * v$ dan $y = u` * v`$ dengan $u, u` \in P(X)$ dan $v, v` \in SP(X)$. Dengan cara yang mudah diperoleh

$u` = y * (0 * (0 * y))$ (1)

dan

$u * u` = (x * y) * (0 * (0 * (x * y)))$. (2)

Berdasarkan $0, y, x*y \in I$ dan I subaljabar maka dari (1) dan (2) diperoleh $u`, u*u` \in I$. Di sisi lain, karena $u` \in P(X)$ maka $0 \leq u`$. Menurut Sifat 3 hal ini berakibat

$$u * u` \leq u * 0 = u \Leftrightarrow (u * u`) * u = 0.$$

Lebih lanjut, karena $u \in P(X)$ dan setiap elemen tak nol dalam $P(X)$ merupakan atom diperoleh $u* u` = u$ atau $u* u` = 0$. Jika $u* u` = u$ maka $u \in I$. Jika $u * u` = 0$ maka karena $u \in P(X)$ dan setiap elemen tak nol dalam X merupakan atom maka diperoleh $u = u`$ atau $u = 0$ sehingga

$$u \in I. \qquad (3)$$

Di lain pihak menurut Sifat 2 bagian 3 diperoleh

$$\begin{aligned} 0 * y &= 0 * (u` * v`) \\ &= (0 * u`) * (0 * v`) \\ &= 0 * (0 * v`) \\ &= v` \qquad (4) \end{aligned}$$

Berdasarkan $u, u` \in P(X)$ dan $v, v` \in SP(X)$ diperoleh

$$\begin{aligned} 0 * (0 * (x * y)) &= 0 * ((0 * x) * (0 * y)) \\ &= 0 * ((0 * (u * v)) * (0 * (u` * v`))) \\ &= 0 * (((0 * u) * (0 * v)) * ((0 * u`) * (0 * v`))) \\ &= 0 * ((0 * (0 * v)) * (0 * (0 * v`))) \\ &= 0 * (v * v`) \\ &= (0 * v) * (0 * v`) \\ &= (0 * (0 * v`)) * v \\ &= v` * v. \qquad (5) \end{aligned}$$

Berdasarkan $0, y, x* y \in I$ dan I subaljabar, dari (4) dan (5) diperoleh

$$v` \in I \quad \text{dan} \quad v` * v \in I. \quad (6)$$

Akibatnya, $0 * v = (v` * v`) * v = (v` * v) * v` \in I$ sehingga diperoleh

$v = 0 * (0 * v) \in I.$ (7)

Dari (3) dan (7) dan karena I subaljabar diperoleh

$x = u * v \in I.$

Dengan demikian terbukti I ideal.

2 ⇒ 1

Lemma 10 menunjukkan jika $SP(X)$ ideal, setiap anggota X dapat dinyatakan dalam bentuk

$x = (x * (0 * (0 * x))) * (0 * x).$

Terlebih dulu akan ditunjukkan bahwa $x * (0 * (0 * x)) \in P(X)$ dan $0 * x \in SP(X)$ sehingga dengan demikian terbukti bahwa setiap $x \in X$ dapat dinyatakan dalam bentuk $x = a * b$ dengan $a \in P(X)$ dan $b \in SP(X)$. Berdasarkan aksioma 3 pada Definisi 1 dan Sifat 2 bagian 3 dan 4 diperoleh

$$0 * (x * (0 * (0 * x))) = (0 * x) * (0 * (0 * (0 * x)))$$

$$= (0 * x) * (0 * x)$$

$$= 0.$$

Jadi terbukti $x * (0 * (0 * x)) \in P(X)$. Lebih lanjut, menurut Sifat 2 bagian 4 juga diperoleh

$0 * (0 * (0 * x))) = 0 * x.$

Jadi, $0 * x \in SP(X)$.

Berdasarkan Lemma 9 diperoleh bahwa untuk setiap $x \in X$ terdapat dengan tunggal $a \in P(X)$ dan $b \in SP(X)$ sehingga $x = a * b$. Dari Teorema 6 jelas bahwa setiap elemen tak nol di dalam X merupakan atom. Dengan demikian tinggal menunjukkan bahwa jika $x, y \in X$ dengan $x = u * v$ dan $y = u` * v`$ dengan $u, u` \in P(X)$ dan $v, v` \in SP(X)$ berlaku

$$(u * v) * (u` * v`) = (u * u` ) * ( v * v`).$$

Hal ini akan dibuktikan sebagai berikut :

Berdasarkan $u` \in P(X)$ diperoleh $0 \leq u`$. Menurut Sifat 3 hal ini berakibat

$u * u` \leq u * 0 = u \quad \Leftrightarrow (u * u`) * u = 0$

sehingga diperoleh dua kemungkinan yaitu $u * u` = 0$ atau $u * u` \neq 0$.

1. Jika $u * u` = 0$, maka diperoleh $u = 0$ atau $u = u`$ (sebab jika $u \neq 0$ maka $u` \neq 0$ sehingga menurut 1, $u`$ merupakan atom). Menurut Lemma 12 dan 13, jika $u = u`$ diperoleh

   $(u * v) * (u` * v`) = (u * v) * (u * v`) = 0 * (v * v`) =$

   $(u * u) * (v * v`) = (u * u`) * (v * v`)$

   dan jika $u = 0$ diperoleh

   $(u * v) * (u` * v`) = (0 * v) * (u` * v`) = 0 * (v * v`) =$

   $(0 * u`) * (v * v`) = (u * u`) * (v * v`)$.

2. Jika $u * u` \neq 0$ diperoleh $u \neq 0$ sehingga menurut 1, $u$ merupakan atom. Akibatnya diperoleh $u * u` = u$.

   Dari aksioma 1 pada Definisi 1 dan Sifat 2 bagian 1 diperoleh

   $(((u * v) * (u` * v`)) * (v` * v)) * u =$

   $(((u * v) * (u` * v`)) * u) * (v` * v) =$

   $(((u * v) * u) * (u` * v`)) * (v` * v) =$

   $(((u * u) * v) * (u` * v`)) * (v` * v) =$

   $((0 * v) * (u` * v`)) * (v` * v) =$

   $((0 * (u` * v`)) * v) * (v` * v) =$

   $(((0 * u`) * (0 * v`)) * v) * (v` * v) =$

   $((0 * (0 * v`)) * v) * (v` * v) =$

   $(v` * v) * (v` * v) = 0$.

   Jadi,

$$((u * v) * (u` * v`)) * (v` * v) \leq u$$

dan diperoleh

$$((u * v) * (u` * v`)) * (v` * v) = 0 \qquad (8)$$

atau

$$((u * v) * (u` * v`)) * (v` * v) = u. \qquad (9)$$

Jika (8) yang terjadi, karena $0, v, v` * v \in SP(X)$ dan $SP(X)$ ideal, diperoleh

$$(u * v) * (u` * v`) = (u * (u` * v`)) * v \in SP(X)$$

sehingga

$$u * (u` * v`) \in SP(X). \qquad (10)$$

Di lain pihak,

$$v` = 0 * ( 0 * v`) = (0 * u` ) * ( 0 * v`) = 0 * (u` * v`) =$$

$$(u * u) * (u` * v`) = (u * (u` * v`)) * u.$$

Menurut (10) dan Lemma 11 diperoleh

$$v` = ( u * ( u` * v` )) * u = u * ( u` * v`).$$

Akibatnya $(u * (u` * v`)) * v` = 0$ sehingga

$$(u * v` ) * ( u` * v`) = ( u * ( u` * v` )) * v` = 0.$$

Jadi,

$$(u * v` ) \leq ( u` * v`)$$

sehingga menurut Sifat 3 dan Lemma 14 diperoleh

$$u = (u * v` ) * ( 0 * v`) \leq (u` * v`) * (0 * v` ) = u`$$

Jadi, $u * u` = 0$. Kontradiksi dengan $u * u` \neq 0$.

Oleh karena itu pastilah (9) yang terjadi yaitu

$$((u * v) * (u` * v`)) * (v` * v) = u. \qquad (11)$$

Di sisi lain, menurut Teorema 8 dan Lemma 14 diperoleh

$$(u * (v * v` )) * ( v` * v) =$$

$$(u * (v * v` )) * ( v` * (0 * (0 * v))) =$$

$(u * (v * v`)) * ((0 * v) * (0 * v`)) = (u * (v * v`)) * (0 * (v * v`)) = u.$ (12)

Dari (11) dan (12) diperoleh

$((u * v) * (u` * v`)) * (v` * v) = (u * (v * v`)) * (v` * v).$

Akibatnya, karena $v` * v \in SP(X)$ maka menurut Lemma 9 diperoleh

$(u * v) * (u` * v`) = u * (v * v`)$

dan karena $u = u * u`$ maka diperoleh

$(u * v) * (u` * v`) = (u * u`) * (v * v`).$ ◎

Referensi :

[1] Hoo, C.S., Murty, P.V.R., 1987, Quasi-Commutative *p*-Semisimple BCI-Algebra, *Math. Japonica* 32, No. 6 : 889-894

[2] Huang, W.P., 1992, On The *p*-Semisimple Part in BCI-Algebra, *Math. Japonica* 37 , 159-161

[3] Huang, W.P., 1992, On BCI-Algebras in Which Every Subalgebra is an Ideal, *Math. Japonica* 37, No. 4 : 645-647

[4] Huang, W.P., Bae Jun, Y., 2002, Ideals and Subalgebras in BCI-Algebras, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, Springer Verlag

[5] Tiande, L., Changchang, X., 1985, *p*-Radical in BCI-Algebras, *Math. Japonica* 30, No. 4 : 511-517

[6] Susanti, Y., 2004, *Ideal dan Subaljabar di dalam Aljabar BCI*, Tesis , Jurusan Matematika FMIPA UGM